L'ENSEIGNEMENT

MATHÉMATIQUE

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/lenseignementmat05inte

P
Math.
E

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

REVUE INTERNATIONALE

PARAISSANT TOUS LES DEUX MOIS

DIRIGÉE PAR

C.-A. LAISANT
Docteur ès sciences,
Examinateur d'admission à l'École polytechnique de Paris.

H. FEHR
Docteur ès sciences,
Professeur à l'Université de Genève et au Gymnase.

AVEC LA COLLABORATION DE **A. BUHL**, Docteur ès sciences.

COMITÉ DE PATRONAGE

P. APPELL (Paris). — N. BOUGAIEV (Moscou). — Moritz CANTOR (Heidelberg).
L. CREMONA (Rome). — E. CZUBER (Vienne). — Z.-G. DE GALDEANO (Saragosse).
A.-G. GREENHILL (Woolwich). — F. KLEIN (Göttingen).
P. MANSION (Gand). — MITTAG-LEFFLER (Stockholm). — G. OLTRAMARE (Genève).
Julius PETERSEN (Copenhague). — E. PICARD (Paris). — H. POINCARÉ (Paris).
P.-H. SCHOUTE (Groningue). — C. STEPHANOS (Athènes). — F. Gomes TEIXEIRA (Porto).
A. VASSILIEF (Kasan). — A. ZIWET (Ann-arbor, Michigan, U. S. A.).

Ve Année. 1903.

298930
4
34
R.

PARIS
C. NAUD, EDITEUR
3, RUE RACINE, 3

1903

A NOS LECTEURS

Au début de cette nouvelle année 1903, nous nous conformons à une pratique devenue pour ainsi dire une tradition depuis qu'a été fondée notre Revue. Elle a sa raison d'être, car il est bien rare qu'une circonstance ne se présente pas chaque année, méritant d'être signalée d'une façon spéciale, autrement que par un article ordinaire.

Il en est une, cette fois, qui a certainement été remarquée déjà, mais sur laquelle nous voulons attirer votre attention. C'est l'adjonction, à la rédaction, d'un nouveau collaborateur qui a bien voulu répondre à notre appel et à qui nous témoignons ici notre reconnaissance. Parmi les jeunes savants français, M. Buhl a pris une place importante en peu d'années; il s'est fait à lui-même sa première éducation mathématique; et, grâce à des facultés exceptionnelles, jointes à une prodigieuse puissance de travail, il a pu conquérir rapidement des grades scientifiques auxquels on n'atteint en général que bien plus lentement. Nous serions mal à l'aise, et un peu suspects, pour dire ici de lui tout le bien que nous en pensons; mais nous avons le droit de déclarer que son entrée à la direction est une bonne fortune et une garantie d'avenir pour *l'Enseignement mathématique*.

En remerciant nos collaborateurs et correspondants, parmi lesquels nous n'avons garde d'oublier les membres de notre comité de patronage, nous croyons devoir spé-

cialement insister sur ce qui concerne ceux d'entre eux qui ont bien voulu nous envoyer des renseignements sur les cours universitaires dans les divers pays. Puissent-ils, non seulement nous continuer un si précieux concours, mais aussi trouver des imitateurs! Rien ne rentre mieux dans le cadre de notre publication; rien n'est plus de nature à intéresser les professeurs et à provoquer des progrès dans l'enseignement, par une louable émulation. Organisation, nombre et noms des professeurs, programmes, répartition des matières enseignées, sanctions des études, tout cela est important, tout cela est utile, et chacun en profitera.

Nous apportons tout le soin et toute la sollicitude possibles à une publication qui nous est chère; mais nous n'avons aucune prétention à l'infaillibilité. C'est dire que si parmi nos correspondants il s'en trouve pour nous signaler des critiques ou pour nous suggérer des améliorations auxquelles nous n'aurions pas songé, loin de leur en savoir mauvais gré, nous leur aurions au contraire une véritable gratitude. Chaque proposition qui nous serait faite fera l'objet d'une consciencieuse étude de notre part.

Et maintenant, il ne nous reste plus qu'à exprimer à tous nos vœux les plus sincères pour 1903. Ce sont d'ailleurs des vœux égoïstes, car, dans la grande coopération que nous formons, ils se retournent vers notre Revue elle-même, à laquelle lecteurs, collaborateurs et correspondants ne cessent d'apporter un concours si cordial et si utile,

C.-A. Laisant, H. Fehr.

LES

APPLICATIONS DU CALCUL DES PROBABILITÉS

A LA MÉTHODE SCIENTIFIQUE

CHAPITRE I. — *Le problème du calcul des probabilités*

Position du problème. — Applications pratiques.

Le calcul des probabilités est une des parties des sciences mathématiques, que les anciens ne paraissent pas avoir connue. C'est, semble-t-il, au génie intuitif de Pascal, dont l'attention se trouva portée sur les jeux dits de hasard, que les temps modernes doivent cette découverte, dont la fécondité, si elle se mesurait au succès et à la faveur qu'elle n'a jamais cessé d'obtenir, devrait être vraiment énorme. Indépendamment de la valeur philosophique de ces recherches paradoxales au premier abord, on leur a attribué encore une immense portée pratique : beaucoup de gens considèrent le calcul des probabilités comme un moyen scientifique d'investigation préalable dans les domaines inconnus de l'avenir, un véritable procédé de prévision, de divination. Un historien des sciences occultes dans un livre encore assez récent, Plytoff, fait une place au calcul des probabilités, parmi les sciences divinatoires, à côté de l'oniromancie, ou de la chiromancie, et lui consacre un chapitre entier, à ce titre [1].

Pour ceux qui ne prétendent pas se servir de cette branche des mathématiques pour soulever le voile de l'inconnu, ils ne laissent pas cependant de revendiquer pour elle des applications parfois inattendues. Des philosophes et des mathématiciens, et non des

---

[1] PLYTOFF, *Les sciences occultes*, Paris. J.-B. Baillière, in-12 1891. Ch. III, p. 47. 66.

moindres, tels que Laplace, Condorcet et Poisson, n'ont-ils pas cherché dans la mesure des probabilités une approximation suffisante pour leur permettre de rejeter les raisonnements plus ou moins exacts des juges chargés de donner leur avis dans les procès et dans les causes, n'ont-ils pas rêvé d'un jour où les innocents et les coupables attendraient leur sort du tirage d'une boule blanche ou noire d'une urne où on en mettrait en proportions définies, tirage réglé par le hasard, un hasard qu'on aurait au préalable enchaîné dans des formules mathématiques, rêve qualifié par Stuart Mill le scandale des mathématiques, et qui ne laissa pas d'indiguer le robuste bon sens de M. Bertrand.

Sans aller si loin, la plupart des savants admettent un usage du calcul des probabilités dans les sciences, où il devient un auxiliaire utile des méthodes de recherche, permettant parfois de découvrir l'existence de causes inconnues produisant des modifications ou des perturbations plus ou moins constantes. Et certes nos moyens de rechercher les causes des phénomènes sont souvent si restreints qu'un procédé de ce genre qui, s'il ne peut définir les causes inconnues en question, peut cependant les indiquer comme un X à résoudre, n'est pas à regarder comme négligeable, s'il est réellement capable de rendre de tels services.

C'est cette question de l'utilité, de la fécondité du calcul des probabilités que nous voulons examiner ici surtout. Ce sont ses applications qui nous préoccuperont constamment, et surtout ses applications dans les sciences les plus complexes, dans les sciences biologiques.

Cependant nous étudierons d'abord brièvement quelques formules mathématiques du calcul des probabilités, devant servir particulièrement aux applications concrètes, afin d'en examiner la valeur. Ensuite nous glisserons sur la question de l'application du calcul des probabilités à la connaissance de l'avenir ; et enfin nous aborderons le point capital de notre étude, à savoir les applications du calcul des probabilités à la recherche des causes et à celle des erreurs, particulièrement dans les sciences biologiques, la valeur des applications déjà faites, les conditions nécessaires de ces applications, et leur légitimité en général.

Chapitre II. — *Exposition des principes et des problèmes du calcul des probabilités.*

Qu'est-ce que c'est qu'une probabilité? — Les théorèmes des probabilités. — Le théorème de Bernoulli. — Le théorème de Stirling. — Probabilité de l'écart. — Le problème de Buffon. — Intégration des formules. — Données critiques de Bertrand. — L'écart probable. — L'écart moyen. — La probabilité des erreurs.

Dans l'examen du calcul des probabilités, nous ne chercherons pas à faire un exposé trop connu des définitions élémentaires. Nous voulons seulement mettre quelques points en lumière, qui nous paraissent trop souvent négligés, et sur lesquels nous reviendrons dans la suite.

La probabilité d'un événement se définit, comme on le sait, par le rapport du nombre des cas favorables à l'arrivée de cet événement au nombre total des cas possibles. Mais il y a ici un postulat indispensable, c'est à savoir l'égale possibilité de ces différents cas possibles ; sans cela, comme le fait remarquer M. Bertrand, on pourrait ne considérer que deux cas possibles : l'arrivée, et la non-arrivée de l'événement : un seul étant favorable, la probabilité serait toujours $\frac{1}{2}$.

Cependant il n'est pas toujours nécessaire d'avoir cette égale possibilité des différents cas, mais c'est à une condition expresse : il faut alors déterminer la probabilité de ces différents cas, et leur attribuer comme coefficient la valeur qui mesure cette probabilité propre pour chacun d'eux.

Il y a là un postulat initial absolument fondamental dans ce calcul ; s'en passer équivaudrait à vouloir faire de la géométrie euclidienne sans le postulat d'Euclide. Nous verrons si ce postulat initial a toujours été scrupuleusement respecté.

Nous n'insisterons pas sur les théorèmes des probabilités totale et composée, et nous aborderons immédiatement le point capital du calcul, le théorème de Bernoulli ; il permet de mesurer pour un nombre donné d'épreuves m, la probabilité P pour qu'un événement E, d'une probabilité simple égale à p, la probabilité inverse étant égale à q, arrive un nombre donné de fois.

La combinaison la plus favorable se trouve être celle dans

laquelle le nombre d'arrivées de l'événement E est mp et celle de l'événement inverse mq. Cette probabilité maxima est donnée par la formule

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}}.$$

Il faut noter que cette formule n'est obtenue que par un certain nombre d'approximations. La plus importante est l'application de la formule de Stirling, qui donne un équivalent plus simple des produits des premiers nombres. D'après elle,

$$1.2.3\ldots n = e^{-n}\, n^n \sqrt{2\pi n}.$$

Or cette formule n'est à peu près exacte que pour une valeur très considérable de n.

M. Bertrand donne la comparaison des deux termes pour $n = 20$. Voici les résultats :

$$1.2.3\ldots 20 = 2.432.902.008.176.640.000$$
$$e^{-20}\, 20^{20} \sqrt{40\pi} = 2.422.786.385.510.400.000.$$

Si le rapport des deux valeurs est 1,00417, il n'en est pas moins vrai que la différence absolue est énorme : elle est de l'ordre des dizaines de quatrillions.

On peut donc dire que pour $n = 20$, on a une approximation absolument insuffisante.

La probabilité maxima diminue à mesure que les épreuves augmentent, car m se trouve au dénominateur, c'est-à-dire que l'on trouvera un écart de plus en plus probable entre le nombre probable et le nombre réel d'arrivées de l'événement E. Soit h cet écart entre mp et mx.

On tire de la probabilité maxima, en faisant encore appel au théorème de Stirling, la probabilité de cet écart pour laquelle M. Bertrand donne la formule

(1) $$\frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}}\, e^{-\frac{h^2}{2mpq}}.$$

Il rend cette fonction de h continue en substituant à h une

variable continue : il considère l'écart comme compris entre z et $z + dz$. La formule devient

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} e^{-\frac{z^2}{2mpq}} dz.$$

La probabilité alors pour que z soit inférieur à une limite donnée α, c'est-à-dire pour que l'écart soit compris entre $-\alpha$ et $+\alpha$ est

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\frac{z^2}{2mpq}} dz$$

et, en posant

$$t = \frac{z}{\sqrt{2mpq}},$$

$$P_\alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{2mpq}}} e^{-t^2} dt.$$

Dans chaque cas particulier, cette probabilité P_α s'obtiendra par les valeurs $\Theta(t)$ de la fonction

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt = \Theta(t).$$

La probabilité pour avoir un écart inférieur à une limite donnée α étant $\Theta(t)$, la probabilité pour avoir un écart égal ou supérieur à cette limite sera $1 - \Theta(t)$. C'est-à-dire que l'expression

$$1 - \Theta(t) \tag{2}$$

peut être considérée comme la probabilité d'un écart p si l'on pose

$$t = \frac{h}{\sqrt{2mpq}}.$$

Par conséquent, la formule de la valeur probable de l'écart donné par M. Bertrand sera équivalente à celle-ci.

On aura

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} e^{-\frac{h^2}{2mpq}} = 1 - \Theta\left(\frac{h}{\sqrt{2mpq}}\right).$$

Et en effet, M. Bertrand semble considérer ces formules comme équivalentes, car il les emploie fréquemment l'une pour l'autre.

Nous voyons, au chapitre VII, page 124, qu'il résout ce problème.

Buffon a jeté une pièce de monnaie 4 040 fois et obtenu 2 048 fois face.

Quelle est la probabilité de l'écart $h = 28$?

$$mp = 4040 \times \frac{1}{2} = 2020. \quad mx = 2048. \quad mx - mp = 28.$$

Il donne d'abord la formule (1) de la probabilité de l'écart. Puis il cherche par l'intégrale la probabilité de l'écart moindre, qui lui donne $\Theta(0,62) = 0,619$.

Et il cherche par $1 - \Theta(t)$ la probabilité de l'écart égal ou supérieur à 28, qu'il trouve ainsi égale à 0,38.

Or cette assimilation des deux formules, et cette égalité que nous avons posée est tout simplement absurde : l'un des deux termes est une simple fonction, le second est le résultat d'une intégration. Or il n'y a pas d'assimilation possible entre l'intégrale et la fonction.

L'intégrale est à la fonction comme une aire est à une courbe. C'est ainsi qu'une courbe peut présenter un maximum sans que l'aire cesse de s'accroître.

Or justement la fonction (1) présente un maximum, ce qui, au point de vue du calcul des probabilités est absurde.

Prenons donc l'expression

$$(1) \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} e^{-\frac{h^2}{2mpq}}$$

et formons sa dérivée.

Pour simplifier l'écriture, prenons

$$\sqrt{2mpq} = \frac{1}{t}.$$

La fonction (1) devient

$$y = \frac{x}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}.$$

La dérivée y' sera

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} + \frac{x}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} (-2h^2x).$$

En mettant $\frac{e^{-h^2x^2}}{\sqrt{\pi}}$ en facteur commun, on a l'expression

$$\frac{e^{-h^2x^2}}{\sqrt{\pi}} \left[1 - 2h^2x^2\right].$$

L'on voit aisément que le maximum est obtenu pour $2h^2x^2 = 1$, c'est-à-dire pour $x^2 = \frac{1}{2h^2}$, ou pour $x = \frac{1}{h\sqrt{2}}$.

Ainsi quand $x < \frac{1}{h\sqrt{2}}$, la fonction croît ; quand $x > \frac{1}{h\sqrt{2}}$, la fonction décroît.

Si nous avons maintenant

$$\sqrt{2mpq} = \frac{1}{x}$$

ou

$$2mpq = \frac{1}{x^2},$$

ce maximum est obtenu pour

$$m = \frac{1}{2pqx^2} = \frac{h^2}{pq}.$$

Ainsi le maximum de la fonction (1) est obtenu pour une valeur de m égale à une fraction dont le numérateur est le carré de l'écart h et le dénominateur le produit de la probabilité p de l'événement E par la probabilité inverse q de l'événement E' $(p + q = 1)$.

C'est ainsi que, si l'on fait $p = q = \frac{1}{2}$, $h = 10$, on a, pour $m = 40$, par les calculs logarithmiques,

$$P(h) = 0{,}0009,$$

pour $m = 400 = \frac{h^2}{pq}$

$$P(h) = 0{,}024,$$

et pour $m = 4\,000$

$$P(h) = 0{,}00015.$$

Ainsi donc, la probabilité d'un même écart absolu de 10 qui, raisonnablement (et d'après M. Bertrand lui-même), doit croître avec le nombre des épreuves (et, en effet, la ruine des joueurs se fonde sur les oscillations de plus en plus grandes des écarts absolus, malgré la diminution des écarts relatifs), diminuerait, d'après cette formule quand on aurait dépassé $\frac{h^2}{pq}$.

Et, comme la formule nécessite m très grand, il y aurait décroissance continue de cette probabilité.

Il est curieux que l'on n'ait pas mis en lumière cette absurdité.

M. Bertrand, quand il applique sa formule, ne fait jamais varier m, mais h, et, en effet, ici il y a diminution continue de la fonction pour un accroissement continu de h, m étant constant.

C'est ainsi que M. Bertrand donne cet exemple (1) :

$$m = 1000, \quad p = q = \frac{1}{2}$$

On a, pour $h = 40$,

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1000\pi}}\, e^{-3,2} = 0{,}0010285\,;$$

pour $h = 60$,

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1000\pi}}\, e^{-7,2} = 0{,}0001883\,;$$

pour $h = 100$,

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1000\pi}}\, e^{-20} = 0{,}0000000052006$$

Les valeurs données par la formule (2)

$$1 - \Theta(t)$$

(1) Bertrand. *Calcul des probabilités*. Paris, 1889, p. 78, 79.

diffèrent donc de plus en plus, à mesure que m augmente, des valeurs de la formule (1).

C'est ainsi que dans les exemples que nous avons donnés plus haut, pour $m = 40$, nous avions :

$$P(h) = 0.0009,$$
$$1 - \Theta(t) = 0.0016 ;$$

pour $m = 400 = \frac{h^2}{pq}$,

$$P(h) = 0{,}024$$
$$1 - \Theta(t) = 0{,}32 ;$$

pour $m = 4\,000$,

$$P(h) = 0.00015$$
$$1 - \Theta(t) = 0.7556.$$

Et, dans l'exemple du problème de Buffon, de M. Bertrand, $m = 4040 > \frac{h^2}{pq}$, au lieu de $1 - \Theta = 0{,}619$ qu'il a trouvé, l'application de la formule (1) donne $P(28) = 0.008515$.

Ainsi donc, c'est la seule formule (2) : $1 - \Theta(t)$ qui doit être gardée pour mesurer la probabilité d'un écart (h), Θ mesurant la probabilité d'un écart moindre, c'est-à-dire encore la probabilité de la cause.

Mais l'application de cette formule nécessite m très grand.

Notons au passage que, dans le calcul des probabilités, quand on rencontre un écart, il faut en chercher la probabilité, et qu'il y a une formule pour la probabilité des causes. Cela n'est pas inutile, car nous aurons à y revenir, quand nous traiterons des applications du calcul.

Il y a d'ailleurs un écart probable, c'est-à-dire qui a probabilité égale d'être ou de n'être pas surpassé ; c'est l'écart α défini par l'équation :

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2mpq}} = 0{,}476936.$$

ou

$$\alpha = 0{,}47693\sqrt{2mpq},$$

car

$$\Theta(0{,}47693) = \frac{1}{2}.$$

Quant à l'écart moyen, considéré comme donnant la valeur probable de l'écart, dans une série m d'épreuves, il est de

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{mpq} = 0{,}79789\sqrt{mpq}.$$

C'est ainsi que, dans le problème de Buffon, la valeur probable de l'écart était de 24,7, alors que l'écart réel était de 28. L'écart probable était de 21 environ. Le rapport des deux écarts doit être de 0,8463. Cela est encore très important à mettre en relief : le calcul des probabilités admet un écart, et un écart probable contre le nombre probable d'arrivées mp d'un événement E, et le nombre réel mx d'arrivées de cet événement, et non seulement ce calcul l'admet, mais il l'exige. Une très grande régularité est considérée comme l'indice d'une cause régulatrice corrigeant les écarts nécessaires dus au hasard.

M. Bertrand [1] a proposé de chercher quel est l'écart dans la proportion des naissances des filles et des garçons, qu'il y a 10 000 à parier contre 1 de franchir au moins une fois en cent ans.

Il trouve cet écart égal à 99.

Si l'on a $9{,}2\,n = 100$, c'est-à-dire $\frac{1}{n} = 0{,}092$, il y a 10 000 à parier contre 1 pour que l'événement de probabilité $\frac{1}{n}$ arrive une fois au moins sur 100 épreuves.

Or la probabilité d'un écart, pendant une année, plus grand que λ sur 14 000 naissances, est :

$$1 - \Theta\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2mpq}}\right).$$

Cela doit être égal à 0,092, et par conséquent,

$$\Theta\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2mpq}}\right) = 0{,}908.$$

Il faut alors $\frac{\lambda}{\sqrt{2mpq}} = 1{,}19$.

On en déduit $\lambda = 99$.

---

[1] BERTRAND, p. 162, 163.

« Si dans un siècle, conclut M. Bertrand, l'écart n'avait pas une seule fois dépassé 99, si sur 14 000 naissances annuelles, le nombre des garçons s'était maintenu entre 7 300 et 7 100, une cause régulatrice serait presque certaine ; il y a 10 000 à parier contre 1, *a priori*, pour que le hasard, sur cent épreuves tentées dans la même urne, ne maintienne pas une telle régularité (1). »

Ainsi, quand la probabilité d'un écart égal ou supérieur à l'écart réel est très forte, il y a probabilité égale d'une cause régulatrice, de même que, quand cette probabilité est très faible, il y a probabilité égale d'une cause perturbatrice, et dans la mesure par conséquent où la valeur réelle est inférieure ou supérieure à la valeur probable de l'écart.

Il est donc absolument illégitime, de par le calcul des probabilités lui-même, de compter sur une régularité absolue des événements dus au hasard, et de leur répartition proportionnelle à leurs probabilités respectives. Nous verrons que c'est encore un point que l'on oublie trop souvent, si du moins ceux qui parfois prétendent appliquer le calcul des probabilités se sont jamais donné la peine de l'apprendre.

Il y a encore une formule fournie par le calcul des probabilités et qui peut servir à de nombreuses applications, c'est celle qui concerne l'erreur probable et la probabilité des erreurs dans les observations scientifiques.

La loi de probabilité des erreurs qui dépendent de tant de facteurs n'est nécessairement accessible au calcul que d'une façon très imparfaite. Euler, Bernoulli, Lagrange, Laplace ont fait des hypothèses que les faits ont démenties.

C'est à la loi établie par Gauss que l'on s'est rallié.

Elle part de ce postulat que la valeur la plus probable entre plusieurs mesures d'une grandeur est la moyenne des grandeurs obtenues, postulat qui n'est vérifié qu'approximativement.

On obtient comme formule de probabilité d'une erreur comprise entre z et $z + dz$,

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2z^2} dz.$$

(1) *Ibid.*, p. 163.

Celle d'une valeur plus petite que α, en valeur absolue, sera :

$$\frac{2k}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha} e^{-k^2 z^2}\, dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{k\alpha} e^{-t^2}\, dt = \Theta\,(k\alpha).$$

Connaissant la valeur de l'erreur probable, on peut en fonction de celle-ci trouver la probabilité d'une erreur.

L'erreur probable r est donnée par deux formules dont les résultats divergent à la troisième décimale :

$$r = 0{,}8453\ \frac{\Sigma\delta}{n}$$

$$r = 0{,}6745\ \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n-1}},$$

h est le nombre des épreuves.

$\Sigma\delta$ est la somme des erreurs résiduelles qui doivent être connues (on a là un moyen de mesurer le degré de confiance d'une série d'observations ; $\frac{1}{r^2}$ sera le poids d'une observation).

On peut donc ainsi connaître l'erreur probable, qu'il y a probabilité $\frac{1}{2}$ de surpasser ou de ne pas surpasser.

M. Nikolaus Wuich a construit sur ces données un tableau reproduit par Bertrand.

Il donne la probabilité d'une erreur en fonction de l'erreur probable, sur 10 000.

Ainsi il y a probabilité 5 000 $\left(\frac{5\ 000}{10\ 000} = \frac{1}{2}\right)$ pour 1 fois l'erreur probable ; probabilité 54 pour 0,01 fois l'erreur probable ; probabilité 9 993 pour 5 fois l'erreur probable (ou, suivant la notation habituelle, probabilités 0,5 ; 0,0054 ; 0,9993).

Enfin, en faisant les mesures $= n$, la moyenne $= m$, la variation moyenne $= v$ $\left(\text{moyenne des écarts par rapport à la moyenne} = \frac{\Sigma\delta}{n}\right)$, et, si l'on a deux moyennes de mesures analogues, on atteint une différence d.

Quelle est, peut-on se demander, la probabilité de cette valeur d considérée comme une erreur.

On considère la précision K comme égale à $\frac{1}{s\sqrt{\pi}}$.

On fait la moyenne générale M et t, considéré comme le produit de l'erreur par la précision devient $t = K\sqrt{n}(M - m)$, et

$$t = \frac{n_1\sqrt{n}\, dv}{\sqrt{\pi}\ (nv_1^2 + n_1 v^2)}$$

avec des simplifications.

La probabilité d'avoir une mesure égale à m sera égale à $1 - \Theta(t)$, ce qu'un tableau peut nous fournir.

Ainsi donc, non seulement le calcul des probabilités fournit un écart probable et la probabilité d'un écart entre le nombre probable et le nombre réel d'arrivées d'un événement, mais encore une erreur probable et la probabilité d'une erreur, c'est-à-dire d'un écart entre une valeur observée et une valeur réelle (et non plus probable), le plus souvent ignorée (et à laquelle on substitue la moyenne des valeurs, considérée comme la valeur la plus probable).

Ce dernier calcul présente encore bien plus d'éléments subjectifs que le premier. En tout cas il y a lieu de ne pas confondre, ce que nous verrons qu'on a fait, l'erreur et l'écart.

Et maintenant, que peut-on tirer de ce calcul de la probabilité des erreurs ? Nous verrons ce qu'on en a tiré. Nous verrons ensuite si l'on en peut légitimement tirer quelque chose.

Chapitre III. — *Le calcul des probabilités peut-il servir à la connaissance de l'avenir.*

Opinion de Laplace. — Opinion de M. Poincaré. — Application du calcul de probabilité aux jeux de hasard ; exemple. — Les probabilités partielles. — Les opinions et les critiques de Cournot.

Le calcul des probabilités peut-il servir à la connaissance de l'avenir ? Nous avons vu qu'un historien des sciences occultes en faisait un mode de divination spécial. Seulement, ce n'est pas là une autorité suffisante. Mais nous nous trouvons souvent en présence de joueurs qui dans leurs mises s'efforcent de suivre les indications du calcul des probabilités. Si l'on joue à la roulette,

par exemple, lorsque la rouge est sortie six fois de suite, on met sur la noire avec une quasi-certitude qu'elle sortira, la probabilité d'une sortie consécutive de sept rouges étant très faible. Le calcul des probabilités légitime-t-il ce raisonnement ? Laplace distingue expressément deux cas dans la probabilité des événements futurs : si l'événement attendu dépend des événements antérieurs, il y a une probabilité nouvelle, tirée de la connaissance de cet événement, pour l'événement à venir. Si par exemple on a dans une urne une boule blanche et une noire, la probabilité d'en tirer une quelconque est $\frac{1}{2}$. Mais si l'on tire une boule blanche, sans la remettre, la probabilité de tirer la noire devient égale à 1. C'est une certitude. Dans le second cas, l'événement nouveau est indépendant des événements anciens, sa probabilité reste alors constante.

Si, après avoir tiré la boule blanche de l'urne, je l'y remets, la probabilité de tirer la boule noire reste $\frac{1}{2}$. Il en est ainsi toujours pour des jeux comme pile ou face, ou comme la roulette.

Dans ce cas, dit Laplace, « le passé ne peut répandre aucune lumière sur l'avenir et il serait absurde d'en tenir compte » (1).

Mais Laplace ne donne pas une justification suffisante de son assertion. Le calcul des probabilités juge des sorties respectives à pile ou face, quand elles sont passées, et attribue une probabilité infiniment faible à une sortie constante de pile par exemple ; pourquoi ne le pourrait-il faire dans l'avenir ?

M. Poincaré s'occupe aussi de la question. Parlant des joueurs qui mettent sur la noire après une sortie consécutive de six rouges, il dit : « En réalité leur probabilité de gain reste $\frac{1}{2}$. L'observation montre, il est vrai, que les séries de sept rouges consécutives sont très rares, mais les séries de six rouges suivies d'une noire sont tout aussi rares. Ils ont remarqué la rareté des séries de sept rouges, s'ils n'ont pas remarqué la rareté des séries de six rouges et une noire, c'est uniquement parce que de pareilles séries frappent moins l'attention (2) ».

---

(1) LAPLACE, *Essai philosophique sur le calcul des probabilites*, p. 18.

(2) POINCARÉ, Réflexions sur le calcul des probabilités. *Revue generale des Sciences*, 5 août 1899, p. 267.

Le raisonnement de M. Poincaré ne nous paraît pas absolument juste. Cette assimilation d'une série de sept rouges à une une série de sept sorties décomposée en six rouges et une noire n'est pas exacte. Car cette série de six rouges et une noire ne représente en fait qu'une série de six rouges, l'apparition de la noire ne faisant que marquer la fin de cette série ; une série de sorties d'une couleur ne peut en effet se clôturer que par une sortie de la couleur inverse. (Une série n'est série que si elle est homogène, elle est close par une apparition hétérogène.) Dire qu'une série de six rouges et une noire est aussi rare qu'une série de sept rouges, c'est dire en fait qu'une série de sept rouges consécutives est aussi probable qu'une série de six rouges consécutives. Or ceci est contraire au calcul des probabilités. La probabilité d'une série est égale au produit des probabilités partielles de chaque terme, où à la puissance n^{me} de cette probabilité, n représentant le nombre de termes de la série. Il est donc évident que la probabilité d'une série de sept termes est moindre que d'une série de six termes.

Et nous pouvons encore nous demander pourquoi ce n'est pas le joueur qui a raison.

A vrai dire, si le calcul des probabilités ne légitime pas la spéculation des joueurs, c'est parce que les probabilités initiales ne sont applicables que pour plus d'un terme, qu'alors il faut faire appel au théorème de Bernoulli et que l'application du théorème de Bernoulli réclame un grand nombre d'expériences. Or la probabilité porte ici non sur un grand nombre d'événements futurs, mais sur un seul. Dès lors le calcul des probabilités n'est plus applicable. Il y a parfois des rencontres extraordinaires dans une série très limitée d'événements, mais les grands nombres régularisent tout, et rien ne permet plus alors de s'en apercevoir, en sorte que ce qui est vrai de la totalité ne l'est pas des parties, et qu'en voulant passer de l'une aux autres on risque de tomber dans des erreurs très grossières.

Mais, semble-t-il, le calcul des probabilités reste applicable à la prévision des rapports respectifs de différents événements, pour un nombre considérable de ceux-ci.

Il est évident que, si l'on a 10.000 numéros dans une urne, par exemple, dont la probabilité respective de sortie est par

conséquent de $\frac{1}{10\,000}$, pour celui qui sortira avec une probabilité aussi faible, et qui sortira pourtant nécessairement s'il n'est pas spécifié, car il faut bien qu'un sorte, on ne pourra se récrier, comme pour l'apparition d'un phénomène absolument extraordinaire ; car cet événement est isolé. Le calcul des probabilités ne donnait aucune indication sur la sortie de ce numéro, dont la probabilité de $\frac{1}{10\,000}$ s'est transformée subitement en une certitude égale à l'unité. Mais le calcul des probabilités pourra donner des indications sur le nombre de sorties de ce numéro pour deux ou trois millions d'expériences.

Cournot proteste, en une page très remarquable, contre cette probabilité partielle, incomplète et douteuse des événements futurs, relative à un petit nombre d'épreuves, d'autant plus que voulant subordonner le calcul des probabilités à l'expérience, la probabilité ne pourrait jamais que servir d'expression aux événement passés.

« La probabilité mathématique prise objectivement, ou conçue comme mesurant la possibilité des choses, ne peut en général être déterminée que par l'expérience. Si le nombre des épreuves d'un même basard croissait à l'infini, elle serait déterminée exactement avec une certitude comparable à celle de l'événement dont le contraire est physiquement impossible. Pour un nombre très grand d'épreuves, la probabilité n'est encore donnée qu'approximativement ; mais on est autorisé à considérer comme extrêmement peu probable que la valeur réelle diffère notablement de la valeur conclue des observations. En d'autres termes, il arrivera très rarement que l'on commette une erreur notable en prenant pour la valeur réelle la valeur tirée des observations. Dans le cas même où le nombre des épreuves est peu considérable, on a voulu tirer, de certaines considérations mathématiques; des formules pour évaluer numériquement la probabilité des événements futurs d'après les événements observés, mais de telles formules n'indiquent plus que des probabilités subjectives, bonnes tout au plus à régler les conditions d'un pari ; elles deviendraient fausses si on les appliquait comme on l'a fait souvent bien à tort à la détermination de la possibilite des événements. »

En fin de compte, on peut admettre que le calcul des probabilités a une valeur au point de vue de l'avenir pour un grand nombre d'épreuves, mais seulement si l'on accorde à ce calcul une portée *a priori* dépassant les limites d'une expérience fondamentale qui n'a d'ailleurs jamais été systématiquement faite ; cette valeur restera cependant toujours approximative, car, pour que l'application de la formule Stirling dans les calculs soit à peu prés exacte, il faut des nombres d'épreuves très considérables, et pour des nombres d'épreuves très considérables, on a des écarts probables de plus en plus considérables eux aussi, au point de pouvoir dépasser tout nombre donné. Pour un nombre infini d'épreuves, l'écart absolu atteindrait lui-même une valeur infinie d'un infini d'ordre inférieur, mais irréductible à toute mesure, à tout chiffre fini.

On voit donc que cette valeur du calcul des probabilités, ainsi limitée dans tous les sens d'aussi stricte façon, peut être considérée comme à peu près négligeable.

Chapitre IV. — *Les applications scientifiques du calcul des probabilités.*

La probabilité des causes. — Les applications en Psychologie; exemples. — Calcul de probabilité et télépathie; exemples. — Applications dans les Sciences Physiques ; exemples.— Les applications en Anthropologie ; exemples. — Les applications en médecine. — Les applications dans les sciences sociales. — Les applications réelles sont beaucoup plus rares qu'on ne pourrait le croire.

On a fait des applications scientifiques du calcul des probabilités. Nous allons tâcher de donner une idée des principales, très rapidement, et tout d'abord la probabilité des causes.

On trouverait dans Bertrand de nombreuses applications de ce genre, émanant en général de probabilistes qui s'en servaient comme d'illustrations de leurs théories et proposaient des problèmes pour familiariser avec les formules. Mais ce ne sont pas des applications méthodiques.

C'est surtout en psychologie, à notre connaissance, que ces applications ont prétendu se faire.

On a même affirmé la nécessité de se servir du calcul dans

cette science. Laplace disait déjà que c'était dans les sciences les plus complexes, où l'investigation est le plus difficile, que l'application du calcul était le plus nécessaire.

« On ne peut pas faire un pas dans la psychologie expérimentale, dit M. V. Henry, sans avoir recours aux principes du calcul des probabilités » (¹).

Et l'auteur, après avoir exposé les principes généraux du calcul ainsi que le théorème de Bernoulli, en s'inspirant de très près de Bertrand (cela est tellement apparent que M. V. Henry n'a même pas cru utile de le citer) donne les formules de probabilité d'un écart, mettant en première ligne l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}}\, e^{-\frac{h^2}{2mpq}}$$

dont nous contestons l'exactitude pratique.

Puis il donne quelques exemples dans lesquels il fait le calcul par la formule $1 - \Theta\,(t)$.

En particulier, en présentant à un sujet des lettres (voyelles) qu'il ne voit pas consciemment, sur 120 expériences pour chaque série, on cherche combien de fois le sujet, qui doit dire une lettre au hasard, tombe juste suivant que les lettres ont une grandeur plus ou moins élevée. On cherche le nombre probable de coïncidences, et la probabilité de l'écart $\Theta\,(t)$; on a par l'inverse de la probabilité de l'écart, la probabilité d'une cause.

L'écart maximum obtenu est de 43 (nombre probable : 20 nombre réel : 63). Or pour un écart de 17, la probabilité de l'écart n'est déjà que de 3 p. 100 000.

Mais avant qu'on ait ainsi revendiqué dans la méthode une place à de tels calculs, des applications avaient été déjà faites. C'est par un procédé de ce genre que M. Richet a prétendu prouver la réalité de la suggestion mentale. Il faisait deviner au sujet, qui devait parler au hasard, le nom d'une carte connue par une personne. Il comparait le nombre de coïncidences réelles au nombre de coïncidences probables. Et alors prenant la différence,

(¹) V. Henry. Le Calcul des Probabilités en Psychologie. *Année Psychologique* 2ᵉ année (1895), 1896, p. 466.

l'écart, et le rapportant au nombre des sorties probables, M. Richet l'érigeait en probabilité d'une cause qu'il déclarait être la suggestion.

Voici un cas par exemple :

Sur 840 tirages, le sujet tombe 250 fois sur la couleur de la carte. Le nombre de sorties probables était de 203, dit M. Richet. La probabilité était de $\frac{13}{52}$, contre $\frac{39}{52}$, c'est-à-dire de $\frac{1}{4}$ (Ce nombre de sorties probables aurait donc dû être de 210). J'ai un écart, dit M. Richet, de 52, 52 est le quart de 208, donc la probabilité pour l'existence de la suggestion est de $\frac{1}{4}$.

L'application du calcul des probabilités, est ici tout à fait mauvaise. Il fallait faire appel à la formule de la probabilité de l'écart $1 - \Theta(t)$.

Faisons appel à cette formule.

On a

$$t = \frac{h}{\sqrt{2\pi mpq}}, \quad pq = 0{,}19.$$

$$\sqrt{2\pi \times 840 \times 0{,}19} = 32\,;$$

50 est l'écart exact (840 — 810)

$$\frac{56}{32} = 1{,}56,$$

$$\Theta\,(1{,}56) = 0{,}9726.$$

La probabilité de la cause n'est plus d'un quart, mais de 97 p. 100.

On voit que l'application de la formule, n'est pas négligeable. Elle serait ici tout à fait favorable au calcul de M. Richet.

Il y a des cas où il n'en serait pas ainsi.

Il y aurait lieu en particulier d'appliquer ces formules exactes, au calcul des probabilités à toutes ces études et enquêtes que l'on fait à l'heure actuelle sur les phénomènes anormaux, hallucinations télépathiques et autres et qui jouent constamment du calcul des probabilités (1).

---

(1) Cf in *Procedings of Society for Psychical Research*, t. VI, 1889.
Ch. Richet. *Further experiments in hypnotic lucidity or clairvoyance*, p. 16-67, 72-75, 82.

D'après l'enquête de la Société des recherches psychiques de Londres, on arrive pour la question des hallucinations à des résultats tels que ceux triomphalement exposés par M. Flammarion [1] par l'intermédiaire de M. Dariex :

On n'a relevé qu'une hallucination visuelle sur 248 personnes. Soit pour la probabilité d'un tel cas : $\frac{1}{248}$.

La probabilité de mort pour un adulte d'âge indéterminé dans une période de 24 heures est de

$$\frac{22}{1000}\,\frac{1}{365}$$

$$\frac{1}{248}\,\frac{22}{1000}\,\frac{1}{365} = \frac{1}{4.114.545}.$$

Et l'on conclut que l'hypothèse d'une action télépathique réelle est 4 114 545 fois plus probable que l'hypothèse d'une coïncidence fortuite. Voilà une interprétation de résultats qui ne se soucie guère des règles les plus élémentaires du calcul des probabilités.

Mais voici qui est mieux encore.

M. Flammarion extrait des *Phantasms of the Living* un cas précis et qu'il décrit longuement, puis il applique le calcul des probabilités.

Il n'y a pas eu un intervalle de plus de 12 minutes entre l'hallucination et la mort, période contenue 120 fois dans 24 heures soit $\frac{1}{120}$.

Il s'agissait d'un homme de 48 ans.

La probabilité officielle de la mort est alors de

$$\frac{13,5}{1000}.$$

L'on a donc

$$x = \frac{1}{248}\,\frac{13,5}{1000}\,\frac{1}{365}\,\frac{1}{120} = \frac{1}{804.622.222}$$

H. Sidgwick. *Experiments in thought transference*, p. 128.

Myeas. *Das Doppel-ich*, p. 109, 110.

L. Taylor. *Experimental Comparison bethween chance in Correspondance of diagrams*, p. 398, 401, 405, t. III, 1885, p. 190, 200 ; t. IV, 1886-1887, p. 189, 208.

Ed. Gewait. *The Calculus of Probabilitie applied to psychical Research.*

Raphael Chandos. *Revue des Deux Mondes*, 1887, p. 211.

[1]) C. Flammarion. *L'Inconnu et les Problèmes Psychiques*. Ch. IV, note p. 239-241.

et la probabilité pour l'existence de l'action télépathique devient de 804 622 222. On ne pourra pas dire que notre remarque, que nous avons souvent répétée était inutile, à savoir que le calcul des probabilités n'était applicable qu'aux grands nombres ; qu'il réclame des grands nombres d'épreuves, et ne se contente pas de ceux dont on surcharge ses conclusions. Or ici, il y a une épreuve et une seule. Supposons un milliard de boules différentes dans une urne. Nous en tirons une particulière. La probabilité pour que nous tirions cette boule par hasard était $\frac{1}{1\,000\,000\,000}$. Nous allons conclure qu'il y a un milliard à parier contre un pour l'existence d'une cause à laquelle nous attribuerons tel nom plus ou moins surnaturel que nous voudrons, cause qui a produit le tirage de cette boule. Notre raisonnement vaudra celui de M. Flammarion, et nous pourrons monter plus loin dans les zéros accumulés.

Vraiment il est permis de s'amuser, mais il faut être bien naïf pour prendre pareilles choses au sérieux.

Laissons donc tous les calculs du même genre, et revenons aux applications plus sérieuses.

C'est la probabilité des erreurs qui est le plus souvent employée dans les diverses sciences.

L'astronomie sur laquelle, faute de compétence, nous ne nous permettrons pas d'insister, fait constamment appel à la théorie des erreurs et des poids pour caractériser les observations. Cette science d'observation, si proche des mathématiques pures, devait être tentée de mathématiser en quelque sorte l'observation elle-même, de déchiffrer les phénomènes subjectifs perturbateurs. A côté de la mesure excellente de l'équation personnelle, elle a encore fait appel à la probabilité des erreurs variables, qui ne peuvent être soumises à une formule d'observation, étant inconstantes par nature. On ne manque jamais, en rapportant des observations faites, de donner leur précision et leur poids.

Il n'y a guère d'application de ce genre dans les sciences physico-chimiques.

Cependant il ne faudrait pas croire qu'elles en sont véritablement exclues. Pour les parties les moins précises de ces sciences,

on fait parfois appel aux probabilités, et Terquem et Damien [1] dans leur traité de Physique expérimentale consacrent une partie de leur introduction concernant la méthode à la théorie de la probabilité des erreurs.

Se fondant sur la théorie, telle qu'ils l'ont exposée, M. Paillot [2], élève de M. Damien, dans une thèse récente de l'Université de Lille, en recherchant les forces électromotrices d'aimantation, appelé à mesurer le diamètre des bobines employées, a tenu compte des erreurs relatives à la moyenne, en prenant les carrés des différences.

Il obtenait ainsi la somme de ces carrés $\sum e^2$ et il en tirait l'erreur probable du résultat par la formule

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\Sigma e^2}{m(m-1)}}.$$

Cette erreur s'est toujours trouvée chez lui de l'ordre des dix millièmes.

Ce qui prouvait qu'on ne pouvait, dans ses évaluations, pousser l'approximation au delà du quatrième ordre des unités décimales.

Le calcul des probabilités n'a été employé chez cet auteur que pour cette évaluation du diamètre des bobines ; il s'en est dispensé dans beaucoup d'autres et, en effet, on peut dire que dans les sciences physiques, le calcul des probabilités est l'exception.

En revanche, pour des sciences de mesures plus complexes, telle que l'anthropologie, nous retrouvons ces applications plus nombreuses [3].

---

(1) TERQUEM et DAMIEN. *Physique expérimentale*, in-8, 1888, Introduction, ch. II, p. 66-105.

(2) PAILLOT. *Recherches sur les forces électromotrices d'aimantation*, in-8, 1901. Lille, p. 23-72.

(3) De nombreuses applications ont été faites dans les sciences naturelles, rares parce que la mesure elle-même y est rare. Des courbes théoriques ont été faites, par exemple pour les variations des types en botanique afin de les comparer aux courbes réelles, exactement comme en anthropologie pour les variations des types considérés comme tels.

Cf. AMANN. Application du calcul des probabilités à l'étude de la variation d'un type végétal. *Bull. herb. Boissier*. 1896, Ch. IV, p. 577-590.

C'est Quételet qui, le premier, a tenté des applications effectives de la théorie des erreurs aux mensurations anthropologiques. Il extrait par exemple du treizième volume de l'*Edinburgh medical journal* les résultats de la mensuration des circonférences des poitrines de 5 738 soldats écossais. Le calcul de l'erreur probable permit à Quetelet de conclure qu'il pouvait parier un contre un qu'une personne peu exercée se tromperait de 33 millimètres (1 pouce) en mesurant une poitrine de plus de 1 mètre (40 pouces) de circonférence. Et alors 5 738 mesures prises sur une seule personne se grouperaient avec la même régularité que les 5 738 mesures prises sur les soldats écossais. Quételet passe de l'écart réel à l'erreur probable. Nous reviendrons sur ce point. Herschell [1], en faisant les mêmes calculs, ne trouva pas les mêmes résultats.

On sait que c'est Quételet [2] qui mit en honneur la conception de l'*homme moyen*, un peu ridiculisée, depuis lors. Il se livra en effet à la statistique et aux moyennes avec ardeur, voulant que pas un domaine social n'échappât à la mesure avec comme criterium la théorie des probabilités.

Il fut en effet tout à fait enthousiasmé par ce calcul qu'il déclarait déjà très insuffisamment appliqué. « Le calcul des probabilités, dit-il, n'est que l'instrument qui doit servir à régulariser les travaux d'exploitation ; mais il devient indispensable dans les recherches auxquelles nous voulons nous livrer. Il sert en effet à distribuer avec avantage la série de nos observations, à continuer la valeur des documents dont nous faisons usage, à les continuer ensuite de manière qu'ils s'écartent le moins possible de la vérité, et à calculer, en définitive, le degré de confiance qu'on peut attacher aux résultats obtenus [3]. »

Depuis, des applications nouvelles se sont faites, avec un oubli fréquent des essais de Quételet.

Ed. Goldstein a publié en 1883 une étude sur les applications du calcul des probabilités à l'anthropologie [4], ne faisant guère

---

(1) Herschell. Sur la théorie des probabilités et ses applications aux sciences physiques et sociales. *Revue d'Edimbourg*, 2 juillet 1890.

(2) Quételet. *Physique sociale*, in-8, 1869. T. I.

(3) Quételet, *id.*, p. 137.

(4) Édouard Goldstein. *Revue d'Anthropologie*. 2e série, XI, 1883, p. 704-718.

que résumer un travail allemand de Stieda [1]. Il s'occupe surtout de la sériation dans les moyennes qui lui paraît nécessaire, car on fait parfois des moyennes avec des éléments hétérogènes. Mais comment mesurer cette hétérogénéité. Il fait appel à la théorie des erreurs qu'il expose d'abord en général, donnant les formules de mesure de l'erreur probable.

La somme des erreurs résiduelles $\sum \delta$ est la somme des écarts d par rapport à la moyenne, les écarts représentant pour lui les erreurs, la variation moyenne. Il donne le tableau très complet de Wuich. Il définit le poids, la précision, etc., et applique comme exemple seulement, ces formules à des mesures anthropologiques comparatives sur des juifs autrichiens. Il indique que, pour les moyennes, il y aurait lieu de comparer deux courbes ainsi définies.

On fait une courbe du nombre de fois que chaque mesure a été rencontrée, à partir de la plus faible.

Puis, la moyenne étant déterminée, on cherche combien de fois, sur un nombre égal d'épreuves, chaque mesure devait arriver d'après le calcul des probabilités fondé sur l'erreur probable : la probabilité est relative, d'après le tableau de Wuich, au multiple de l'erreur probable, qui est ici l'écart par rapport à la moyenne, soit une valeur égale à deux fois l'erreur probable, qui s'écarte de la moyenne du double de l'écart probable, je trouve comme probabilité de cet écart 82,3 p. 100 ; donc sur 100 cas, il ne devra y en avoir que 17,7 qui atteindront ou dépasseront cet écart. Je détermine un point de la courbe probable. Je chercherai le point de la courbe réelle, qui pourra être de 20 par exemple, et je comparerai les deux courbes.

Quand les deux courbes diffèrent beaucoup, je dois dire que d'autres éléments que des erreurs sont venus troubler mes moyennes, et par conséquent que mes éléments mesurés ont des différences réelles qui ne permettent pas de les comparer, qu'il faut donc les ranger dans des séries, dans des moyennes différentes. Je mets en lumière l'hétérogénéité de ma moyenne, et je n'ai

---

(1) Dr Ludwig Stieda. Ueber die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der anthropologischen Statistik. *Archiv für Anthropologie*, 1888, I. 14.

plus qu'à la diviser en séries homogènes, représentant des types anthropologiques : il ne doit pas y avoir entre des types de cette espèce des écarts dépassant notablement l'indice probable d'oscillation, l'erreur probable.

Une application pratique du calcul des probabilités a été faite tout récemment par M. Binet en anthropologie ([1]).

Ayant pris des mensurations craniennes dans deux groupes d'enfants, l'un d'intelligents, l'autre d'inintelligents, il fit les moyennes, et trouva des différences entre ces moyennes considérées *a priori* comme homogènes (M. Binet n'a pas fait la courbe de Stieda et Goldstein).

En particulier, il applique la formule de probabilité d'un écart de moyennes aux moyennes du diamètre frontal :

« Etant donné, dit-il, la différence d'une mesure que présentent deux groupes de sujets, il est possible de savoir si cette différence moyenne résulte des écarts opératoires de mensuration ou résulte des dimensions réelles qui ont été mesurées.

On voit que la question est d'une importance capitale. La formule à employer est la suivante :

$$T = \frac{n_1 \sqrt{n.d.v}}{n v_1^2 + n_1 v^2}. »$$

Appliquée au diamètre frontal, cette mesure lui donne à ce qu'il rapporte, une probabilité de 80 p. 100 pour que la différence provienne d'autre chose que des erreurs opératoires, 20 p. 100 pour qu'elle soit due à ces simples erreurs opératoires.

Pour le détail de la formule, M. Binet renvoyait à un second article de V. Henry ([2]) qui traitait cette fois de la théorie des moyennes et des erreurs, et qui s'attachait surtout à la probabilité de l'écart entre deux moyennes, plutôt qu'à l'écart interne, pourrait-on dire, relatif à la moyenne. C'est en effet un problème qui s'ajoute à celui de Stieda : Quand on a constitué des moyennes homogènes d'où l'on a exclu toute hétérogénéité trop forte,

---

([1]) Binet. Mensuration de la tête vivante. *An. Psych.* 7e Ann. 1901, p. 359, 360.

([2]) V. Henry. Quelques applications du Calcul des Probabilités en Psychologie. *An. Psych.* 2e année (1898), 1899, p. 153-160.

comment reconnaître maintenant le degré d'hétérogénéité de deux moyennes prises dans leur ensemble et qu'on considère par avance comme hétérogènes ; le sont-elles vraiment au point de constituer deux moyennes distinctes, et de ne pouvoir se fondre en une seule, de représenter enfin deux types différents. Tout d'abord il fallait amener l'unité interne dans les types. Maintenant il faut juger de la dualité externe de ces types.

La première application servait à déceler une hétérogénéité dans la moyenne ; la deuxième sert à déceler une homogénéité de deux moyennes.

C'est dans les temps de réaction surtout que se présente cette question en psychologie : on élimine arbitrairement et sans appel en général au calcul des probabilités, toute mesure qui s'écarte isolément par trop de la moyenne, sans qu'il y ait de règle de cette élimination, autre qu'une appréciation subjective, et le type étant ainsi constitué dans une moyenne, on veut le comparer à une autre moyenne, soit d'un autre sujet, soit d'un autre état du même sujet. A quel moment la différence entre ces moyennes sera-t-elle significative de la spécificité de ces types, de la réalité des différences objectives ? C'est à cela que doit répondre la série des probabilités des erreurs dans les moyennes.

E.-W. Scripture (1) a consacré un article au même sujet, faisant, lui aussi, la théorie des applications du calcul, mais non des applications proprement pratiques. Et c'est surtout aux temps de réaction qu'il songe, ce faisant.

On voit que les applications réelles sont beaucoup plus rares qu'on ne pourrait le croire, étant donnée la vogue du calcul des probabilités qu'on cite à tout propos, et auquel on fait constamment appel théoriquement. Cette abstention de la pratique est-elle ignorance, est-elle défiance du bon sens vis-à-vis du prestige des chiffres ?

Il est bien certain pourtant que l'on applique couramment, sinon le détail, du moins le principe du calcul des probabilités, dans la vie ordinaire, mais c'est une pratique empirique, et nous

(1) E.-W. Scripture. Computation of a set of simple direct measurement. *Studies from the Yale psychological Laboratory*, vol. VIII, 1900, in-8°. New Haven.

traitons des applications scientifiques du calcul des probabilités. Aussi ne nous sommes-nous pas arrêtés aux applications qu'en font souvent les médecins dans le traitement de certaines maladies, car ils ne recourent à cela que par une ignorance plus ou moins avouée, réalisant pour la vie humaine ce que Laplace rêvait pour la sécurité civique en proposant de juger par probabilités. Eux soignent par les mêmes principes, et les discussions sur l'intervention chirurgicale dans l'appendicite par exemple, roulent le plus souvent sur des probabilités extraites de quelques cas, quand ce n'est pas d'un cas.

Et cette application médicale n'est pas récente. Avant la découverte de la vaccine, on multiplia les considérations probabilistes sur les dangers et les avantages de l'inoculation, toujours en considérant des hommes « moyens » comme Bertrand le relève ironiquement, des hommes-types, des hommes en soi; D'Alembert (1) en a fait aussi la remarque très judicieuse.

Enfin les compagnies d'assurances tiennent un grand compte des probabilités fournies par les statistiques ; elles opèrent d'ailleurs sur des grands nombres et vivent de la constance assez régulière de la nature, que les probabilités attribuent à la puissance « Hasard » alors que, dans la monotonie universelle, il est plus simple d'admettre que les mêmes causes produisent toujours les mêmes effets. Aussi les résultats assez heureux des compagnies d'assurance ne peuvent guère se reporter sur le calcul des probabilités, d'autant qu'on ne fait appel qu'aux probabilités simples et non aux formules compliquées du calcul.

(*A suivre.*)

N. Vaschide (Paris). H. Piéron (Paris).

(1) D'Alembert, *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie*. 4e éd. Amsterdam, 1770, in-12. — *Réflexions philosophiques et mathématiques sur l'application du Calcul des probabilités à l'inoculation*, p. 305-386.

ÉQUIVALENCE DU MOUVEMENT

D'UN PLAN INVARIABLE Σ PASSANT D'UNE POSITION DONNÉE Σ_1 A UNE AUTRE POSITION DONNÉE Σ_2.

I. — *Relations générales entre les déplacements des points d'un système invariable arbitraire.*

§ 1. — Les déplacements de trois ou d'un plus grand nombre de points d'une ligne droite σ qui, d'une manière quelconque, passe d'une position σ_1 à une position σ_2 ne sont pas indépendants; nous allons montrer qu'il y a une relation entre eux. Il existe entre les déplacements des points d'un système Σ à trois dimensions quand il est transporté d'une manière quelconque d'une position Σ_1 à une autre position quelconque Σ_2, des relations semblables valables de manière générale et que nous développerons d'abord.

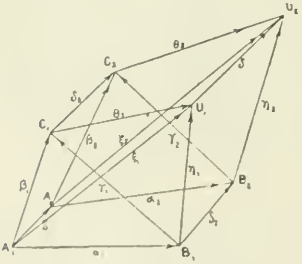


Fig. 1.

Soient A, B, C et U quatre points d'un système invariable de l'espace formant les sommets d'une pyramide arbitraire, de sorte que A, B, C, U; A_1, B_1, C_1, U_1 et A_2, B_2, C_2, U_2 sont les pyramides congruentes homologues de Σ, Σ_1 et Σ_2.

Nous posons (fig. 1).

$$\overline{A_1B_1} = \alpha_1,\ \overline{A_1C_1} = \beta_1,\ \overline{B_1C_1} = \gamma_1,\ \overline{A_1U_1} = \xi_1,\ \overline{B_1U_1} = \eta_1,\ \overline{C_1U_1} = \theta_1,$$
$$\overline{A_2B_2} = \alpha_2,\ \overline{A_2C_2} = \beta_2,\ \overline{B_2C_2} = \gamma_2,\ \overline{A_2U_2} = \xi_2,\ \overline{B_2U_2} = \eta_2,\ \overline{C_2U_2} = \theta_2,$$
$$\overline{A_1A_2} = \delta_1,\ \overline{B_1B_2} = \delta_2,\ \overline{C_1C_2} = \delta_3,\ \overline{U_1U_2} = \delta.$$

Comme Σ_1 et Σ_2 sont des systèmes congruents, le produit inté-

rieur de deux vecteurs de Σ_1 est égal au produit intérieur des vecteurs homologues de Σ_2.

Donc, on peut écrire

$$\alpha_1 | \beta_1 = \alpha_2 | \beta_2 ;$$

mais nous avons

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \delta_\alpha = \alpha_1 + \delta_2 - \delta_1,$$
$$\beta_2 = \beta_1 + \delta_\beta = \beta_1 + \delta_3 - \delta_1.$$

et aussi avec cela

$$\alpha_1 | (\beta_2 - \delta_\beta) = (\alpha_1 + \delta_\alpha) | \beta_2,$$

c'est-à-dire

$$\alpha_1 | \delta_\beta + \beta_2 | \delta_\alpha = 0,$$

ou

$$\alpha_1 | (\delta_3 - \delta_1) + \beta_2 | (\delta_2 - \delta_1) = 0,$$

ou enfin

$$\alpha_1 | \delta_3 + \beta_2 | \delta_2 = (\alpha_1 + \beta_2) | \delta_1.$$

De même nous trouvons

$$\alpha_2 | \delta_\beta + \beta_1 | \delta_\alpha = 0,$$
$$\alpha_2 | \delta_3 + \beta_1 | \delta_2 = (\alpha_2 + \beta_1) | \delta_1$$

De plus on a la relation

$$\xi_1 | \gamma_1 = \xi_2 | \gamma_2 ;$$

mais nous avons

$$\gamma_1 = \gamma_2 - \delta_\gamma = \gamma_2 - \delta_3 + \delta_2, \qquad \xi_2 = \xi_1 + \delta_\xi = \xi_1 + \delta - \delta_1$$

de sorte que

$$\xi_1 | (\gamma_2 - \delta_\gamma) = (\xi_1 + \delta_\xi) | \gamma_2.$$

c'est-à-dire

$$\xi_1 | \delta_\gamma + \gamma_2 | \delta_\xi = 0,$$

ou

$$\xi_1 | (\delta_3 - \delta_2) + \gamma_2 | (\delta - \delta_1) = 0$$

ou enfin

$$\xi_1 | \delta_3 + \gamma_2 | \delta = \xi_1 | \delta_2 + \gamma_2 | \delta_1.$$

De manière semblable s'obtiennent les relations

$$\gamma_1 \mid \delta_\xi + \xi_2 \mid \delta_\gamma = 0,$$
$$\gamma_1 \mid \delta + \xi_2 \mid \delta_3 = \gamma_1 \mid \delta_1 + \xi_2 \mid \delta_2 ;$$
$$\beta_1 \mid \delta_\xi + \xi_2 \mid \delta_\beta = 0,$$
$$\beta_1 \mid \delta + \xi_2 \mid \delta_3 = \beta_1 \mid \delta_2 + \xi_2 \mid \delta_1 ;$$
$$\alpha_1 \mid \delta_\theta + \theta_2 \mid \delta_\alpha = 0,$$
$$\alpha_1 \mid \delta + \theta_2 \mid \delta_2 = \alpha_1 \mid \delta_3 + \theta_2 \mid \delta_1 .$$

En outre, pour les vecteurs du système on a les relations

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \mid \delta_\alpha = 0, \qquad (\beta_1 + \beta_2) \mid \delta_\beta = 0, \dots$$

et aussi par suite

$$(2\alpha_1 + \delta_\alpha) \mid \delta_\alpha = 0, \qquad (2\beta_1 + \delta_\beta) \mid \delta_\beta = 0, \dots$$

ou

$$2\alpha_1 \mid \delta_\alpha + \delta_\alpha^2 = 0, \qquad 2\beta_1 \mid \delta_\beta + \delta_\beta^2 = 0, \dots$$

Multiplions la première de ces équations par δ_β^2, la seconde par δ_α^2, il vient

$$2\,(\alpha_1 \mid \delta_\alpha)\,\delta_\beta^2 + \delta_\alpha^2 \delta_\beta^2 = 0, \qquad 2\,(\beta_1 \mid \delta_\beta)\,\delta_\alpha^2 + \delta_\alpha^2 \delta_\beta^2 = 0,$$

et en combinant ces relations par addition et soustraction, on obtient les importantes relations

$$(\alpha_1 \mid \delta_\alpha)\,\delta_\beta^2 + (\beta_1 \mid \delta_\beta)\,\delta_\alpha^2 + \delta_\alpha^2 \delta_\beta^2 = 0,$$
$$(\alpha_1 \mid \delta_\alpha)\,\delta_\beta^2 - (\beta_1 \mid \delta_\beta)\,\delta_\alpha^2 = 0.$$

On voit d'après cela que les déplacements de quatre points quelconques et plus du système Σ dépendent l'un de l'autre.

§ 1'. — Si les déplacements des points A, B, C et U du système Σ sont infiniment petits, il résulte des formules du § 1, si nous négligeons les grandeurs infiniment petites d'ordre supérieur devant celles d'ordre moindre,

$$\alpha_1 \mid d\beta + \beta_1 \mid d\alpha = 0,$$
$$\alpha_1 \mid d\rho_3 + \beta_1 d\rho_2 = (\alpha_1 + \beta_1) \mid d\rho_1, \qquad \alpha_1 \mid \overline{r_3} + \beta_1 \mid \overline{r_2} = (\alpha_1 + \beta_1) \mid \overline{r_1} ;$$
$$\xi_1 \mid d\gamma + \gamma_1 \mid \delta\xi = 0,$$
$$\xi_1 \mid d\rho_3 + \gamma_1 \mid d\rho = \xi_1 \mid d\rho_2 + \gamma_1 \mid d\rho_1, \qquad \xi_1 \mid \overline{v_3} + \gamma_1 \mid \overline{v} = \xi_1 \mid \overline{v_2} + \gamma_1 \mid \overline{v_1} ;$$
$$\beta_1 \mid d\rho + \gamma_1 \mid d\rho_3 = \beta_1 \mid d\rho_2 + \gamma_1 \mid d\rho_1, \qquad \beta_1 \mid \overline{v} + \overline{\gamma_1} \mid \overline{v_3} = \beta_1 \mid \overline{v_2} + \gamma_1 \mid \overline{v_1} ;$$
$$\alpha_1 \mid d\rho + \theta_1 \mid d\rho_2 = \alpha_1 \mid d\rho_3 + \theta_1 \mid d\rho_1, \qquad \alpha_1 \mid \overline{v} + \theta_1 \mid \overline{v_2} = \alpha_1 \mid \overline{v_3} + \theta_1 \mid \overline{v_1} .$$

Les relations ainsi développées, qui peuvent facilement se traduire en langage ordinaire, sont évidemment encore valables, si les quatre points sont situés dans un plan.

II. — *Le plan ou champ des points.*

§ 2. — Soient $A_1 = O + \rho_1$, $B_1 = O + \rho_2$, $C_1 = O + \rho_3$, trois points situés non en ligne droite dans le même plan et soit $U_1 = O + \rho$ un point arbitraire du même plan. Avec le point O comme pôle de coordonnées, l'équation du radius vector de ce plan est

$$\rho = m\rho_1 + n\rho_2 + p\rho_3, \qquad m + n + p = 1,$$

ou aussi

$$\rho = \rho_1 + n(\rho_2 - \rho_1) + p(\rho_3 - \rho_1).$$

et si nous posons

$$(\rho_2 - \rho_1) = \alpha_1, \qquad (\rho_3 - \rho_1) = \beta_1.$$

cette équation devient

$$\rho = \rho_1 + n\alpha_1 + p\beta_1.$$

Soit maintenant d'une manière quelconque le plan Σ transporté de la position Σ_1, pour laquelle nous avons écrit l'équation, à la position Σ_2.

Si le plan Σ est transporté de la position Σ_1 à la position Σ_2 ses points A, B, C et U subissent les déplacements $\overline{A_1A_2} = \delta_1$, $\overline{B_1B_2} = \delta_2$, $\overline{C_1C_2} = \delta_3$ et $\overline{U_1U_2} = \delta$, de sorte que avec $U_2 = O + \psi$ pour le plan Σ_2 il vient la relation

$$\begin{aligned}\psi = \rho + \delta &= m(\rho_1 + \delta_1) + n(\rho_2 + \delta_2) + p(\rho_3 + \delta_3)\\ &= m\rho_1 + n\rho_2 + p\rho_3 + m\delta_1 + n\delta_2 + p\delta_3,\end{aligned}$$

ou, avec $m + n + p = 1$,

$$\psi = \rho_1 + \delta_1 + n\left\{(\rho_2 - \rho_1) + (\delta_2 - \delta_1)\right\} + p\left\{(\rho_3 - \rho_1) + (\delta_3 - \delta_1)\right\}.$$

ou

$$\psi = \rho_1 + n\alpha_1 + p\beta_1 + \delta_1 + n(\delta_2 - \delta_1) + p(\delta_3 - \delta_1).$$

ou

$$\psi = \rho_1 + \delta_1 + n(\alpha_1 + \delta_\alpha) + p(\beta_1 + \delta_\beta),$$

et enfin

$$\psi = \rho_1 + \delta_1 + n\alpha_2 + p\beta_2,$$

avec $(\alpha_1 + \delta_\alpha) = \alpha_2$, $(\beta_1 + \delta_\beta) = \beta_2$, où les vecteurs $\alpha_2 = \overline{A_2B_2}$ et $\beta_2 = \overline{A_2C_2}$ sont situés dans le plan Σ_2 et où l'équation en ψ est l'équation du plan Σ_2 en plus simple forme.

Le déplacement $\delta = (\psi - \rho) = (U_2 - U_1)$ du point arbitraire U du plan Σ est alors

$$\delta = m\delta_1 + n\delta_2 + p\delta_3, \qquad m + n + p = 1,$$
$$\delta = \delta_1 + n(\delta_2 - \delta_1) + p(\delta_3 - \delta_1),$$
$$\delta = \delta_1 + n(\alpha_2 - \alpha_1) + p(\beta_2 - \beta_1),$$
$$\delta = \delta_1 + n\delta_\alpha + p\delta_\beta.$$

Prenons m, n et p comme variables, δ comme radius vector, ces équations donnent alors les déplacements totaux les points du plan Σ, quand celui-ci passe d'une manière quelconque de la position Σ_1 à la position Σ_2 et ces équations sont celles d'un plan dont les radii vectores, sont égaux aux déplacements des points du plan Σ.

« Le système des déplacements des points d'un plan, qui change sa position, a la propriété d'être déterminé pour tous les points de ce plan si les déplacements de trois points quelconques du même plan, mais non en ligne droite sont connus. » — « L'hodographe des déplacements des points d'un plan est un autre plan qui en général ne passe pas par le pôle de l'hodographe. Des figures correspondantes en Σ, Σ_1, Σ_2 et dans le plan de l'hodographe sont des figures semblables. »

Il suit de la dernière équation

$$[(\delta - \delta_1)(\delta_\alpha\delta_\beta)] = 0.$$

Si l'on désigne par ε le vecteur de position du plan donné, on a

$$\varepsilon = [|(\delta_\alpha\delta_\beta)] : \sqrt{(\delta_\alpha\delta_\beta)^2},$$

et on a aussi

$$(\delta - \delta_1)|\varepsilon = 0, \qquad (\delta|\varepsilon) = (\delta_1|\varepsilon).$$

« Le plan de l'hodographe est parallèle à la différence des

déplacements des extrémités de deux vecteurs hétérogènes quelconques du plan Σ. »

« Les projections des déplacements des points du plan Σ sur la direction du vecteur de position du plan de l'hodographe sont égaux entre eux; tous les points du plan Σ subissent, dans la direction du vecteur de position de ce plan, le même déplacement. »

§ 2'. — Si les déplacements des points du plan Σ sont infiniment petits, les équations des plans Σ_1 et Σ_2, si nous posons $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$, $\alpha_2 = \alpha_1 + d\alpha$, $\beta_2 = \beta_1 + d\beta$, deviennent

$$\rho = \rho_1 + n\alpha + p\beta,$$
$$\psi = \rho_1 + d\rho_1 + n(\alpha + d\alpha) + p(\beta + d\beta),$$

l'équation de l'hodographe du système des déplacements des éléments du plan Σ est donc

$$d\rho = (\psi - \rho) = d\rho_1 + nd\alpha + pd\beta,$$

laquelle, comme nous voyons, s'obtient aussi immédiatement par différenciation de l'équation du plan $\Sigma = \Sigma_1$.

D'après cela, il vient pour les vitesses des points du plan

$$\bar{v} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho_1}{dt} + n\frac{d\alpha}{dt} + p\frac{d\beta}{dt}$$

ou

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + n(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) + p(\bar{v}_3 - \bar{v}_1),$$
$$\bar{v} = (1 - n - p)\bar{v}_1 + n\bar{v}_2 + p\bar{v}_3.$$

Avec l'équation relative à $d\rho$ nous obtenons

$$[(d\rho - d\rho_1)(d\alpha d\beta)] = 0,$$

ce qui entraîne

$$(\bar{v} - \bar{v}_1)[(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)(\bar{v}_3 - \bar{v}_1)] = 0,$$

et si nous posons

$$(d\alpha d\beta) : \sqrt{(d\alpha d\beta)^2} = (\alpha'\beta') : \sqrt{(\alpha'\beta')^2} = |\,\varepsilon,$$

il s'ensuit

$$(d\rho - d\rho_1)\,|\,\varepsilon = 0, \qquad (d\rho\,|\,\varepsilon) = (d\rho_1\,|\,\varepsilon),$$
$$(\bar{v} - \bar{v}_1)\,\varepsilon\,| = 0, \qquad (\bar{v}\,|\,\varepsilon) = (\bar{v}_1\,|\,\varepsilon).$$

« L'hodographe des déplacements infiniment petits et l'hodographe des vitesses des points d'un plan Σ sont des plans parallèles qui en général ne passent pas par les pôles de ces hodographes. Les projections des déplacements, ainsi que les projections des vitesses des points du plan Σ sur la direction du vecteur de position des plans des hodographes sont égaux entre eux ».

§ 3. — Les déplacements des points du plan Σ forment, avec le plan Σ en ses positions Σ_1 et Σ_2, en général des angles différents, ce que l'hodographe montre immédiatement. Parmi les points du plan Σ il peut y en avoir de tels que leurs déplacements soient perpendiculaires au plan $\Sigma = \Sigma_1$ et de tels que leurs déplacements soient en ce plan.

Pour des déplacements δ_n perperdiculaires à Σ_1, nous avons la relation

$$\delta_n = \delta_1 + n\delta_\alpha + p\delta_\beta = x \mid (\alpha_1\beta_1) = y\varepsilon_n,$$
$$\varepsilon_n = [\mid (\alpha_1\beta_1)] : \sqrt{(\alpha_1\beta_1)^2}.$$

Avec cela on obtient

$$(\delta_1\delta_\alpha\delta_\beta) = x\,(\delta_\alpha\delta_\beta) \mid (\alpha_1\beta_1),$$

de sorte que

$$\delta_n = \frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{(\delta_\alpha\delta_\beta) \mid (\alpha_1\beta_1)} \mid (\alpha_1\beta_1).$$

De plus nous obtenons

$$(\varepsilon_n\delta_\beta\delta_1) + n\,(\varepsilon_n\delta_\beta\delta_\alpha) = 0, \qquad (\varepsilon_n\delta_\alpha\delta_1) + p\,(\varepsilon_n\delta_\alpha\delta_\beta) = 0.$$

ce qui donne

$$n = \frac{\delta_3\delta_1\varepsilon_n}{\delta_\alpha\delta_\beta\varepsilon_n}, \qquad p = \frac{\delta_1\delta_2\varepsilon_n}{\delta_\alpha\delta_\beta\varepsilon_n}.$$

et, par suite,

$$\delta_n = \delta_1 + \frac{\delta_3\delta_1\varepsilon_n}{\delta_\alpha\delta_\beta\varepsilon_n}\,\delta_\alpha + \frac{\delta_1\delta_2\varepsilon_n}{\delta_\alpha\delta_\beta\varepsilon_n}\,\delta_\beta,$$

de sorte qu'en général il n'y a qu'un seul déplacement de cette espèce, et pour le radius vector du point qui est déplacé par le vecteur δ_n nous obtenons

$$\rho_n = \rho_1 + \frac{\delta_3\delta_1\varepsilon_n}{\delta_\alpha\delta_\beta\varepsilon_n}\,\alpha_1 + \frac{\delta_1\delta_2\varepsilon_n}{\delta_\alpha\delta_\beta\varepsilon_n}\,\beta_1.$$

Si nous observons que $\delta_\alpha = (\delta_2 - \delta_1)$, $\delta_\beta = (\delta_3 - \delta_1)$, $\alpha_1 = (\rho_2 - \rho_1)$, $\beta_1 = (\rho_3 - \rho_1)$ nous trouvons facilement

$$\delta_n = \frac{1}{\delta_\alpha \delta_\beta \varepsilon_n} \left\{ (\delta_2 \delta_3 \varepsilon_n)\, \delta_1 + (\delta_3 \delta_1 \varepsilon_n)\, \delta_2 + (\delta_1 \delta_2 \varepsilon_n)\, \delta_3 \right\}.$$

$$\rho_n = \frac{1}{\delta_\alpha \delta_\beta \varepsilon_n} \left\{ (\delta_2 \delta_3 \varepsilon_n)\, \rho_1 + (\delta_3 \delta_1 \varepsilon_n)\, \rho_2 + (\delta_1 \delta_2 \varepsilon_n)\, \rho_3 \right\}.$$

Le point du plan $\Sigma = \Sigma_1$ qui est déplacé, autour du vecteur δ_n, est son pôle.

§ 3'. — Si les déplacements des points du plan Σ sont infiniment petits il existe en général un point dont le déplacement $d\rho_n$ lui est perpendiculaire. D'après le paragraphe précédent, nous obtenons successivement pour ce déplacement, pour le radius vector du point du plan correspondant et pour la vitesse de ce point

$$d\rho_n = \frac{d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3}{(d\alpha d\beta) \mid (\alpha\beta)} \mid (\alpha\beta),$$

$$d\rho_n = \frac{1}{d\alpha d\beta \varepsilon_n} \left\{ (d\rho_2 d\rho_3 \varepsilon_n)\, d\rho_1 + (d\rho_3 d\rho_1 \varepsilon_n)\, d\rho_2 + (d\rho_1 d\rho_2 \varepsilon_n)\, d\rho_3 \right\}.$$

$$\varepsilon_n = \mid (\alpha\beta) : \sqrt{(\alpha\beta)^2},$$

$$\rho_n = \frac{1}{d\alpha d\beta \varepsilon_n} \left\{ (d\rho_2 d\rho_3 \varepsilon_n)\, \rho_1 + (d\rho_3 d\rho_1 \varepsilon_n)\, \rho_2 + (d\rho_1 d\rho_2 \varepsilon_n)\, \rho_3 \right\};$$

et en outre

$$\bar{v}_n = \frac{\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3}{(\alpha'\beta') \mid (\alpha\beta)} \mid (\alpha\beta),$$

$$\bar{v}_n = \frac{1}{\alpha'\beta'\varepsilon_n} \left\{ (\bar{v}_2 \bar{v}_3 \varepsilon_n)\, \bar{v}_1 + (\overline{v_3 v_1} \varepsilon_n)\, \bar{v}_2 + (\overline{v_1 v_2} \varepsilon_n)\, v_3 \right\},$$

$$\rho_n = \frac{1}{\alpha'\beta'\varepsilon_n} \left\{ (\overline{v_2 v_3} \varepsilon_n)\, \rho_1 + (\overline{v_3 v_1} \varepsilon_n)\, \rho_2 + (\overline{v_1 v_2} \varepsilon_n)\, \rho_3 \right\}.$$

§ 4. — Examinons maintenant si le plan Σ possède des points dont les déplacements sont dans le plan $\Sigma = \Sigma_1$.

Si nous désignons ces déplacements par δ_c, nous avons pour ceux-ci la relation

$$\delta_c = \delta_1 + u\delta_\alpha + p\delta_\beta = u_1\alpha_1 + u_2\beta_1.$$

Les coefficients doivent satisfaire aux conditions

$$(\delta_1\delta_\alpha\delta_\beta) = u_1\,(\alpha_1\delta_\alpha\delta_\beta) + u_2\,(\beta_1\delta_\alpha\delta_\beta),$$

$$u_2 = \frac{1}{\beta_1\delta_\alpha\delta_\beta}\left\{(\delta_1\delta_2\delta_3) - u_1\,(\alpha_1\delta_\alpha\delta_\beta)\right\} = b + cu_1\,;$$

et de plus

$$\delta_1\delta_\beta\beta_1 + n\,(\delta_\alpha\delta_\beta\beta_1) = u_1\,(\alpha_1\delta_\beta\beta_1),$$

$$\delta_1\delta_\alpha\beta_1 + p\,(\delta_\beta\delta_\alpha\beta_1) = u_1\,(\alpha_1\delta_\beta\beta_1),$$

$$n = \frac{1}{\delta_\alpha\delta_\beta\beta_1}\left\{(\delta_3\delta_2\beta_1) + u_1\,(\alpha_1\delta_\beta\beta_1)\right\} = b_1 + c_1u_1,$$

$$p = \frac{1}{\delta_\alpha\delta_\beta\beta_1}\left\{(\delta_2\delta_1\beta_1) + u_1\,(\alpha_1\delta_\alpha\beta_1)\right\} = b_2 + c_2u_1.$$

Avec ces valeurs des coefficients, où un coefficient reste indéterminé, nous obtenons

$$\delta_e = b\beta_1 + u_1\,(\alpha_1 + c\beta_1).$$

L'hodographe pour les déplacement δ_e est une ligne droite; il y a donc un ensemble de points du plan Σ dont les déplacements sont dans le plan Σ_1. Cette ligne hodographe est, dans l'hodographe du système des déplacements de Σ_1 la section de son plan par le plan parallèle à Σ_1 qui passe par son pôle. Les équations de ces deux plans sont

$$(\delta - \delta_1)\;(\delta_\alpha\delta_\beta) = 0, \qquad (\tau\alpha_1\beta_1) = 0.$$

Par conséquent la section de ces plans est parallèle au vecteur

$$\begin{aligned}[(\delta_\alpha\delta_\beta)\,(\alpha_1\beta_1)] &= (\beta_1\delta_\alpha\delta_\beta)\,\alpha_1 - (\alpha_1\delta_\alpha\delta_\beta)\,\beta_1\\ &= (\delta_\alpha\alpha_1\beta_1)\,\delta_\beta - (\delta_\beta\alpha_1\beta_1)\,\delta_\alpha.\end{aligned}$$

De $u_1 = 0$, il suit $\delta_e = b\beta_1$, et c'est pourquoi les équations de l'hodographe pour les déplacements δ_e sont

$$\delta_e = b\beta_1 + u\left\{(\beta_1\delta_\alpha\delta_\beta)\,\alpha_1 - (\alpha_1\delta_\alpha\delta_\beta)\,\beta_1\right\},$$

$$\delta_e = b\beta_1 + u\left\{(\delta_\alpha\alpha_1\beta_1)\,\delta_\beta - (\delta_\beta\alpha_1\beta_1)\,\delta_\alpha\right\}.$$

Avec les valeurs des coefficients n et p, on obtient de plus

$$\delta_e = \delta_1 + b_1\delta_\alpha + b_2\delta_\beta + u_1\,(c_1\delta_\alpha + c_2\delta_\beta),$$

et si nous posons $b_1 + b_2 + b_3 = 1$, $c_1 + c_2 = - c_3$, il vient

$$\delta_e = (b_1\delta_2 + b_2\delta_3 + b_3\delta_1) + u_1 (c_1\delta_2 + c_2\delta_3 + c_3\delta_1).$$

Enfin nous obtenons pour l'équation du lieu des points dont le déplacement est δ_e

$$\chi = (b_1\rho_2 + b_2\rho_3 + b_3\rho_1) + u_1 (c_1\rho_2 + c_2\rho_3 + c_3\rho_1),$$

il est parallèle au vecteur

$$\gamma = c_1\alpha_1 + c_2\beta_1 = \frac{1}{\delta_\alpha\delta_\beta\beta_1} \left\{ (\alpha_1\delta_\alpha\beta_1)\,\beta_1 - (\alpha_1\delta_\beta\beta_1)\,\alpha_1 \right\},$$

c'est une ligne droite, comme nous l'avons déjà conclu de l'équation de l'hodographe de δ_e. Cette droite s'appelle la *caractéristique* du plan $\Sigma = \Sigma_1$.

Les équations des plans Σ_1 et Σ_2 sont

$$(\rho - \rho_1)\,(\alpha_1\beta_1) = 0, \qquad (\psi - \rho_1 - \delta_1)\,(\alpha_2\beta_2) = 0.$$

Les extrémités des déplacements δ_e sont situés sur l'intersection de ces plans, celle-ci est parallèle au vecteur

$$\eta = [(\alpha_1\beta_1)\,(\alpha_2\beta_2)] = (\alpha_1\alpha_2\beta_2)\,\beta_1 - (\beta_1\alpha_2\beta_2)\,\alpha_1.$$

Pour cette ligne on a $\psi = \rho$, c'est pourquoi

$$n\alpha_1 + p\beta_1 = \delta_1 + n_1\alpha_2 + n_2\beta_2,$$

de sorte que

$$(n\alpha_1 + p\beta_1)\,(\alpha_2\beta_2) = \delta_1\,(\alpha_2\beta_2),$$

c'est-à-dire

$$p = \frac{1}{\beta_1\alpha_2\beta_2} \left\{ (\delta_1\alpha_2\beta_2) - n\,(\alpha_1\alpha_2\beta_2) \right\}$$

si $n = 0$,

$$p = \frac{\delta_1\alpha_2\beta_2}{\beta_1\alpha_2\beta_2}$$

et, par ces valeurs, la ligne en question passe par le point

$$0 + \rho_1 + \frac{\delta_1\alpha_2\beta_2}{\beta_1\alpha_2\beta_2}\,\beta_1,$$

et avec cela nous avons pour l'équation de l'intersection, ou pour le lieu des extrémités des déplacements δ_e, puisqu'elle est parallèle au vecteur γ_1,

$$\psi = \rho_1 + \frac{\delta_1\alpha_2\beta_2}{\beta_1\alpha_2\beta_2}\,\beta_1 + u\,\{(\beta_1\alpha_2\beta_2)\,\alpha_1 - (\alpha_1\alpha_2\beta_1)\,\beta_1\}.$$

Avec les valeurs précédentes de n et p on a

$$\delta_e = \delta_1 + \frac{\delta_1\alpha_2\beta_2}{\beta_1\alpha_2\beta_2}\,\delta_3,$$

la caractéristique passe donc par le point

$$o + \rho_1 + \frac{\delta_1\alpha_2\beta_2}{\beta_1\alpha_2\beta_2}\,\beta_1 - \left(\delta_1 + \frac{\delta_1\alpha_2\beta_2}{\beta_1\alpha_2\beta_2}\,\delta_3\right).$$

et puisqu'elle est parallèle au vecteur γ, nous avons aussi pour équation de la même

$$\chi = \rho_1 - \delta_1 + \frac{\delta_1\alpha_2\beta_2}{\beta_1\alpha_2\beta_2}\,(\beta_1 - \delta_3) + n\,\{(\alpha_1\delta_3\beta_1)\,\alpha_1 - (\alpha_1\delta_\alpha\beta_1)\,\beta_1\}.$$

Si l'on a en particulier $\delta_1 = o$, le point A du plan Σ ne subit aucun déplacement et alors les équations de la caractéristique et du lieu des extrémités des déplacements δ_e de ses points sont

$$\chi = \rho_1 + u\,\{(\alpha_1\delta_3\beta_1)\,\alpha_1 - (\alpha_1\delta_2\beta_1)\,\beta_1\},$$

$$\psi = \rho_1 + x\,\{(\beta_1\alpha_2\beta_2)\,\alpha_1 - (\alpha_1\alpha_2\beta_2)\,\beta_1\}.$$

Si les déplacements des points A et B sont nuls, on a $\delta_1 = o$, $\delta_2 = o$, d'où alors

$$\chi = \rho_1 + n\alpha_1 = \psi, \qquad \delta_e = o.$$

Si l'on a $\delta_1 = o$, $\delta_2 = \delta_3$, nous obtenons

$$\chi = \rho_1 + u\,(\alpha_1 - \beta_1) = \psi, \qquad \delta_e = o.$$

Dans les deux derniers cas le plan Σ possède une droite qui ne change pas de lieu quand il passe de la position Σ_1 à la position Σ_2.

§ 4'. — Si les déplacements des points du plan Σ sont infiniment petits, on procédera comme au § 4 en désignant par δ_k les

grandeurs correspondant aux grandeurs d_k devenues infiniment petites; on aura pour l'équation de l'hodographe des déplacements situés dans le plan Σ_1

$$d\rho = (b_1 d\rho_2 + b_2 d\rho_3 + b_3 d\rho_1) + u_1 (c_1 d\rho_2 + c_2 d\rho_3 + c_3 d\rho_1).$$

La vitesse qui correspond à ce déplacement est

$$\bar{v}_e = (b_1 \bar{v}_2 + b_2 \bar{v}_3 + b_3 \bar{v}_1 + u_1 (c_1 \bar{v}_2 + c_2 \bar{v}_3 + c_3 \bar{v}_1).$$

L'équation de la caractéristique du plan $\Sigma = \Sigma_1$ est maintenant

$$\chi = \rho_1 - d\rho_1 + \frac{d\rho_1 (\alpha + d\alpha)(\beta + d\beta)}{\beta(\alpha + d\alpha)(\beta + d\beta)} (\beta - d\beta) + u \left\{ (\beta d\alpha d\beta)\alpha - (\alpha d\alpha d\beta)\beta \right\}$$

et l'équation du lieu des extrémités des déplacements δ_e est

$$\psi = \rho_1 + \frac{d\rho_1 (\alpha + d\alpha)(\beta + d\beta)}{\beta(\alpha + d\alpha)(\beta + d\beta)} \beta$$
$$+ u \left\{ [\beta(\alpha + d\alpha)(\beta + d\beta)]\alpha - [\alpha(\alpha + d\alpha)(\beta + d\beta)]\beta \right\},$$

toutes ces équations, comme on le voit immédiatement, peuvent facilement être simplifiées, mais nous en laisserons le soin au lecteur, afin de ne pas abuser de la place qui nous a été accordée dans cette revue.

§ 5. — Parmi tous les déplacements qui donnent l'hodographe du système des déplacements du plan Σ, l'un est moindre que tous les autres; il est égal à la perpendiculaire abaissée du pôle sur le plan de l'hodographe. Désignons ce déplacement par δ_0; il est donné par la condition

$$\delta_0 = \delta_1 + n\delta_\alpha + p\delta_\beta = x \,|\, (\delta_\alpha \delta_\beta) = y\varepsilon.$$

De celle-ci suit immédiatement

$$(\delta_1 \delta_\alpha \delta_\beta) = x(\delta_\alpha \delta_\beta)^2, \qquad x = (\delta_1 \delta_2 \delta_3) : (\delta_\alpha \delta_\beta)^2,$$

de sorte que

$$\delta_0 = \frac{\delta_1 \delta_2 \delta_3}{(\delta_\alpha \delta_\beta)^2} \,|\, (\delta_\alpha \delta_\beta) = \frac{\delta_1 \delta_2 \delta_3}{\sqrt{(\delta_\alpha \delta_\beta)^2}} \varepsilon.$$

De plus, nous obtenons

$$(\delta_1\delta_\beta) \mid (\delta_\alpha\delta_\beta) + n(\delta_\alpha\delta_\beta)^2 = 0, \qquad (\delta_\alpha\delta_1) \mid (\delta_\alpha\delta_\beta) + p(\delta_\alpha\delta_\beta)^2 = 0.$$

$$n = \frac{(\delta_3\delta_1) \mid (\delta_\alpha\delta_\beta)}{(\delta_\alpha\delta_\beta)^2} = b', \qquad p = \frac{(\delta_1\delta_2) \mid (\delta_\alpha\delta_\beta)}{(\delta_\alpha\delta_\beta)^2} = c',$$

et aussi avec cela

$$\delta_0 = \delta_1 + \frac{(\delta_3\delta_1) \mid (\delta_\alpha\delta_\beta)}{(\delta_\alpha\delta_\beta)^2}\delta_\alpha + \frac{(\delta_1\delta_2) \mid (\delta_\alpha\delta_\beta)}{(\delta_\alpha\delta_\beta)^2}\delta_\beta,$$

ou, en abrégeant

$$\delta_0 = \delta_1 + b'\delta_\alpha + c'\delta_\beta,$$

d'où il suit

$$\delta_0 = a'\delta_1 + b'\delta_2 + c'\delta_3, \qquad a' + b' + c' = 1.$$

Comme les coefficients de cette équation sont bien déterminés il n'y a en général qu'un point dont le déplacement est δ_0 ; son radius vector est

$$\rho_0 = \rho_1 + b'\alpha_1 + c'\beta_1.$$

On a

$$\delta \mid \varepsilon = \delta_1 \mid \varepsilon = \frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{\sqrt{(\delta_\alpha\delta_\beta)^2}}.$$

« Les projections des déplacements δ sur la direction de ε sont égales au déplacement minimum δ_0 ».

Si l'on a $\delta_1 = 0$, le plan de l'hodographe du système des déplacements passe par le pôle de cet hodographe, on a alors $\delta_0 = \delta_1 = 0$, $\rho_0 = \rho_1$ et A est le point dont le déplacement est le moindre. Si l'on a $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$, on a aussi $\delta_0 = 0$ et $\rho_0 = \rho_1$, et tous les points de la droite AB sont sans déplacement parce qu'il en est ainsi des points A et B.

§ 57. — Si les déplacements des points du plan Σ sont infiniment petits, nous obtenons comme déplacement minimum

$$d\rho_0 = \frac{d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3}{\sqrt{(d\alpha d\beta)^2}}\varepsilon,$$

et aussi

$$d\rho_0 = d\rho_1 + \frac{(d\rho_3 d\rho_1) \mid (d\alpha d\beta)}{(d\alpha d\beta)^2}d\alpha + \frac{(d\rho_1 d\rho_2) \mid (d\alpha d\beta)}{(d\alpha d\beta)^2}d\beta.$$

la vitesse avec laquelle il s'exécute est

$$\overline{v}_0 = \frac{\overline{v_1\,v_2\,v_3}}{\sqrt{[(\overline{v}_2-\overline{v}_1)(\overline{v}_3-\overline{v}_1)]^2}}\,\varepsilon,$$

et la forme des autres résultats se voit immédiatement d'après le paragraphe 5.

§ 6. — Les déplacements des points du plan Σ sont donnés par l'équation

$$\begin{aligned}\delta &= \delta_1 + (n\delta_\alpha + p\delta_\beta)\\ &= (n\delta_\alpha + p\delta_\beta) + \delta_1.\end{aligned}$$

D'après cela le déplacement de chaque point du plan se compose de deux composantes, c'est-à-dire d'un déplacement δ_1 commun à tous les points du système et d'une composante

$$\delta_r = (n\delta_\alpha + p\delta_\beta),$$

qui est parallèle au plan de l'hodographe du système des déplacements et perpendiculaire au vecteur de position de ce plan.

Nous allons maintenant examiner par quelles sortes de mouvements simples le plan Σ peut passer de la position Σ_1 à la position Σ_2 en passant des cas spéciaux au cas général ; dans ce paragraphe nous admettrons que $\delta_1 = 0$.

Si le point A est sans déplacement, $\delta_1 = 0$, le point $A_1 = A_2$ est un point double des plans Σ_1 et Σ_2.

L'équation de l'hodographe du système des déplacements des points du plan Σ est à présent

$$\delta = n\delta_2 + p\delta_3.$$

Les déplacements totaux des points du plan Σ sont tous parallèles au plan de l'hodographe qui passe par son pôle perpendiculairement au vecteur de position ε de ce plan, lequel vecteur est donné par

$$\varepsilon = [\,|\,(\delta_2\delta_3)] : \sqrt{(\delta_2\delta_3)^2}.$$

Comme n et p (indépendants l'un de l'autre) sont des nombres

variables, il pourrait exister plusieurs points sans déplacement, on aurait la conditïon $\delta = 0$, ou

$$n\delta_2 + p\delta_3 = 0$$

et si cette équation doit être satisfaite, δ_2 et δ_3 doivent être des vecteurs parallèles, ce que nous excluons ici, de sorte qu'il n'y a qu'un seul point sans déplacement.

Soient Σ', Σ'_1, Σ'_2 les projections de Σ, Σ_1, Σ_2, dans la direction de ε, sur un plan Σ_h parallèle au plan de l'hodographe du système

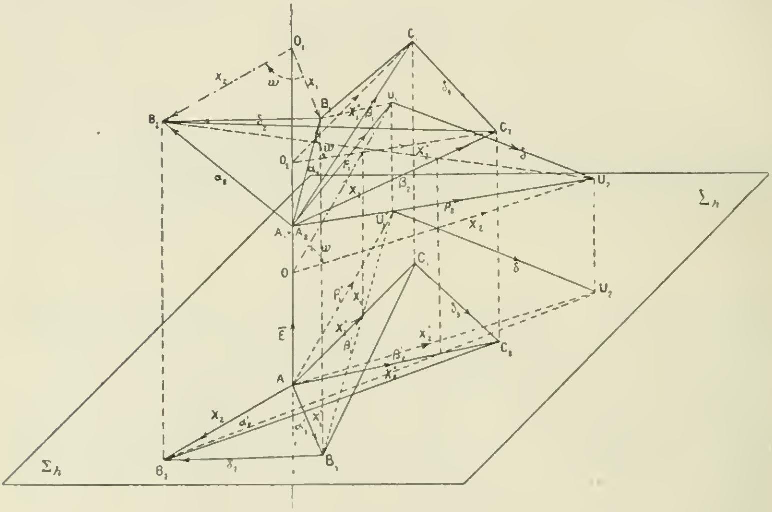


Fig. 2.

des déplacements; Σ', Σ'_1, Σ'_2 sont des systèmes congruents en ce plan Σ_h car les projections de tous les vecteurs qui lient des points homologues de Σ_1 et de Σ_2 sont égales à ces vecteurs. Avec la projection A' du point $A = A_1 = A_2$ dont le déplacement est nul, coïncide le point double de Σ'_1 et Σ'_2 (fig. 2). Si Σ passe de la position Σ_1 à la position Σ_2, Σ' passe aussi de la position Σ'_1 à la position Σ'_2 et si Σ' coïncide avec Σ'_2 de sorte que des points correspondants de Σ' et Σ'_2 se couvrent, Σ est encore passé de la position Σ_1 à la position Σ_2. Le plus simple mouvement de Σ' dans le plan Σ_h, pour parvenir d'une position Σ'_1 à la position Σ'_2, est la rotation de Σ', autour du point double A' des systèmes plans Σ'_1

et Σ'_2, d'un angle ω égal à l'angle des droites homologues de Σ'_1 et Σ'_2. Les déplacements des points de Σ' sont égaux aux déplacements des points correspondants de Σ car ces derniers sont parallèles au plan Σ_h.

En se reportant pour les notations à la figure (2), on a, si le système Σ' passe de la position Σ'_1 à la position Σ'_2, en posant

$$(\widehat{\alpha'_1 \alpha'_2}) = (\widehat{\beta'_1 \beta'_2}) = \omega,$$

$$\alpha'_2 = \cos \omega \alpha'_1 + \sin \omega \mid (\varepsilon \alpha'_1), \qquad \beta'_2 = \cos \omega \beta'_1 + \sin \omega \mid (\varepsilon \beta'_1).$$

De plus nous avons par rapport au système plan Σ les équations

$$\alpha_2 = (1 - \cos \omega_1)(\varepsilon \mid \alpha_1)\varepsilon + \cos \omega_1 \alpha_1 + \sin \omega_1 \mid (\varepsilon \alpha_1),$$
$$\beta_2 = (1 - \cos \omega_2)(\varepsilon \mid \beta_1)\varepsilon + \cos \omega_2 \beta_1 + \sin \omega_2 \mid (\varepsilon \beta_1).$$

Le plan qui passe par $\overline{B_1 B_2} = \delta_2$ perpendiculairement à la droite A_1A' coupe cette ligne, qui est parallèle ε, en un point O_1 et on a $\Delta O_1 B_1 B_2 \equiv \Delta A' B_1' B_2'$; de $\overline{O_1 B_1} = \chi'_1$, $\overline{O_1 B_2} = \chi'_2$ on a par suite $\chi'_1 = \alpha_1'$, $\chi'_2 = \alpha_2'$, donc

$$\chi'_2 = \cos \omega_1 \chi'_1 + \sin \omega_1 \mid (\varepsilon \chi'_1) = \cos \omega \alpha'_1 + \sin \omega \mid (\varepsilon \alpha'_1),$$

de sorte que

$$\omega_1 = \omega.$$

Le plan qui passe par $\overline{C_1 C_2} = \delta_3$ et est perpendiculaire à la droite A_1A' coupe cet axe $A_1A' = \varepsilon$ en un point O_2 et on a $\Delta O_2 C_1 C_2 \equiv \Delta A' C_1' C_2'$; de $\overline{O_2 C_1} = \chi''_1$, $\overline{O_2 C_2} = \chi''_2$ on a par suite $\chi''_1 = \beta'_1$, $\chi''_2 = \beta'_2$, donc

$$\chi''_2 = \cos \omega_2 \chi''_1 + \sin \omega_2 \mid (\varepsilon \chi''_1) = \cos \omega \beta'_1 + \sin \omega \mid (\varepsilon \beta'_1),$$

de sorte que

$$\omega_2 = \omega.$$

Si le point B du plan Σ, par sa rotation autour de l'axe $\bar{\varepsilon}$ qui passe par le point $A_1 = A_2$, passe de la position B_1 à la position B_2, le point C passe aussi du lieu C_1 au lieu C_2 et de même tous les points homologues de Σ et Σ_2 se couvrent puisque trois paires de points homologues de Σ et Σ_2 coïncident.

L'amplitude de la rotation s'obtient moyennant le déplacement connu d'un des points B ou C; on a

$$\delta_2 = (\cos w - 1)\chi'_1 + \sin w \mid (\varepsilon\chi'_2),$$

d'où, par quadrature intérieure et extraction de racine, il vient

$$2 \sin \frac{1}{2} w = \left(\sqrt{\delta_2^2} : h'_1\right), \qquad h'_1 = \sqrt{\chi'^2_1}.$$

Pour un point arbitraire U du plan Σ nous obtenons maintenant, si nous posons $U_1 = A_1 + \rho_1$, $U_2 + A_1 = \rho_2$,

$$\rho_2 = (1 - \cos w)(\varepsilon \mid \rho_1)\varepsilon + \cos w \rho_1 + \sin w \mid (\varepsilon\rho_1).$$

ou, avec

$$\rho_1 = u\varepsilon + \chi_1, \quad \rho_2 = u\varepsilon + \chi_2, \quad (\varepsilon \mid \chi_1) = (\varepsilon \mid \chi_2) = 0, \quad \chi_1^2 = \chi_2^2$$
$$\chi_2 = \cos w \chi_1 + \sin w \mid (\varepsilon\chi_1),$$

de sorte que le déplacement de ce point est

$$\delta = \chi_2 - \chi_1 = (\cos w - 1)\chi_1 + \sin w \mid (\varepsilon\chi_1).$$

« Etant donné un point du plan Σ sans déplacement, ce plan passe de la manière la plus simple d'une position Σ_1 à une position Σ_2 en tournant autour de l'axe passant par le point fixe du plan qui est point double de Σ_1 et Σ_2 et qui est perpendiculaire aux déplacements de deux autres points quelconques du plan Σ assujettis toutefois à ne pas être en ligne droite avec le point fixe. L'angle de rotation est égal à l'angle qu'enferment les perpendiculaires abaissées des éléments original et final d'un déplacement donné sur l'axe de rotation. Les déplacements des points du plan Σ sont perpendiculaires à cet axe et de grandeur directement proportionnelle à leurs distances à cet axe. Le mouvement correspondant de la projection du système plan Σ sur un plan perpendiculaire audit axe est la rotation de la projection autour du point d'intersection de l'axe de ce plan, du même angle que précédemment ».

Dans ce mouvement les trajectoires des points du plan Σ sont des arcs de cercle dont les plans sont perpendiculaires à l'axe de rotation et dont les centres sont situés sur l'axe.

Le système des déplacements

$$\delta = n\delta_\alpha + p\delta_\beta$$

s'appelle un *système rotatif*, puisqu'il est engendré par rotation.

§ 6'. — Si les déplacements des points du plan Σ sont infiniment petits, on a $d\rho_1 = o$, et son mouvement est équivalent à une rotation infiniment petite d'amplitude dw autour de l'axe passant par le point double de Σ_1 et Σ_2 et perpendiculaire au plan de l'hodographe des déplacements. L'angle de rotation est donné par

$$dw = (\sqrt{d\rho_2^2} : h'_1) = (\sqrt{d\rho_3^2} : h''_1),$$

et la vitesse angulaire du plan est

$$w = (v_2 : h'_1) = (v_3 : h''_1), \qquad v_2 : v_3 = h'_1 : h''_1.$$

Pour un point arbitraire du plan Σ nous obtenons

$$\rho_2 = \rho_1 + dw \mid (\varepsilon\rho_1), \qquad \chi_2 = \chi_1 + dw \mid (\varepsilon\chi_1),$$
$$d\rho = dw \mid (\varepsilon\rho_1) = dw \mid (\varepsilon\chi_1),$$
$$\overline{v} = w \mid (\varepsilon\rho_1) = w \mid (\varepsilon\chi_1).$$

§ 7. — Un cas plus spécial est celui où les points A et B du plan Σ sont sans déplacements ; alors $\delta_1 = o$, $\delta_2 = o$, de sorte que $A_1 = A_2$ et $B_1 = B_2$ sont des points doubles de Σ_1 et Σ_2.

Alors la droite $A_1 B_1 = A_2 B_2$ est évidemment une ligne double de Σ_1 et Σ_2.

Dans ce cas, nous avons

$$\delta = p\delta_3$$

et les déplacements des points du plan Σ sont parallèles entre eux.

Avec $p = o$, il vient

$$\delta = o, \qquad \rho = \rho_1 + n\alpha_1,$$

de sorte que les points de la droite $AB = A_1 B_1$ ne changent pas de lieu ; cette droite est la caractéristique du plan $\Sigma = \Sigma_1$.

Comme on a généralement

$$\alpha_1 \mid \delta_\beta + \beta_2 \mid \delta_\alpha = 0,$$

on a à présent

$$\alpha_1 \mid \delta_3 = 0, \qquad \alpha_1 \mid \delta = 0,$$

les déplacements de tous les points du plan Σ sont perpendiculaires à la ligne double de Σ_1 et Σ_2. Les points homologues de Σ_1 et Σ_2 sont également éloignés de chaque point de cette ligne, cette distance variant naturellement pour chaque couple de points.

L'équation d'une droite du plan $\Sigma = \Sigma_1$ qui est parallèle à α_1 est

$$\rho = \rho_1 + c\beta_1 + u\alpha_1,$$

et comme $\delta_1 = 0$, $\delta_\alpha = 0$, les déplacements des points de cette droite sont

$$\delta = c\delta_3,$$

ils sont égaux entre eux. En prenant c comme paramètre variable, il suit de là que les points de chaque rayon du plan Σ qui est parallèle α_1 subissent un déplacement égal, de sorte que les déplacements des points du plan Σ sont directement proportionnels à leurs distances à la droite $A_1 B_1 = A_2 B_2$; en outre les déplacements δ sont perpendiculaires à α_1, et la droite $A_1 B_1$ est un axe pour le transport par rotation du plan Σ de la position Σ_1 en la position Σ_2.

Nous avons après cela, si $\varepsilon = (\alpha_1 : \sqrt{\alpha_1^2})$,

$$\beta_2 = (\varepsilon \mid \beta_1)\,\varepsilon + \cos w\,(\varepsilon\beta_1) \mid \varepsilon + \sin w \mid (\varepsilon\beta_1),$$

avec $\beta_1 = u\,\varepsilon + \chi'_1$, $\beta_2 = u\,\varepsilon + \chi'_2$, $(\varepsilon \mid \chi'_1) = (\varepsilon \mid \chi'_2) = 0$ est

$$\chi'_2 = \cos w\,\chi'_1 + \sin w \mid (\varepsilon\chi'_1),$$
$$\delta_3 = (\cos w - 1)\,\chi'_1 + \sin w \mid (\varepsilon\chi'_1),$$

d'où il suit

$$2 \sin \frac{1}{2} w = (\sqrt{\delta_3^2} : h'_1), \quad h'_1 = \sqrt{\chi'^2_1},$$

équation qui détermine l'angle de rotation.

Soit χ_1 la distance vectorielle d'un point arbitraire du plan $\Sigma = \Sigma_1$ à l'axe α_1, cette distance vectorielle devient après la rotation

$$\chi_2 = \cos w \chi_1 + \sin w \mid (\varepsilon \chi_1),$$

et le déplacement de ce point est

$$\delta = \chi_2 - \chi_1 = (\cos w - 1)\, \chi_1 + \sin w \mid (\varepsilon \chi_1).$$

§ 7'. — Si les déplacements des points du plan Σ sont infiniment petits on a $d\rho_1 = 0$, $d\rho_2 = 0$ et le mouvement de ce plan est équivalent à une rotation infiniment petite autour de la ligne double $A_1 B_1 = A_2 B_2$ de Σ_1 et Σ_2; l'amplitude et la vitesse angulaire de cette rotation sont

$$dw = (\sqrt{d\rho_3^2} : h'_1) = (ds_3 : h'_1),$$
$$w = (v_3 : h'_1).$$

§ 8. — Enfin nous voulons examiner le cas spécial dans lequel $\delta_1 = 0$ et $\delta_2 = \delta_3$ est. Le point A du plan Σ est sans déplacement, les déplacements de ces points B et C sont égaux.

Dans ces conditions nous avons

$$\delta = (n + p)\, \delta_3,$$

et les déplacements des points du plan Σ sont parallèles entre eux.

Avec $(n + p) = 0$, c'est-à-dire avec $p = -n$, il vient

$$\delta = 0, \qquad \rho = \rho_1 + n\,(\alpha_1 - \beta_1).$$

Le plan Σ possède donc une droite passant par le point $A = A_1$ dont le lieu ne change pas; elle est parallèle à la différence des vecteurs α_1 et β_1 ainsi qu'à $\overline{B_1 A_1}$ et forme une ligne double de Σ_1 et Σ_2,

On a alors en général

$$(\alpha_1 \mid \delta_\alpha)\, \delta_\beta^2 - (\beta_1 \mid \delta_\beta)\, \delta_\alpha^2 = 0,$$

et ici, dans notre cas particulier

$$(\alpha_1 \mid \delta_3)\, \delta_3^2 - (\beta_1 \mid \delta_3)\, \delta_3^2 = 0,$$
$$(\alpha_1 - \beta_1) \mid \delta_3 = 0,$$

de sorte que les déplacements des points du plan Σ sont perpendiculaires à la direction du vecteur $(\alpha_1 - \beta_1)$.

L'équation d'un rayon du plan $\Sigma = \Sigma_1$ parallèle à $(\alpha_1 - \beta_1)$, est

$$\delta = \rho_1 + c\alpha_1 + u(\alpha_1 - \beta_1).$$

de sorte que les déplacements de ses points sont

$$\delta = c\delta_3 + u(\alpha_1 + \delta_2 - \beta_1 - \delta_3 - \alpha_1 + \beta_1),$$
$$\delta = c\delta_3.$$

Les déplacements des points d'une droite quelconque du plan $\Sigma = \Sigma_1$ qui est parallèle au vecteur $(\alpha_1 - \beta_1)$ sont égaux. Les déplacements des points du plan Σ sont perpendiculaires à la droite sans déplacement et, en grandeur, directement proportionnels aux distances desdits points à cette droite. La droite qui passe par le point A_1 et qui est parallèle à $(\alpha_1 - \beta_1)$ est ainsi un axe de rotation quant au transport du plan Σ de la position Σ_1 à la position Σ_2.

Remplaçons l'ancien axe de rotation par le nouveau et conservons la notation du § 7, nous avons pour le mouvement du point C

$$\chi'_2 = \cos w\chi'_1 + \sin w \mid (\varepsilon\chi'_1),$$
$$\delta_3 = (\cos w - 1)\chi'_1 + \sin w \mid (\varepsilon\chi'_1); \; \varepsilon = (\alpha_3 - \beta_1) : \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2},$$
$$2 \sin \frac{1}{2} w = (\sqrt{\delta_3^2} : h'_1),$$

équation qui nous donne l'amplitude de la rotation.

§ 8'. — Si les déplacements du plan Σ sont infiniment petits, on a $d\rho_1 = 0$, $d\rho_2 = d\rho_3$ et l'équation de l'hodographe du système des déplacements est

$$d\rho = (n + p)\, d\rho_3,$$

on a pour la vitesse

$$\bar{v} = (n + p)\, \bar{v}_3,$$

l'équation de l'axe de rotation est

$$\rho = \rho_1 + u(\alpha_1 - \beta_1).$$

et l'amplitude de la rotation ainsi que la vitesse angulaire du plan Σ sont

$$dw = (\sqrt{d\rho_3^2} : h'_1) = (ds_3 : h'_1), \qquad w = (v_3 : h'_1).$$

§ 9. — Si trois points du plan Σ, non situés en ligne droite, sont fixes, on a $\bar{\delta}_1 = \bar{\delta}_2 = \bar{\delta}_3 = 0$ et par suite $\bar{\delta} = 0$. Le plan ne peut subir aucun déplacement.

§ 10. — Soit maintenant un plan Σ, dont aucun point n'est fixe et qui doit passer d'une position Σ_1 à une position Σ_2.

L'hodographe du système des déplacements du système plan de points Σ a présentement l'équation

$$\begin{aligned}\bar{\delta} &= \bar{\delta}_1 + (n\bar{\delta}_\alpha + p\bar{\delta}_\beta)\\ &= (n\bar{\delta}_\alpha + p\bar{\delta}_\beta) + \bar{\delta}_1,\end{aligned}$$

Le système des déplacements se compose de deux parties, d'abord du système

$$\bar{\delta}_1 = \bar{\delta}_1,$$

d'une translation commune $\bar{\delta}_1$ à tous les points du plan, et du système

$$\bar{\delta} = (n\bar{\delta}_\alpha + p\bar{\delta}_\beta),$$

dont les vecteurs du déplacement sont parallèles au plan de l'hodographe et qui d'après le § 6 donne une rotation autour d'un axe. Nous pouvons écrire

$$\bar{\delta} = \bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_r = \bar{\delta}_r + \bar{\delta}_1.$$

et cette équation nous montre que l'ordre dans la suite de la translation et de la rotation, dans le mouvement du plan Σ d'une position Σ_1, est absolument indifférent.

Le point $A = A_1$ ne possède que la translation $\bar{\delta}_1 = \overline{A_1 A_2}$. Soient, si nous posons

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_1 &= \bar{\delta}_1,\\ \bar{\delta}_2 - \bar{\delta}_1 &= \bar{\omega}_2,\\ \bar{\delta}_3 - \bar{\delta}_1 &= \bar{\omega}_3,\\ \bar{\delta}_i - \bar{\delta}_1 &= \bar{\omega}_i,\\ &\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\\ \bar{\delta} - \bar{\delta}_1 &= \bar{\omega},\end{aligned}$$

$\tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3, \tilde{\omega}_4, \ldots, \tilde{\omega}$ les déplacements des points B, C, D, ...U du plan Σ parallèles au plan de l'hodographe du système des déplacements lequel à présent ne passe pas par son pôle, ces déplacements pouvant être engendrés par la rotation du plan Σ autour de l'axe $\bar{\varepsilon}$ passant par le point $A \equiv A_1$ et perpendiculaire au plan de l'hodographe. Chaque point du plan possède en outre la translation $\tilde{\delta}_1$.

Prenons à présent le pôle des coordonnées sur cet axe, coïncidant avec le point A_1; avec les notations précédentes le radius vector d'un point arbitraire du plan Σ, qui passe de la position Σ_1 à la position Σ_2, est

$$\rho_2 = (\varepsilon \mid \rho_1)\,\varepsilon + \cos w\,(\varepsilon\rho_1) \mid \varepsilon + \sin w \mid (\varepsilon\rho_1) + \tilde{\delta}_1,$$

le déplacement total du point est

$$\tilde{\delta} = (\rho_2 - \rho_1) = (1 - \cos w) \left\{ (\varepsilon \mid \rho_1)\,\varepsilon - \rho_1 \right\} + \sin w \mid (\varepsilon\rho_1) + \tilde{\delta}_1,$$

ou, avec $\rho_1 = u\,\varepsilon + \chi_1$, $\rho_2 = u\,\varepsilon + \chi_2$, $(\varepsilon \mid \chi_1) = (\varepsilon \mid \chi_2) = 0$,

$$\chi_2 = \cos w\,\chi_1 + \sin w \mid (\varepsilon\chi_1) + \tilde{\delta}_1,$$
$$\tilde{\delta} = (\chi_2 - \chi_1) = (\cos w - 1)\,\chi_1 + \sin w \mid (\varepsilon\chi_1) + \tilde{\delta}_1.$$

Il suit de là pour l'amplitude de la rotation

$$\tilde{\delta}_2 = (1 - \cos w) \left\{ (\varepsilon \mid \alpha_1)\,\varepsilon - \alpha_1 \right\} + \sin w \mid (\varepsilon\alpha_1) + \tilde{\delta}_1,$$

d'où

$$\tilde{\delta}_2\,\alpha = \tilde{\delta}_2 - \tilde{\delta}_1 = (\cos w - 1)\,\chi'_1 + \sin w \mid (\varepsilon\chi'_1),$$

de sorte qu'enfin

$$\sin \frac{1}{2} w = \left(\sqrt{(\tilde{\delta}_2 - \tilde{\delta}_1)^2} : 2h'_1\right).$$

Comme le mouvement du système plan Σ est équivalent à une rotation autour de l'axe $\bar{\varepsilon}$ passant par le point $A = A_1$ et à une translation inclinée sur cet axe, il est aussi équivalent à une rotation autour d'un axe parallèle à ε, passant par un point quelconque du plan $\Sigma = \Sigma_1$, avec la même amplitude, et à une translation du plan qui est égale au déplacement total de ce point.

« Le mouvement d'un plan Σ, qui passe d'une position Σ_1 à une

autre position Σ_2, est équivalent à une rotation autour d'un axe $\bar{\varepsilon}$ passant par un quelconque de ses points perpendiculairement au plan de l'hodographe du système des déplacements des points du plan Σ et à une translation de tous ses points. L'amplitude de la rotation est égale à l'angle des plans Σ_1 et Σ_2. La translation est égale au déplacement total du point du plan par lequel passe l'axe de rotation. Avec le point de réduction $(A \equiv A_1)$ du système des déplacements du plan Σ varient en général la translation et la position de l'axe de rotation mais non sa direction, l'amplitude de la rotation est la même pour toutes les réductions du système des déplacements. L'ordre de suite de la rotation et de la translation est arbitraire ; elles peuvent donc avoir lieu en même temps.

Si nous choisissons le point qui a le plus petit déplacement δ_0 comme point de réduction, les translations de points du plan Σ sont parallèles à l'axe $\bar{\varepsilon}_s$ qui passe par ce point et égales à δ_0.

Le mouvement du plan Σ est d'après cela un mouvement de vis dont l'axe a l'équation

$$\rho_s = a'\rho_1 + b'\rho_2 + c'\rho_3 + u \mid (\delta_\alpha \delta_\beta).$$

C'est le mouvement le plus simple pour le transport du plan Σ d'une position Σ_1 à une position Σ_2.

§ 10'. — Si tous les points du plan Σ subissent des déplacements infiniment petits, l'équation de l'hodographe du système des déplacements est

$$\begin{aligned} d\rho &= d\rho_1 + (nd\alpha + p\beta) \\ &= (nd\alpha + pd\beta) + d\rho_1, \end{aligned}$$

il se compose de deux parties

$$d\rho_t = d\rho_1, \qquad d\rho_r = (nd\alpha + pd\beta).$$

La première partie peut être engendrée par la translation infiniment petite $d\rho_1$ de tous les points du plan, la deuxième partie par une rotation infiniment petite autour de l'axe passant par le point $A \equiv A_1$ et parallèle au vecteur de position du plan de l'hodographe du système des déplacements.

L'équation de l'hodographe du système des vitesses des points du plan est

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + n(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) + p(\bar{v}_3 - \bar{v}_1),$$

ou

$$\bar{v} = (1 - n - p)\,\bar{v}_1 + n\bar{v}_2 + p\bar{v}_3,$$

elle se décompose en systèmes partiels

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_1, \qquad \bar{v}_r = n\bar{v}_2 + p\bar{v}_3 - (n+p)\,\bar{v}_1$$

c'est-à-dire en un système de vitesses de translation et de rotation.

L'amplitude de la rotation est donnée par

$$dw = \frac{\sqrt{(\overline{d\rho_2 - d\rho_1})^2}}{\sqrt{(\varepsilon\alpha_1)^2}} = \frac{\sqrt{(\overline{d\rho_2 - d\rho_1})^2}}{h'_1},$$

et la vitesse angulaire autour desdits axes est

$$w = \frac{1}{h'_1}\sqrt{(\overline{\bar{v}_2 - \bar{v}_1})^2}.$$

Revenant à l'équivalence du mouvement du plan, le théorème donné précédemment est valable ici ; l'équation de l'axe $\bar{\varepsilon}_{s1}$ pour un mouvement de vis du plan est

$$\rho_s = a'\rho_1 + b'\rho_2 + c'\rho_3 + u\,|\,\varepsilon(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)(\bar{v}_3 - \bar{v}_1)|.$$

On déduira sans difficulté les cas spéciaux déjà traités des résultats des deux derniers paragraphes.

Ferdinand Kraft (Zürich).

NOTES ET DOCUMENTS (¹)

ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES

EXTRAITS DU « PROGRAMME DES CONDITIONS POUR L'ADMISSION DES ÉLÈVES »

D'importantes modifications ont été apportées au programme d'admission à l'Ecole centrale de Paris. Elles tendent principalement à transformer la préparation des candidats pour la rendre plus pratique et mieux appropriée que par le passé au but de l'Ecole. Nous attirons tout particulièrement l'attention de nos lecteurs sur les « Renseignements généraux sur l'esprit dans lequel ont été faites les modifications aux programmes. »

NOTE DE LA RÉDACTION.

RENSEIGNEMENTS GÉNÉRAUX. — L'Ecole centrale des Arts et Manufactures établie à Paris est spécialement destinée à former des ingénieurs pour toutes les branches de l'industrie et pour les travaux et services publics dont la direction n'appartient pas nécessairement aux ingénieurs de l'État.

L'Ecole ne reçoit que des élèves externes. Les étrangers y peuvent être admis comme les nationaux ; leur admission a lieu aux mêmes conditions.

La durée des études est de trois ans.

Le prix de l'enseignement, y compris les frais qu'entraînent les diverses manipulations, est établi conformément au tableau suivant, et exigible en trois termes :

	Première année d'études (3ᵉ division)	Deuxième année d'études (2ᵉ division)	Troisième année d'études (1ʳᵉ division)
	fr.	fr.	fr.
Avant l'ouverture des cours.	450	500	500
Le 1ᵉʳ février	225	250	250
Le 1ᵉʳ mai.	225	250	250
	900	1000	1000

(¹) Nous publions sous ce titre des extraits de règlements, programmes et décrets relatifs à l'enseignement secondaire et à l'enseignement supérieur.

LA RÉDACTION.

Concours. — Nul n'est admis à l'École que par voie de concours.

Le concours est public. Les épreuves sont de deux sortes : les épreuves obligatoires et les épreuves facultatives.

1° *Épreuves obligatoires.* — Elles consistent en compositions écrites et en examens oraux qui portent sur les connaissances ci-après :

1° La langue française ; 2° l'arithmétique ; 3° la géométrie élémentaire ; 4° l'algèbre ; 5° la trigonométrie ; 6° la géométrie analytique à deux et à trois dimensions ; 7° la géométrie descriptive ; 8° la mécanique ; 9° la physique ; 10° la chimie ; 11° le dessin à main levée, le dessin au trait et le lavis.

Toutes les matières comprises dans les Programmes détaillés, sont également obligatoires. Les candidats dont les connaissances sur l'une quelconque des matières seraient reconnues insuffisantes ne pourront être admis. Le programme est remis à toutes les personnes qui en font la demande au secrétariat de l'École.

Les compositions écrites peuvent s'appliquer à toutes les divisions du programme ; une rédaction correcte et méthodique, ainsi qu'une écriture régulière et très lisible, en sont des conditions essentielles.

Les coefficients attachés aux examens oraux et aux compositions écrites sont fixés comme il suit :

ORAL		COMPOSITIONS ÉCRITES	
Géométrie analytique et Mécanique	5	Trigonométrie et calcul logarithmique	3
Arithmétique, algèbre, trigonométrie	5	Mathématiques	5
Géométrie élémentaire et descriptive	5	Physique	2
Physique	5	Chimie	2
Chimie	5	Épure	3
		Dessin d'architecture	4
		Dessin de machines	2
		Croquis de machines	2

Quinze points seront ajoutés au total des points obtenus par ceux des candidats qui produiront soit le certificat relatif à la première partie des épreuves du baccalauréat de l'enseignement secondaire *classique* ou *moderne*, soit le diplôme des Écoles nationales des Arts et Métiers.

Tout candidat de nationalité française, dont les compositions écrites présenteront de graves incorrections au point de vue de la rédaction ou de l'orthographe, sera, de ce fait, déféré au jury d'admission réuni en séance plénière et pourra être exclu du concours, alors même que l'ensemble de ses épreuves le classerait en rang utile pour être admis.

2° *Épreuve facultative.* — En raison de l'importance croissante qu'a pour les ingénieurs la connaissance des langues, tout candidat, quelle que soit sa nationalité, sera admis, s'il en fait la demande dans la forme spécifiée plus haut à l'article : « Concours », à passer un examen sur une ou plusieurs des langues suivantes : Anglais Allemand, Espagnol,

et Russe. L'examen sera oral et public comme les épreuves obligatoires. Il consistera en :

1° La traduction française d'un texte écrit dans la langue sur laquelle porte l'épreuve ;

2° Une conversation en ladite langue.

Les points obtenus dans cette épreuve au-dessus de la note 10, seront affectés du coefficient 2 et compteront pour l'admission.

Si un candidat passe sur deux ou trois langues, le coefficient 2 s'appliquera dans les conditions ci-dessus, à la langue sur laquelle il aura obtenu la plus haute note, les points au-dessus de 10, obtenus sur les autres langues, s'ajoutant purement et simplement.

Composition de Mathématiques. — A l'avenir, cette composition portera sur deux sujets distincts :

1° Une question de cours prise dans la partie du programme relative à la mécanique ou à la cinématique, avec application numérique, s'il y a lieu ;

2° Un problème de géométrie analytique ou de cinématique, consistant : soit dans la recherche, la discussion et la représentation d'un lieu géométrique ou d'une trajectoire d'après les conditions géométriques ou cinématiques données ; soit dans la discussion et la représentation d'une courbe ou d'un mouvement directement définis par des équations numériques données.

Pas plus que par le passé on ne proposera des questions d'arithmétique pure ou d'algèbre pure. Ces deux sciences n'interviendront qu'à titre d'auxiliaires.

Ce que l'on désire, c'est que les candidats soient exercés à discuter et à suivre, par les moyens analytiques, géométriques ou cinématiques dont ils disposent, l'allure d'une fonction d'une variable ; qu'ils soient exercés à la recherche des tangentes, des maxima et minima, des points d'inflexion et, en cinématique, à celle des vitesses et des accélérations tangentielles.

On ne s'interdit pas d'une manière absolue de donner aussi des questions où il y aurait à remonter à des fonctions primitives ; mais, en ce cas, on se bornera aux fonctions primitives qui sont explicitement au programme et que les candidats doivent connaître.

Renseignements généraux sur l'esprit dans lequel ont été faites les modifications au programme. — *Les modifications apportées au programme ont été faites dans le but de le* **simplifier**, *de le* **préciser** *et de le* **développer** *dans le sens dans lequel les élèves eux-mêmes sont appelés à se diriger après leur entrée à l'école.*

1° *Simplifications.* — On a supprimé toutes les questions pouvant donner lieu à des discussions sur les principes : ces questions qui touchent à la philosophie des mathématiques seraient intéressantes et utiles pour des élèves se destinant à l'enseignement ; elles ne peuvent même

pas être comprises d'un élève de lycée. Personne ne songerait à demander à des candidats à l'Ecole centrale d'approfondir et de justifier les définitions de la ligne droite et du plan, de discuter le postulatum d'Euclide : les notions simples et intuitives fournies par le bon sens ne peuvent qu'être obscurcies par des discussions prématurées. La même prudence s'impose en arithmétique, en algèbre et en mécanique.

C'est ainsi que, pour l'algèbre et l'arithmétique, on a supprimé du programme toutes les questions pouvant donner lieu à des développements ou à des interrogations sur les nombres incommensurables en général, sur l'idée générale de limite, sur la continuité en un point ou dans un intervalle, sur l'existence des dérivées et des fonctions implicites... : ce genre de notions se trouvera précisé par les exemples particuliers qui s'en présentent dans le cours ; l'idée d'incommensurable par le rapport de la diagonale du carré au côté ; l'idée de limite par les progressions géométriques décroissantes, les séries, les dérivées... ; pour éviter toute difficulté pour la continuité on a indiqué au programme que l'idée d'un trait continu pour la représentation graphique de la fonction suffirait à définir la continuité ; on a, d'une façon générale, introduit dans toutes les questions d'analyse et d'algèbre la représentation graphique; par exemple, on a indiqué que, pour le théorème des accroissements finis, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$, on peut le déduire de cette remarque que, sur l'arc de courbe $y=f(x)$ entre les deux points $x=a$ et $x=b$, il existe un point $x=c$ où la tangente est parallèle à la corde, pourvu que la dérivée remplisse les conditions connues ; de même la représentation graphique doit jouer un rôle fondamental dans tout ce qui touche à la théorie des équations à coefficients réels, théorème de Rolle, méthodes d'approximation de Newton et des parties proportionnelles...

Pour les séries, on ne demandera que l'étude de celles dont la convergence ou la divergence puisse s'étudier par l'application directe des théorèmes indiqués au programme.

En mécanique, les interrogations ne porteront pas sur les principes. Les candidats devront être exercés aux questions du programme accompagnées d'applications simples ; par exemple les conditions générales d'équilibre d'un corps solide devront être appliquées aux cas simples d'un corps solide sollicité par deux forces, par trois forces, par des forces parallèles, par des forces dans un même plan...

Une autre simplification du programme a consisté à supprimer les petites questions traitées par des méthodes spéciales et compliquées, quand il existe des méthodes générales plus simples.

Enfin, une dernière simplification en mathématiques a consisté à diminuer en géométrie analytique la place excessive prise par la théorie des courbes et surfaces du second ordre, principalement en supprimant des

questions relatives à ces courbes ou surfaces rapportées à des axes quelconques. On a supprimé toutes les formules générales qui ne sont que des exercices de mémoire ou des jeux d'écriture ; exemples : condition de contact d'une droite et d'une conique, équation quadratique des tangentes menées d'un point, équation quadratique des asymptotes dans l'équation générale, théories générales des foyers et des directrices...

De même, dans l'espace, on a supprimé ce qui se rapporte à la réduction de l'équation générale du deuxième degré ; par contre, on a précisé les points sur lesquels portera l'étude des quadriques avec les formes réduites.

Pour éviter de charger la mémoire de formules compliquées, on a spécifié en géométrie analytique que, dans toutes les questions relatives aux angles et aux distances, on emploierait les coordonnées rectangulaires.

Dans le même ordre d'idées, on a supprimé les notions de sciences naturelles précédemment exigées.

2° *Précision.* — L'ancien programme contient quelques expressions trop vagues ou trop générales, de telle sorte que les professeurs, ne sachant jusqu'où l'examinateur ira, fatiguent les élèves à force de vouloir prévoir des questions possibles. Dans cet ordre d'idées, rentrent d'abord des questions sur les principes qui sont déjà écartées, puis des questions comme les suivantes :

En trigonométrie :

Application à la résolution de *certaines* équations trigonométriques.

En algèbre :

Fonctions primitives qui s'obtiennent comme conséquences immédiates des dérivées ci-dessus indiquées.

En géométrie analytique :

Recherches des asymptotes à une courbe : *application aux courbes algébriques.*

Equations générales de coniques assujetties à *certaines* conditions. Equations d'un plan assujetti à *certaines* conditions, etc.

Ces questions ont été précisées et on a énuméré les applications demandées, ce qui allonge le texte, mais diminue le programme.

3° *Développement.* — Enfin, on s'est proposé de développer le programme. Il y a actuellement une tendance à faire tourner toute la géométrie analytique autour de l'étude des courbes et surfaces du second ordre *définies par les équations générales* et de la recherche de *lieux géométriques artificiels ;* les élèves apprennent par cœur des formules et des équations tout à fait inutiles. Comme nous l'avons déjà dit, on a supprimé dans le programme tout ce qui pourrait pousser les professeurs dans cette voie où les élèves se fatiguent sans aucun développement de l'intelligence et acquièrent le dédain des questions simples et précises, des applications numériques, des calculs entièrement terminés.

Beaucoup d'élèves sont incapables de construire une courbe définie par une équation numérique explicite $y = f(x)$, de calculer les maxima, minima, les points d'inflexion, etc. On a, en conséquence, introduit quelques questions qui obligeront les élèves à approfondir la représentation d'une fonction par une courbe sur des exemples numériques et à pousser les calculs jusqu'au bout. C'est pourquoi on a divisé la partie du programme relatif aux courbes en trois parties :

A) Etude des courbes définies par une équation explicite $y = f(x)$, cas très important au point de vue des applications :

B) Etude des courbes telles que les coordonnées d'un de leurs points soient exprimées en fonctions d'un paramètre, cas qui se présente constamment en cinématique ;

C) Courbes définies par une équation implicite, cas sur lequel portaient presque toutes les questions de l'ancien programme.

En trigonométrie on a ajouté la formule de Moivre et la formule d'Euler

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x.$$

Pour établir cette formule, on remarquera que, en prenant la dérivée de

$$y = \mathrm{L}\,(\cos x + i \sin x)$$

par les règles ordinaires et réduisant on trouve

$$y'_x = i\,;$$

on en conclut $y = ix + \mathrm{C}$.

$$\cos x + i \sin x = \mathrm{A}e^{ix}$$

et en faisant $x = 0, \mathrm{A} = 1$. Il ne sera soulevé aucune difficulté au sujet de cette démonstration.

Enfin, le programme se trouve complété, dans le sens que nous avons indiqué, par l'introduction de quelques notions de cinématique et de mécanique.

Si, pour les parties déjà anciennes et depuis longtemps classiques du programme, on a tenu à le préciser, à plus forte raison, en est-il ainsi dans ces parties nouvelles.

Ce qu'on a voulu tout d'abord, c'est que de futurs ingénieurs acquièrent le plus tôt possible quelques notions précises sur les machines les plus simples et que, sur chacune d'elles, il leur soit montré clairement qu'on ne peut pas gagner à la fois en force et en chemin parcouru, ce qui n'exige en aucune façon qu'on leur donne et surtout qu'on leur développe la notion du travail mécanique.

Galilée, sans cette notion, pouvait déjà dire à ses contemporains que celui qui chercherait un dispositif mécanique ayant par lui-même la

double vertu de faire gagner à la fois de la force et du temps ne mériterait pas d'avoir du temps, parce qu'il l'emploierait trop mal. C'est ce que les machines comprises au programme suffisent à faire concevoir.

Si ce but avait été le seul utile, le programme de statique y eût suffi. Si l'on y a ajouté les premiers éléments de la cinématique et de la dynamique du point, c'est surtout en vue de l'enseignement de la physique, cette science dont l'importance en industrie grandit chaque jour. Les professeurs de physique n'ont jamais pu se passer d'employer des notions de mécanique plus ou moins déguisées. Il a paru préférable de les donner franchement en les réduisant à ce qui est indispensable dans la physique élémentaire et restera indispensable dans la physique la plus industrielle, à savoir : la notion du champ de forces uniforme et celle du champ de forces centrales variant en raison directe de la distance au centre. C'est à bien en imprégner les débutants que s'attache le programme dès ses premières lignes, dès qu'on a défini l'accélération.

On ne demandera d'ailleurs aucun des théorèmes généraux relatifs à la dynamique du point.

En statique, on a, dès le début, et contrairement à l'usage, introduit la notion du frottement. C'est la réalité, ce que chacun conçoit. Elle est de nature à donner aux débutants des idées beaucoup plus justes que l'abstraction sur laquelle, d'ordinaire, on les tient peut-être un peu longtemps et non au profit de la claire vue des choses.

Cours universitaires.

Paris. *Collège de France*. — Mécanique analytique et mécanique céleste. M. HADAMARD. — Calcul des variations ; Equation aux dérivés partielles dans la mécanique des milieux déformables. Les mercredis à 2 heures 1/2 et les samedis à 3 heures 3/4. — *Analyse mathémathique*. M. JORDAN. Equations différentielles. Les jeudis et samedis à midi 3/4. —Physique générale et mathématique. M. BRILLOUIN. Productions propagation et réception des ondes électriques à travers l'espace. Rôle de la Terre. Les mercredis et samedis à 5 heures. — Mathématiques. (Fondation C.-A. Peccot). Contrairement à ce que nous annonçions dans notre dernier numéro, ce cours n'est pas continué cette année par M. Borel mais par M. LEBESGUE qui traitera de la notion d'intégrale définie et du développement trigonométrique des fonctions, les vendredis à 10 heures 1/2.

SUISSE

Neuchatel. *Académie*. — Calcul infinitésimal (3 h.). Géométrie analytique dans l'espace (2 h.). Théorie des nombres (1 h.). M. ISELY. — Théorie générale des fonctions (2 h.). Fonctions abéliennes (1 h.). M.-L. GABEREL. — Astronomie sphérique et géodésie (3 h.). M. le Grand Roy.— Mécanique analytique (2 h.). Physique math. (2 h.). M. R. WEBER.

CHRONIQUE

Prix Académiques.

PRIX DÉCERNÉS. — Dans sa séance du 22 décembre 1902, l'Académie des Sciences de Paris a décerné les prix afférents à l'année 1902. Comme les années précédentes nous indiquons ici ceux qui ont trait aux mathématiques.

Grand prix des sciences mathématiques (3000 francs). — Perfectionner en un point important, l'application de la théorie des groupes continus à la théorie des équations aux dérivées partielles : M. ERNEST VESSIOT, Professeur à la faculté des sciences de Lyon. Une mention très honorable est accordée à M. LE ROUX, chargé de cours à la Faculté des sciences de Rennes.

Prix Bordin. — Développer et perfectionner la théorie des surfaces applicables, sur le paraboloïde de révolution. Une mention honorable est accordée à M. DE TANNENBERG, professeur à la Faculté des sciences de Bordeaux.

Prix Francœur. — M. EMILE LEMOINE obtient le prix pour l'ensemble de ses travaux sur la géométrie.

Prix Poncelet. — M. MAURICE D'OCAGNE obtient le prix pour l'ensemble de ses travaux sur la Nomographie.

Prix extraordinaire de mécanique (6000 francs). — Un prix de 4000 francs est donné à M. ROMAZOTTI pour ses travaux relatifs aux bateaux sous-marins, et un prix de 2000 francs à M. DRIENCOURT.

Prix Montyon. — M. le commandant HARTMANN obtient le prix pour les expériences à l'aide desquelles il a su faire apparaître à la surface des corps élastiques, les lignes de glissement produites dans leurs déformations.

Prix Plumey. — M. le colonel RENARD, obtient le prix pour l'ensemble de ses travaux.

Prix Pierre Guzman. — Non décerné.

Prix Lalande. — Décerné à M. TRÉPIED, directeur de l'observatoire d'Alger pour l'ensemble de ses travaux.

Prix Valz. — M. HARTWIG, directeur de l'observatoire de Bamberg obtient le prix pour l'ensemble de ses travaux.

Prix Damoiseau. — M. GAILLOT, sous-directeur de l'observatoire de Paris obtient le prix pour l'ensemble de ses travaux.

Prix Janssen. — M. le Comte AYMAR DE LA BAUME-PLUVINEL, obtient le prix pour l'ensemble de ses travaux d'astronomie physique. Un encouragement et une médaille sont accordés au Docteur JEAN BINOT.

Prix Saintour. — Partagé entre M. Riquier, pour ses travaux sur l'intégration des systèmes d'équations aux dérivées partielles, et A. Minet pour ses recherches sur la préparation électrolytique de l'aluminium.

Prix fondé par Mme la Marquise de Laplace. — Œuvres complètes de Laplace décernées en prix au premier élève sortant de l'Ecole Polytechnique : M. Aubrun.

Prix Félix Rivot. — A réserver aux deux élèves entrant les premiers soit à l'Ecole des Mines, soit à l'Ecole des Ponts et Chaussées : MM. Aubrun, Niewenglowski, Barrillon, Bénézit.

Prix proposés. — *Prix Francœur* (1000 francs). — Prix annuel décerné à l'auteur des travaux utiles au progrès des sciences mathématiques pures et appliquées.

Prix Poncelet (2000 francs). — Destiné à récompenser l'ouvrage le plus utile aux progrès des sciences mathématiques pures ou appliquées, publié dans le cours des dix années qui auront précédé le jugement de l'Académie.

Grand prix des sciences mathématiques (3000 francs). — Perfectionner, en quelque point important, l'étude de la convergence des fractions continues algébriques.

Prix Bordin (3000 francs). — Développer et perfectionner la théorie des surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution.

Prix Vaillant (4000 francs). — Déterminer et étudier tous les déplacements d'une figure invariable dans lesquels les différents points de la figure décrivent des courbes sphériques.

Prix extraordinaire de mécanique (6000 francs). — Destiné à récompenser tout progrès de nature à accroître l'efficacité de nos forces navales.

Prix Montyon (700 francs). — Mécanique appliquée à l'agriculture, aux arts mécaniques ou aux sciences.

Prix Plumey (2500 francs). — Perfectionnement des machines à vapeur ou de la navigation à vapeur.

Prix Fourneyron (1000 francs). — Etude théorique ou expérimentale des turbines à vapeur.

Prix Pierre Guzman (100,000 francs). — Communiquer avec un astre autre que la planète Mars. Comme ce prix ne pourra probablement pas être décerné d'ici longtemps, les intérêts du capital feront un *prix quinquennal* qui sera décerné pour la première fois en 1905.

Prix Lalande (540 francs). — Observation ou mémoire le plus utile à l'Astronomie.

Prix Valz (460 francs). — Observation astronomique.

Prix G. Pontécoulant (700 francs). — Recherches de mécanique céleste.

Prix Janssen (Médaille d'or). — Astronomie physique.

Prix Damoiseau (2000 francs). — Il existe une dizaine de comètes dont l'orbite, pendant la période de visibilité s'est montrée de nature hyperbolique. Rechercher, en remontant dans le passé et tenant compte

des perturbations des planètes, s'il en était ainsi avant l'arrivée de ces comètes dans le système solaire.

Prix Binoux (2000 francs). — Histoire des sciences.

Médaille Arago. — Témoignage de haute estime donné par l'Académie à un travail scientifique de nature quelconque.

Prix Wilde (4000 francs). — Ce prix doit récompenser la découverte ou l'ouvrage le plus distingué sur l'Astronomie, la Physique, la Chimie, la Minéralogie, la Géologie ou la Mécanique expérimentale.

Prix Petit d'Ormoy (10.000 francs). — Mathématiques pures ou appliquées.

Prix Boileau (1300 francs). — Progrès suffisant de l'Hydraulique.

Prix de Mme la Marquise de Laplace. — Collection des œuvres de Laplace décernée au premier élève sortant de l'Ecole Polytechnique.

Prix Félix Rivot (2500 francs). — A partager entre les quatre élèves sortant chaque année de l'Ecole Polytechnique avec les numéros 1 et 2, dans le corps des mines et des Ponts et Chaussées.

Prix Lecomte (50.000 francs). — Découvertes scientifiques capitales.

Prix Saintour (3000 francs). — Décerné dans l'intérêt des sciences.

Le Prix Francœur.

Ainsi qu'on le voit dans liste précédente, le prix Francœur a été décerné cette fois à M. Emile Lemoine. Nous nous associons de grand cœur au témoignage d'estime de l'Académie et sommes heureux de voir récompenser un de nos amis qui à coup sûr méritait une telle distinction à des titres nombreux. M. Lemoine fut le principal créateur de la géométrie du triangle et le créateur exclusif de la géométrographie. Il s'est aussi occupé de certaines parties de la théorie des nombres et du calcul des probabilités. Avec M. Laisant il fut le fondateur de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* et a donné un grand nombre d'articles aux journaux mathématiques les plus divers. Atteint depuis quelques années d'une maladie cruelle, il a le grand regret de ne pas pouvoir toujours travailler autant qu'il le désire et de se refuser à de nouvelles publications de ses idées, publications qu'on lui demande de tout côté et notamment de l'étranger. La rédaction de l'*Enseignement mathématique* est heureuse de s'associer aux félicitations dont ce modeste savant est l'objet.

États-Unis.

Nécrologie. — M. le Pr John B. Runkle, qui dirigeait la section des sciences mathématiques de l'Institut technologique de Massachusett, est décédé le 8 juillet dernier. Il était né à Root le 11 octobre 1823. Runkle a dirigé l'Institut technologique pendant huit ans; il a été pendant plus de trente ans l'un des principaux appuis de l'*American Nautical Almanach*. Il a fondé et dirigé le *Mathematical Monthly* (1858-1861), qui fut l'un des premiers périodiques mathématiques américains.

CORRESPONDANCE

A propos du récent article de M. Vidal.

En partant des définitions habituelles de la droite et du plan, on prouve qu'il existe entre l'hypoténuse a et les côtés b et c d'un triangle rectangle l'une des relations

$$ch\left(\frac{a}{l}\right) = ch\left(\frac{b}{l}\right)\, ch\left(\frac{c}{l}\right), \qquad a^2 = b^2 + c^2.$$

suivant que l'on rejette ou que l'on admet le postulat de la parallèle unique et réciproquement. Il en résulte que le postulat de la parallèle est indémontrable en se servant des définitions seules puisque ces définitions conduisent à deux relations distinctes, dont la seconde seulement a pour conséquence ce postulat.

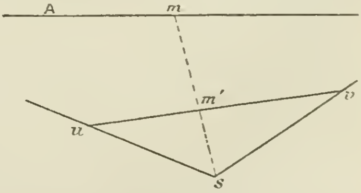
L'argument de la pseudosphère est parfaitement *probant* quand on l'entend d'une pseudosphère enroulée un nombre infini de fois sur elle-même; il est *inutile* pour ceux qui connaissent la géométrie plane lobatchefskienne; *incomplet* parce qu'il prouve seulement l'indémontrabilité du postulat de la parallèle unique par des constructions planes.

Gand, octobre 1902. P. MANSION.

Remarque sur la géométrie non-euclidienne.

Il y a des géomètres qui pensent que la géométrie projective habituelle est indépendante de la théorie des parallèles, en sorte que ses théorèmes subsisteraient aussi dans la géométrie non-euclidienne.

Toutefois il y a une différence.



Soit A une droite, s un point, puis su et sv les deux parallèles différentes du point s à la droite A, qui existent dans la géométrie de Lobatchewsky. Choisissant à volonté deux points u et v sur l'une et l'autre desdites parallèles, je considère la droite uv comme l'axe de perspective, s étant le centre de projection. Cela étant, j'observe que si le point mobile m parcourt la droite indéfinie A, sa projection m parcourra le segment de longueur finie uv ; les points placés sur les deux prolongements de uv ne correspondront à aucun point de la ligne A. C'est là une différence radicale entre les deux géométries. X.

BIBLIOGRAPHIE

Alfredo Capelli. — **Lezioni sulla teoria delle forme algebriche.** Un vol. di 295 p. gr. in-8° (in litografia); L. 10. — B. Pellerano, Napoli 1902.

En publiant cette rédaction, faite par lui-même, du cours qu'il a professé à l'Université de Naples sur la théorie des formes algébriques, M. Capelli prévient expressément le lecteur, dans sa préface, qu'il a voulu s'en tenir à un exposé théorique tout à fait général, sans autres applications que quelques rares exemples jugés utiles pour éclaircir certaines propositions abstraites. Et en effet, on chercherait vainement dans cet ouvrage les résultats si nombreux et variés acquis à la science dans les théories spéciales des formes ou système de formes binaires, ternaires, quaternaires, des formes bilinéaires, etc. Par contre, on y trouvera un exposé remarquablement méthodique et rigoureux d'une théorie qui a été édifiée surtout grâce aux recherches personnelles de l'éminent professeur, et dont la généralité ne laisse rien à désirer, car elle s'attaque directement et de prime abord aux systèmes de tant de formes simultanées indépendantes qu'on voudra de n'importe quels ordres, renfermant un nombre quelconque de séries de variables n^{aires} tant cogrédientes que contragrédientes. Cette théorie est exclusivement fondée sur la considération de l'opération polaire, à laquelle l'auteur ramène successivement (au besoin par l'introduction de séries de variables auxiliaires qui disparaissent finalement du résultat) toutes les autres opérations, telles que celles de Cayley et d'Aronhold, qui jouissent aussi de la propriété de conserver le caractère d'invariance. Les relations entre ces diverses opérations, répétées ou combinées entre elles, sont étudiées en détail, notamment au point de vue des conditions de permutabilité. — Pour leur application à la construction des formes concomitantes d'un système donné, et pour la représentation de ces formes, il est fait exclusivement usage de la notation symbolique allemande ; néanmoins quelques leçons du chapitre II sont consacrées à la formation et à la discussion des équations différentielles qui caractérisent les covariants, les semi-covariants, etc., ainsi qu'aux propriétés si importantes des sources (péninvariants). L'ouvrage se termine par la démonstration du théorème de M. Gordan complété par M. Hilbert, sur l'existence de systèmes finis complets de covariants pour tout système de formes fondamentales à plusieurs séries de variables n^{aires} cogrédientes.

Dans un appendice d'une trentaine de pages, l'auteur a rejeté les développements de la théorie générale qui concernent spécialement le domaine binaire, savoir les formules de réduction indispensables pour simplifier les représentations symboliques (celles qui concernent le domaine ternaire ont été données au § XIV du chap. II), le développement de Clebsch et Gordan, les propriétés de l'opération de transvection (Ueberschiebung) et les relations identiques existant entre les formes que fournit l'application répétée de cette opération.

R. Perrin (Paris).

L. Couturat. — **La logique de Leibniz**, d'après des documents inédits. (Collection historique des grands philosophes). Un vol. gr. in-8°, 608 p., prix : 12 fr. ; F. Alcan, Paris.

Qu'il reste de Leibniz des documents inédits d'une certaine importance et en assez grand nombre, voilà certes un fait qui surprendra bien des lecteurs. On en trouvera cependant une preuve éclatante dans cet ouvrage, de plus de six cents pages, consacrées à la *Logique de Leibniz d'après des documents inédits*, et dans lequel il n'est pas un chapitre qui ne soit d'un réel intérêt, tant pour le philosophe que pour le mathématicien.

Il est vrai que la publication des œuvres de Leibniz a été faite dans des conditions très défavorables, sinon défectueuses. Les œuvres n'ont du reste été publiées qu'incomplètement, et ce qui est imprimé est dispersé dans des éditions partielles ou fragmentaires. Quant aux nombreux auteurs qui, depuis bientôt deux siècles, ont consacré des travaux au grand philosophe allemand, ils n'ont, pour la plupart, pas eu recours aux documents primitifs. C'est ce qu'a constaté M. Couturat lorsqu'il prit connaissance des manuscrits conservés à la bibliothèque de Hanovre, « Nous croyions, dit-il dans la *Préface*, n'avoir plus qu'à glaner après tant d'éditeurs : or nous avons rapporté une moisson si riche de documents nouveaux, que nous avons été obligé de refondre entièrement notre livre et de récrire certains chapitres en totalité », notamment le chapitre consacré à la langue universelle et celui qui a pour objet le calcul logique.

Les deux premiers chapitres traitent de la *Syllogistique* (32 p.) et de la *Combinatoire* (18 p.). L'auteur indique d'abord ce que pensait Leibniz de la logique traditionnelle d'Aristote et des scolastiques et en particulier de la théorie du syllogisme pour laquelle il a toujours témoigné une grande admiration. Dès sa quatorzième année, il porte son attention sur ces questions. A l'âge de dix-neuf ans, il montre dans son *De Arte Combinatoria*, que l'une des principales applications de l'art des combinaisons est la logique, et tout particulièrement la logique de l'invention. M. Couturat montre que la logique conçue par Leibniz n'est pas un développement ou un perfectionnement de celle d'Aristote, mais qu'elle est une sorte de *Mathématique nouvelle*, selon l'expression employée par Leibniz lui-même.

La logique de l'invention conduisit le jeune philosophe à la conception d'une *Langue universelle* (chap. III, 30 p.) et d'une *Caractéristique universelle* (chap. IV, 32 p.). Au milieu du XVII^e^ siècle, il existait déjà plusieurs projets de langue internationale. Mais il ne s'agissait guère que de systèmes artificiels et arbitraires sans base logique et philosophique. Leibniz s'occupa, dès sa vingtième année, du plan d'une langue universelle ayant une base philosophique. M. Couturat fait une esquisse de ce plan ; il nous montre comment Leibniz cherche à simplifier la grammaire et la syntaxe, puis comment, par la conception d'un « alphabet des pensées humaines », il est conduit hors des limites de son projet primitif, à l'institution d'une caractéristique universelle et à l'élaboration d'une *Encyclopédie* (chap. V, 57 p.). Leibniz envisage la caractéristique comme un instrument puissant permettant d'effectuer les raisonnements et les démonstrations par un calcul analogue aux calculs arithmétique et algébrique. « En somme, c'est la notation algébrique qui incarne pour ainsi dire l'idéal de la caractéristique et qui devra lui servir de modèle ». Il attache une grande importance au choix des symboles en mathématiques et il attribue les progrès qu'il a fait faire à cette

branche, uniquement à ce qu'il est parvenu à créer des symboles bien adaptés aux relations qu'ils doivent représenter. Le plus bel exemple que l'on puisse citer est celui du Calcul infinitésimal. L'invention la plus célèbre de Leibniz se trouve donc liée à ses recherches dans le domaine de la logique, aussi M. Couturat insiste-il à juste titre sur l'unité que prend l'œuvre philosophique et scientifique de Leibniz, dès que l'on tient compte de sa caractéristique universelle.

L'institution de la caractéristique est intimement liée à l'élaboration de l'*Encyclopédie* qui à son tour présupposait la connaissance de la *Science générale*. M. Couturat rend compte des divers projets que Leibniz a conçus au cours de sa carrière et montre les raisons qui ont fait échouer cette vaste entreprise d'une encyclopédie. Il fait une étude très approfondie de la *Science générale* (chap VI. 107 p.), qui constituait en quelque sorte toute la logique de Leibniz, et qui devait être une méthode universelle applicable à toutes les sciences. Ce chapitre, l'un des plus importants de cet ouvrage, sera lu avec un grand intérêt,non seulement par les philosophes, mais aussi par le mathématicien qui y trouvera entre autres une série de paragraphes consacrés à la théorie des probabilités. Pour Leibniz, cette théorie constitue une « partie de la logique »; il envisage la logique des probabilités comme un complément naturel de la logique de la certitude, surtout dans le domaine de l'art d'inventer.

Leibniz a essayé de faire entrer la logique dans le cadre des sciences mathématiques, ou, tout au moins, de la revêtir d'une forme mathématique, et, afin d'y parvenir, il a élargi considérablement le domaine de la mathématique. Il divise celle-ci en deux branches principales : la science des grandeurs ou de l'égalité, des rapports et des proportions, qui est la mathématique traditionnelle; et la science des formes ou de la similitude, de l'ordre et de la disposition, qui est la combinatoire. En envisageant les sciences mathématiques à un point de vue aussi large, Leibniz a été l'un des premiers à s'apercevoir de l'existence de ce qu'il appelle la *Mathématique universelle* (chap. VII, 40 p.). Il conçoit sa logique comme une « algèbre universelle pouvant s'appliquer à tous les objets susceptibles de déterminations précises et comprenant autant d'algèbres spéciales qu'il y a de genres de relations entre ces objets ».

Parmi ces algèbres théoriquement possibles, il a essayé d'en élaborer deux, le *Calcul logique* et le *Calcul géométrique*. Le premier consiste en une théorie de l'identité et de l'inclusion (chap. VIII, 65 p.). Les divers systèmes qu'il a ébauchés, et dont l'un est inédit, nous montrent que Leibniz a entrevu les principes de la logique algorithmique, développée par Boole un siècle et demi après lui.

Quant au *Calcul géométrique* (chap. IX, 43 p.), il devait fournir un instrument mieux approprié à l'étude des figures que ne l'est la géométrie analytique; ce devait être une sorte de caractéristique géométrique. Leibniz la rattacha principalement à la théorie de la congruence et de la similitude, mais il rencontra de nombreuses difficultés et ne parvint pas à édifier son calcul géométrique sur des principes clairs et solides. S'il n'a pas atteint le but qu'il s'était proposé, cela tient à ce qu'il ne parvint pas à affranchir la géométrie de la considération de la grandeur et à exprimer directement la situation. En dépit de l'opinion des contemporains de Leibniz le but à atteindre n'était ni chimérique, ni stérile; et effectivement il a été atteint par

Grassmann qui, sans connaître le but de Leibniz, a établi les principes d'un calcul géométrique dans son *Ausdehnungslehre* (1844). Ainsi par ses projets, d'une conception si hardie, d'un calcul logique et d'un calcul géométrique, Leibniz a anticipé de près de deux siècles sur les progrès de l'esprit humain.

M. Couturat fait suivre son exposé de quelques réflexions finales (11 p.), qui ont pour but de montrer en quoi la logique de Leibniz est insuffisante et incomplète. Il estime que si Leibniz a échoué dans ses projets d'un calcul logique, cela est dû à un « respect excessif pour l'autorité d'Aristote », à son attachement à la tradition scolastique, et que, s'il n'est parvenu à édifier son calcul géométrique sur des bases rationnelles, la principale entrave est due à l'autorité d'Euclide. Leibniz avait pleinement conscience d'une logique plus vaste et plus compréhensive que la logique classique. « Malheureusement, dit M. Couturat dans sa *Conclusion*, ses essais inachevés et, somme toute, infructueux, sont restés presque entièrement inédits et ignorés pendant près de deux siècles; les philosophes ont continué à adorer Aristote, et ce sont des mathématiciens qui ont eu l'honneur, dans la seconde moitié du XIX^e^ siècle, de ressusciter, sans le savoir, la pensée de Leibniz. L'algèbre de la Logique paraît aujourd'hui définitivement fondée; et la Logique des relations commence à se constituer. Il ne faut donc pas dire que la Logique est une science faite (comme si une science humaine pouvait jamais être achevée !); la vérité est que la plus grande partie reste à faire ».

Le livre se termine par des *Appendices* (96 p.) et par des *Notes* (54 p.), relatives aux documents cités. Ces appendices, au nombre de cinq sont intitulés : Précis de logique classique. Leibniz et Hobbes, leur Logique, leur Nominalisme. Sur quelques inventions mathématiques de Leibniz qui se rapportent à la Combinatoire et à la Caractéristique. Sur Leibniz fondateur d'Académies. Sur le calcul géométrique de Grassmann.

En résumé, dans cet ouvrage, d'un caractère essentiellement historique, M. Couturat donne à la fois une analyse et une reconstitution de la Logique du grand philosophe allemand. Son exposé accompagné de nombreuses citations et références, facilitera dans une large mesure l'étude de la philosophie de Leibniz.

H. Fehr.

Snyder and Hutchinson. — **Differential and Integral Calculus**; 1 vol. in-8°, relié, 320 p.; prix : 2 dollars 50 ; American book Company, New-York, Cincinnati et Chicago.

La série des publications de l'Université de Cornell, à laquelle appartient ce volume, est adoptée et fort appréciée dans les collèges et les Universités des Etats-Unis. Le but de l'ouvrage de MM. Snyder et Hutchinson a été de présenter un exposé rapide, à la fois de tout le calcul infinitésimal dans sa partie élémentaire. Bien qu'on ait utilisé les précédents ouvrages, plus amplement développés, le calcul intégral a cependant fait l'objet d'une rédaction pour ainsi dire entièrement nouvelle. On trouve de nombreux exercices gradués, et des exemples bien choisis, tantôt dans le texte, tantôt à la fin des chapitres. La méthode suivie est rigoureuse, mais simple et pratique, comme il convient dans un livre qui s'adresse aux étudiants, auxquels il est dangereux de jeter le doute dans l'esprit, sous prétexte de raffinements exagérés.

Peut être les auteurs auraient-ils bien fait de renoncer à l'emploi de la fonction *vers* (sinus verse $=1-\cos.$) abandonné en Europe depuis plus d'un

siècle, alors que tant de bons esprits proposent au contraire de renoncer aux sécantes et cosécantes, et même de se borner aux trois fonctions fondamentales, sin., cos. et tang. Mais ce n'est là qu'une insignifiante critique, et elle ne porte aucune atteinte aux mérites d'un excellent ouvrage, qui sera utilement étudié par les élèves et consulté par les professeurs.

Pour donner une idée du contenu de ce volume, nous reproduisons simplement ci-après les titres des divers chapitres.

Calcul différentiel : Principes fondamentaux. — Différentiation des formes élémentaires. — Différentiations successives — Développement des fonctions. Formes indéterminées. — Mode de variation des fonctions d'un variable. — Vitesses et différentielles. — Différentiation des fonctions de deux variables. — Changement de variable. — Tangentes et normales ; coordonnées polaires. — Dérivée d un arc, d'une corde, d'un volume, et d'une surface de révolution. — Asymptotes. — Concavité, convexité ; points d'inflexion. — Contact et courbure ; développées et développantes. — Points singuliers. — Enveloppes.

Calcul intégral : Principes généraux d'intégration. — Formules de réduction. — Intégration des fractions rationnelles. — Intégration par rationalisation. — Intégration des fonctions trigonométriques et autres transcendantes. — Intégration comme sommation. — Applications géométriques. — Intégrations successives.

C. A. L.

Ern. Weinnoldt. — **Leitfaden der analytischen Geometrie**, bearbeitet auf Veranlassung der K. Inspektion des Bildungswesens der Marine. 1 vol. cartonné, gr. in-8°, 80 pages; prix : Mk. 1,60. B. G. Teubner, Leipzig, 1902.

Ce *Précis* contient les premiers éléments de Géométrie analytique limités à la notion de coordonnées, aux problèmes essentiels concernant le point, la droite, la circonférence et les coniques. Présentées sous une forme à la fois claire et concise, ces notions forment le minimum des connaissances que l'on peut exiger dans ce domaine de tous ceux qui ont suivi un enseignement élémentaire de Géométrie analytique. Elles sont accompagnées d'application pratiques et d'exercices numériques.

Nous sommes persuadés que ce petit manuel est appelé à rendre d'utiles services non seulement aux élèves de l'Ecole de Marine auxquels il est spécialement destiné, mais aussi à ceux des établissements secondaires pour lesquels il constituera un excellent guide dans une première initiation.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

Bulletin astronomique, publié par l'observatoire de Paris sous la direction de H. Poincaré, G. Bigourdan, O. Callandreau, H. Deslandres, R. Radau. Publication mensuelle gr. in-8°. Paris, Gauthier-Villars. Abonnement annuel pour l'Union postale : 18 fr., 19e année, 1902.

Août. — H. Poincaré : Sur les planètes du type d'Hécube. — Esmiol : Observations de planètes. — Revue des publications.

Septembre. — L. Schulhof : Détermination de l'orbite de la comète périodique de Swift.— Rambaud, Sy et Villatte : Observations de petites planètes, faites à Alger. — Revue des publications.

Octobre.— M. Lœwy et P. Puiseux : Sur la structure et l'histoire de l'écorce lunaire. — Coggia : Observations de planètes faites à Marseille. — C.-V.-L. Charlier : Sur la convergence des développements suivant les puissances des masses des planètes. — Revue des publications.

Novembre. — Andoyer : Sur la théorie de la lune. — Salet : Observations de planètes, faites à Paris. — P. Caubet : Détermination des éléments des clichés photographiques d'une même zone. — Revue des publications.

Bulletin des Sciences mathématiques, rédigé par G. Darboux, E. Picard, J. Tannery. Publication mensuelle, gr. in-8°. Paris, Gauthier-Villars. Abonnement annuel : 20 fr. Tome XXVI. 1902.

Mai. — E. Picard : Sur les intégrales doubles de fonctions rationnelles dont tous les résidus sont nuls. — Comptes rendus et analyses.

Juin. — N. Delaunay : Sur les calculateurs cinématiques des fonctions elliptiques. — A. Durand : Sur un théorème relatif à des moyennes. — Comptes rendus et analyses.

Juillet. — E. Estanave : Thèses de Sciences mathématiques soutenues devant la Faculté des Sciences de Paris et devant les Facultés de province dans le courant du XIXe siècle. — Comptes rendus et analyses.

Août. — E. Estanave : (Suite de l'article précédent). — Comptes rendus et analyses.

Septembre. — E. Estanave : (idem). — Comptes rendus et analyses (Voir particulièrement dans ce numéro un article de M. H. Poincaré sur les *Grundlagen der Geometrie* de M. Hilbert.

Bulletin des Sciences mathématiques et physiques élémentaires dirigé par L. Girard et Ch. Michel, paraissant deux fois par mois en cahiers in-8°. Paris, Société d'Editions scientifiques. Abonnement annuel : 6 fr. 8e année, 1902-1903.

Fasc. 1 à 4. — L.-G. : Sur l'enseignement de la géométrie. — G. Lehr : Théorème de Pythagore. — A. Bonnefoy : Volume du tétraèdre. — A. Durand : Variation des fonctions. — Divisibilité par 7.

Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris, publiés par les secrétaires perpétuels. Cahiers hebdomadaires in-4°. Paris, Gauthier-Villars. Abonnement annuel. Union postale : 34 fr, t. CXXXV. 1902.

1er septembre. — E. Maillet : Sur les fonctions entières et quasi-entières et les équations différentielles. — R. Liouville : Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes.

8 septembre. — P. Painlevé : Sur l'irréductibilité des transcendantes uniformes définies par les équations différentielles du second ordre. — H. Andoyer : Sur l'accélération séculaire de la longitude moyenne de la Lune. — M. Borrelly et L. Fabry : Observations de la comète *b* 1902, découverte le 1er septembre par M. Périne et le 2 septembre d'une manière indépendante, par M. Borrelly, à l'observatoire de Marseille. — P. Chofardet : Observations de la comète 1902 *b*, faites à l'Observatoire de Besançon. — E. Maillet : Sur les équations différentielles et la théorie des ensembles. — A. Turpain : Sur les propriétés des enceintes fermées, relatives aux ondes électriques.

15 septembre. — B. Baillaud et Montangerand : Sur la surface focale principale de l'objectif de l'équatorial photographique de l'observatoire de Toulouse. — J. Semenov : A propos de la note de M. Th. Tommasina, sur le mode de formation des rayons cathodiques et des rayons de Röntgen. — Ph.-A. Guye et F.-L. Perrot : Sur la formation des gouttes liquides et les lois de Tate.

22 septembre. — J. Boussinesq : Extension du principe de Fermat, sur l'économie du temps, au mouvement relatif de la lumière dans un corps transparent hétérogène, animé d'une translation rapide. — H. Deslandres : Recherches spectrales sur la rotation de la planète Uranus.

29 septembre. — J. Guillaume : Observations de la comète Perrine-Borrelly (1902 *b*) faites à l'équatorial Brünner de l'observatoire de Lyon. — H. Deslandres ; Organisation, à l'observatoire de Meudon, des spectrographes automatiques dits *des vitesses*, qui enregistrent les mouvements radiaux et l'épaisseur de la chromosphère solaire. — G. Tzitzéica : Sur la déformation continue des surfaces.

6 octobre. — J. Guillaume : Observations du soleil faites à l'observatoire de Lyon pendant le premier trimestre de 1902. — G. Leveau : Comparaison des tables de Vesta avec les observations méridiennes faites de 1890 à 1900. — W. Stekloff : Remarque sur un problème de Clebsch sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini et sur le problème de M. de Brun. — M. de Séguier : Sur un théorème de M. Frobenius.

13 octobre. — O. Callandreau : Sur quelques particularités de la théorie des étoiles filantes. — Existence de points radiants stationnaires par 45° de latitude. — J. Boussinesq : Démonstration générale de la construction des rayons lumineux par les surfaces d'onde courbes. — M. Servant : Sur l'habillage des surfaces. — W. Kaufmann : La déviation magnétique et électrique des rayons Becquerel et la masse électromagnétique des électrons. — J. Thovert : Sur une conséquence de la théorie cinétique de la diffusion. — M. Dussaud : Sur un nouveau procédé destiné à faciliter l'écriture et le calcul aux aveugles.

Note. — *Ce fascicule porte l'annonce d'un changement de prix de l'abonnement. Les abonnés aux* Comptes rendus de l'Académie *seront désormais servis aux conditions suivantes :*

Abonnement annuel : Paris 30 fr. Départements 40 fr. Étranger : 44 fr.

20 octobre. — Haton de la Goupillière : Sur le problème des brachistochrones. — Ph. Guye et F.-L. Perrot : Sur la formation des gouttes liquides et des lois de Tate. — F. Beaulard : Sur les paramètres élastiques des fils de soie. — L. Houllevigue : Lames minces métalliques obtenues par projection cathodique.

27 octobre. — P. Painlevé : Démonstration de l'irréductibilité absolue de l'équation $y'' = 6y^2 + x$. — Haton de la Goupillière : Quelques cas d'intégration de l'équation des brachistochrones. — J.-A. Normand : Sur la cavitation dans les navires à hélices. — R. Blondlot : Sur la vitesse de propagation des rayons X. — J. Guillaume : Observations du soleil, faites à l'observatoire de Lyon, pendant le deuxième trimestre de 1902. — L. Schlesinger : Sur la théorie des fonctions algébriques. — A.-S. Chessin : Sur l'équation de Bessel avec second membre. — P.-J. Suchar : Sur un exemple de transformation corrélative en mécanique. — V. Crémieu : Précaution à prendre pour l'emploi des fils de cocons comme fils de torsion. — J.-H. Coblyn : La vision à distance par l'électricité.

3 novembre. — R. Blondlot : Sur l'égalité de la vitesse de propagation des rayons X et de la vitesse de la lumière dans l'air. — M. d'Ocagne : Sur la résolution nomographique du triangle de position pour une latitude donnée. — R. Liouville : Sur les transcendantes uniformes définies par les équations différentielles du second ordre. — A. Leduc et P. Sacerdote : Sur la formation des gouttes liquides et la loi de Tate.

10 novembre. — P. Painlevé : Sur les transcendantes uniformes définies par l'équation $y'' = 6y^2 + x$. — P. Duhem : Sur les quasi-ondes. — R. Blondlot : Observation et expériences complémentaires relatives à la détermination de la vitesse des rayons X. Sur la nature de ces rayons. — J. Collet : La pesanteur le long du parallèle moyen. — L. Autonne : Sur les substitutions crémoniennes dans l'espace. — M. Jouguet : Sur la rupture et le déplacement de l'équilibre. — E. Cartan : Sur l'équivalence des systèmes différentiels. — W. Stekloff : Sur certaines égalites remarquables. — E. Van Aubel : Sur le phénomène de Hall et le pouvoir thermo-électrique.

17 novembre. — M. d'Arsonval : Pendule de Foucault simplifié. — E. Vallier : Sur la loi des pressions dans les bouches à feu. — P. Duhem : Sur l'analogie entre les rayons X et les oscillations hertziennes. — W. Stekloff : Sur la représentation approchée des fonctions. — E. Cartan : Sur la structure des groupes infinis.

24 novembre. — M. Perrotin : Vitesse de la lumière ; parallaxe solaire. — J. Guillaume : Observations du soleil faites à l'observatoire de Lyon (équatorial Brünner de 0 m. 16), pendant le troisième trimestre de 1902. — E. Maillet : Sur les fonctions monodromes à point singulier essentiel isolé. — E. Esclangon : Sur une extension de la notion de périodicité.

1er décembre. — G. Mittag-Leffler : Sur l'intégrale de Laplace-Abel. — P. Duhem : Sur les conditions nécessaires pour la stabilité de l'équilibre d'un système visqueux. — E. Vallier : Tracé des courbes de pressions. — W. Stekloff : Sur quelques conséquences de certains développements en séries analogues aux développements trigonométriques. — R. Levavasseur : Sur les congruences à plusieurs inconnues relativement à un nombre premier impair. — M. Auric : Sur la généralisation des fractions continues. — R. Liouville : Sur les transcendantes uniformes définies par des équations différentielles du second ordre. — M. Ponsot : Méthode pour évaluer les

températures dans l'échelle thermodynamique centigrade. — J. Collet : La pesanteur le long du parallèle moyen.

8 décembre. — P. Painlevé : Sur l'irréductibilité de l'équation $y'' = 6y^2 + x$. — J. Bigourdan, G. Fayet, P. Salet : Observations de la nouvelle comète Giacobini (*d*. 1902). — M. Combebiac : Sur les propriétés du plan au point de vue de l'*Analysis situs*. — M. Krause : Sur une formule sommatoire dans la théorie des fonctions à deux variables.

15 décembre. — P. Duhem : Sur la stabilité de l'équilibre et les variables sans inertie. — J. Mascart : Perturbations indépendantes de l'excentricité. — P. Chofardet : Observations de la comète Giacobini (1902 *d*) faites à Besançon. — R. d'Adhémar : Sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, du type hyperbolique, à plus de deux variables indépendantes.

22 décembre. — Séance publique annuelle. Prix décernés et proposés. Voir l'*Enseignement mathématique*, p. 62.

29 décembre. — P. Duhem : Des conditions nécessaires pour qu'un fluide soit en équilibre stable. — R. Blondlot : Sur la vitesse de propagation des rayons X dans l'air et dans différents milieux. — MM. Rambaud et Sy : Observations de la comète (*d* 1902) faites à l'Observatoire d'Alger. — D. Eginitis : Observation des Perséides, Léonides et Biélides, faites à Athènes en 1902. — J. Hadamard : Sur les fonctions entières. — W. Stekloff : Sur la représentation approchée des fonctions. — M. Lerch : Sur la formule fondamentale de Dirichlet qui sert à déterminer le nombre des classes de formes quadratiques binaires définies. — E. Lindelöf : Une application de la théorie des résidus au prolongement analytique des séries de Taylor. — B. Mayor : Sur une représentation plane de l'espace et son application à la statique graphique.

Nouvelles annales de mathématiques, dirigées par C.-A. Laisant et E. Duporcq. Publication mensuelle in-8°. Paris, Gauthier-Villars. Abonnement annuel, Union postale : 18 fr. Série 4, t. II, 1902.

Mai.— P. Appell : Sur les expressions des tensions en fonction des déformations dans un milieu élastique homogène et isotrope. — C. Maltézos : Sur la chute des corps dans le vide et sur certaines fonctions transcendantes. — M. d'Ocagne : Sur les adjointes des directions normales d'une conique. — M. Fréchet : Sur quelques propriétés de l'hypocycloïde à trois rebroussements. — E. Jaggi : Sur les zéros des fonctions entières. — Certificats de géométrie supérieure, correspondance, questions et solutions, notice sur X. Antomari.

Juin. — A. Greenhill : Le pendule simple sans approximations. — E. Duporcq : Sur les transformations de contact dans le plan. — V. Hioux : Nouvelle démonstration du théorème de Feuerbach. — M. Bauer : Sur les congruences identiques. — Concours divers.

Juillet. — G. Pirondini : Sur les normales d'un hélicoïde. — J. Réveille : Note de géométrie. — Philbert du Plessis : Concours d'admission à l'École polytechnique en 1902. — Certificats d'analyse et d'algèbre supérieure, agrégation et concours pour l'École normale.

Août. — Mannheim : Note de géométrie. — C.-A. Laisant : Analogies entre les courbes funiculaires et les trajectoires d'un point. — V. Jamet : Sur la théorie des forces centrales. — E. Jaggi : Détermination des fonctions

d'une variable qui admettent les substitutions d'un groupe donné. — Certificats de calcul infinitésimal.

Septembre. — M. Blutel : Du rôle de l'enseignement des mathématiques dans la formation de l'esprit. — Niels Nielsen : Equations différentielles linéaires obtenues par le produit de deux fonctions cylindriques. — E.-N. Barisien : Généralisation du problème de Malfatti. — Certificats de calcul différentiel et intégral.

Octobre. — E. Carvallo : Conférence sur les notions de calcul géométrique utilisées en mécanique et en physique. — A. Bienaymé : Sur un problème de substitutions étudié par Monge. — M. Fréchet : Généralisation du théorème de Tissot. — E. Iaggi : Application aux fonctions circulaires et elliptiques d'une méthode générale de détermination des fonctions dont on donne le groupe de substitutions. — Bibliographie. — Certificats de calcul infinitésimal. — Questions et solutions.

P. Bachmann. — **Niedere Zahlentheorie**. Erster Teil; un vol. relié, in-8°, 402 p. (t. X, 1 de la *Collection Teubner*); prix : M. 14; B. G. Teubner, Leipzig, 1902.

Bardey-Pietzker. — **Anleitung zur Auflösung eingekleideter algebraischer Aufgaben**. Zweite, völlig umgearbeitete Auflage von Fr. Pietzker; un vol. cart. in-8°, 160 p.; prix : Mk. 2,60; B. G. Teubner, Leipzig-Berlin, 1903.

W. Brusch. — **Grundriss der Elektrotechnik** für technische Lehranstalten. Mit 248 Abbildungen; un vol. relié, gr. in-8°, 168 p.; prix : Mk. 3; B. G. Teubner, Leipzig, 1902.

Rob. Fricke. — **Hauptsätze der Differential und Integral Rechnung**, als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen. Dritte umgearbeitete Auflage; un vol. in-8°, 218 p.; prix : Mk. 5. Fr. Vieweg u. Sohn, Braunsschweig, 1902.

Godefroy (Maurice). — **Théorie élémentaire des Séries**. Limites, Séries à termes constants et variables. — Fonctions circulaire, exponentielle et Γ. Avec une préface de L. Sauvage. 1 vol. gr. in-8° de VIII-266 pages avec figures. 1903. 8 francs. Gauthier-Villars, Paris.

G. Holzmüller. **Elemente der Stereometrie: Vierter Teil**. Fortsetzung der schwierigeren Untersuchungen : Berechnung und stereometrische Darstellung von statischen, Trägheits-und Centrifugal-Momenten homogener Raumgebilde. Simpsonsche Regel, verallgemeinerte Schichtenformel, gewisse Zuordnungen und konforme Abbildungen im Dienste solcher Bestimmungen. Nachtrag über das Katenoïd, seine Krümmungsverhältnisse und sphärische Abbildung und über seiner Zusammenhang mit der Gaussschen Pseudosphäre und der Minimalschraubenregelfläche. 1 vol. in-8°, de 311 p.; prix : br. M. 9; relié M. 9,50; G. J. Goeschen, Leipzig, 1902.

E. Landfriedt. — **Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale**. 1 vol. relié, in-8°, 294 p.; t. XXXI de la *collection Schubert*; prix : Mk. 6,40; G. J. Goeschen, 1902.

E. Landfriedt.— **Thetafunktionen und hyperelliptische Funktionen**. 1 vol. relié, in-8°, 145 p.; t. XLVI de la *Collection Schubert*; prix : Mk. 3,40; G. J. Goeschen, Leipzig, 1902.

G. Loria. — **Le Trasfigurazioni di una Scienza.** Discorso. **Donne Matematiche.** Lettura. Seconde édition augmentée d'une note. 1 broch. gr. in-8° de 54 p. G. Mondovi. Mantoue, 1902.

W. Ludwig. — **Die Horopterkurve.** mit einer Einleitung in die Theorie der kubischen Raumkurve. 1 broch. gr. in-8° de 36 p. ; M. Schilling, Halle 1902.

H. Müller und A. Hupe. — **Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen,** B. II Oberstufe. *Abteilung* 2 : Synthetische und analytische Geometrie der Kegelschnitte. Darstellende Geometrie. 1 vol. relié, in-8°, 188 p. ; prix : Mk. 2,40 ; B. G. Teubner, Leipzig, 1902.

Emilie Norton Martin. — **On the Imprimitive Substitution Groups of Degree fifteen and the Primitive Substitution Groups of Degree eighteen.** Dissertation presented to the Faleuty of Bryn Mawr College for the Degree of Doctor of Philosophy. The Lord Baltimore Press, the Friedenwald Company, Baltimore (U. S. A).

G. Peano. — **Aritmetica generale e algebra elementare.** Ouvrage rédigé avec les symboles de la logique mathematique. Ditta G. B. Paravia et C. 1 vol. gr. in-8° de 144 pages. Turin, 1902. Prix : 2,40.

Schubert (Herm.). — **Niedere Analysis.** Erster Teil : Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kettenbrüche und diophantische Gleichungen. (t. V. de la *Collection Schubert*), 1 vol. in-12, 181 p. : prix : Mk. 3,60. G.-J. Göschen, Leipzig, 1902.

M. Schuster. — **Geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie.** Planimetrie ; Stereometrie ; Ebene-sphärische Trigonometrie, nach konstruktiv-analytischer Methode bearbeitet. Ausgabe A : Für Vollanstalten. Zweiter Teil : *Trigonometrie*. 1 vol. relié, in-8°, 112 p. ; prix : Mk. 1,60 ; B. G. Teubner, Leipzig, 1903.

J. A. Serret. — **Lehrbuch der Differential und Integral-Rechnung.** deutsch bearbeitet von Axel Harnack. Zweite Auflage herausgegeben von G. Bohlmann. Dritter Band, erste Lieferung : *Differentialgleichungen*. 1 vol. broché, in-8°, 304 p. : prix : Mk. 6. ; B. G. Teubner, Leipzig, 1903.

O. Stolz u. A. Gmeiner. — **Theoretische Arithmetik. II Abteilung. Die Lehre von den reellen und complexen Zahlen.** 2 Aufl. 1 vol. broché ; in-8°, 402 p. (t. IV, de la *Collection Teubner*) : prix : Mk. 7,20 ; B. G. Teubner, Leipzig, 1902.

Ch.-J. de la Vallée-Poussin. — **Cours d'Analyse infinitésimale.** Tome I. 1 vol. gr. in 8° de 372 pages. Prix 12 francs ; A.-A. Dieudonné, Louvain, Gauthier-Villars, Paris, 1903.

Ern. Wienholdt. — **Leitfaden der analytischen Geometrie.** bearbeitet auf Veranlassung der k. Inspektion des Bildungswesens der Marine. 1 vol. relié, in-8°, 80 p., prix : Mk. 1,60 ; B. G. Teubner, 1902.

Le Gérant : C. NAUD.

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY

LES NOUVEAUX PROGRAMMES

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS

Depuis longtemps annoncés et attendus, les nouveaux programmes d'admission à l'Ecole polytechnique ont été publiés; ils portent la date du 15 octobre 1902.

Il ne faut pas exagérer l'importance des programmes en général; nous en trouvons une preuve nouvelle dans l'expérience qui vient d'être faite depuis cinq ans. Les programmes en vigueur dans cette période ont certainement été les plus lamentables qui eussent été appliqués depuis plus d'un demi-siècle; et l'on pouvait légitimement craindre qu'il en résultât un abaissement du niveau intellectuel dans le recrutement. Cela ne s'est pas produit, du moins dans une mesure appréciable; et cela montre bien, nous y insistons, combien en matière pédagogique les programmes ont peu d'importance en regard des méthodes.

Cependant, il y a une limite à tout. Et cette limite avait été tellement dépassée qu'on peut, sans exagération, considérer la transformation qui vient d'être accomplie comme une véritable délivrance. C'en est une pour les candidats, pour les professeurs de mathématiques spéciales, pour les examinateurs, et surtout pour l'Ecole polytechnique elle-même, qui recevra enfin des élèves mieux préparés à profiter de l'enseignement.

Dans ce qui va suivre, nous ne voulons pas analyser par le menu chaque point particulier. Nous insisterons surtout sur les différences, par adjonction ou suppression, qui existent entre le nouveau programme et le précédent; et comme, sous le titre « Renseignements généraux », on a introduit des indications sur

l'interprétation de certains articles, nous tirerons parti au fur et à mesure de ces indications. C'est là, il faut le dire tout de suite, une très heureuse innovation, qu'on a eu bien raison d'emprunter aux programmes de l'Ecole centrale. C'est la seule manière d'arriver, dans une certaine mesure au moins, à corriger la sécheresse d'une liste de paragraphes, toujours forcément hetérogène, en essayant de montrer l'esprit, à côté de la lettre.

Les renseignements généraux dont nous parlons débutent par un préambule de quelques lignes, où l'on explique que le but poursuivi est d'établir un accord plus intime entre l'enseignement préparatoire et celui de l'Ecole elle-même. On veut réagir en outre contre l'envahissement de certaines théories, qui avaient pris une place hors de proportion avec leur importance, et leur substituer des notions plus utiles. Dans cet ordre d'idées, on signale le danger du développement prématuré des théories touchant aux principes, et des subtilités qui ont pour résultat général de rebuter les jeunes esprits. Comme conséquence, on interdit impérativement aux examinateurs d'interroger sur les principes fondamentaux de la théorie des limites, des incommensurables et des fonctions continues, aussi bien que sur les singularités que peuvent présenter les fonctions. Enfin, on prescrit de n'envisager que des fonctions continues admettant une dérivée.

A tout ceci, on ne peut qu'applaudir sans réserve. La scholastique et la métaphysique prematurées ne peuvent aboutir qu'a dégoûter à tout jamais les jeunes gens des mathématiques, en engendrant chez eux le scepticisme, et en leur en masquant l'utilite pratique. Pour de futurs ingénieurs surtout, c'est un véritable empoisonnement intellectuel.

On a rayé du programme l'arithmétique, la géométrie élémentaire et l'algebre élémentaire. Il pourra être tenu compte de l'insuffisance des candidats sur ces matières, mais il ne sera demandé aucune demonstration. Il est à craindre ici que les auteurs du programme aient poussé un peu loin dans une voie de réaction salutaire, en général, mais qu'il ne faudrait pas exagérer. Cependant il y a lieu d'espérer que cela n'aura pas de gravité dans la pratique.

Le programme, dans sa partie mathématique, comprend les matières suivantes : *Algèbre.* — *Trigonométrie.* — *Géométrie analytique.* — *Mécanique.* — *Géométrie descriptive.* Nous allons successivement les passer en revue.

Algèbre. — On trouve d'abord la division des polynomes et le plus grand commun diviseur, puis quelques éléments d'analyse combinatoire et le binôme (dit de Newton) pour un exposant entier et positif. On interdit expressément les permutations, etc., avec répétitions, les puissances d'un polynome au delà du cube, et les sommations de piles de boulets. Ces interdictions encore sont peu graves, mais peu justifiées, et légèrement puériles.

Les déterminants, réduits à leur théorie élémentaire, les équations linéaires, le calcul des radicaux (qui figurait précédemment dans l'arithmétique), et les expressions imaginaires, ne sont l'objet d'aucune observation spéciale.

Nous arrivons aux séries. On se borne aux caractères de convergences les plus simples et les plus usuels, et on mentionne les séries alternées. Il est spécifié qu'on s'en tiendra au programme, qu'on n'exigera pas, notamment, la règle de Duhamel, et qu'il ne sera parlé que des séries à termes réels.

Nous trouvons ensuite l'étude de la fonction a^x, la limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, la théorie des logarithmes considérés comme exposants, l'usage des tables de logarithmes et de la règle à calcul. On écarte la construction des tables, et la définition des logarithmes par deux progressions. Ce dernier point n'est guère justifié, mais l'introduction de la règle à calcul est si raisonnable et si utile que la compensation est plus que suffisante.

On aborde maintenant l'un des points capitaux du nouveau programme ; il s'agit du rétablissement des infiniment petits : ordre relatif, valeur principale, développement jusqu'à un ordre donné, exemples.

Immédiatement après viennent les dérivées et différentielles. Pour les fonctions d'une variable, on s'en tient à la différentielle première. Pour celles de plusieurs variables, on demande la différentielle totale ; on demande aussi la différentielle première d'une fonction composée. Les fonctions implicites, les maximums ou minimums, les formules de Taylor et de Maclaurin

avec leurs applications restent au programme à peu près comme précédemment. On insiste sur l'interdiction d'interroger sur les différentielles d'ordre supérieur, et on exclut également les maximums ou minimums des fonctions de plusieurs variables. Cela peut être sage, l'abus étant souvent voisin de l'usage. Mais il nous faut maintenant citer textuellement une phrase qui paraît totalement incompréhensible, si elle ne renferme pas une faute d'impression ou un lapsus : « On demandera de démontrer que « toute fonction qui admet une dérivée dans un intervalle est « continue dans cet intervalle, ce qui permet d'établir immédiate- « ment la continuité de toutes les fonctions usuelles ». Comment peut on trouver les dérivées des fonctions usuelles sans se servir de leur continuité? Encore une fois, il y a là un point qui nécessite des éclaircissements.

La théorie des équations n'a pas subi de modification essentielles. Le théorème fondamental (dit de d'Alembert) reste toujours admis comme postulat (ce que nous persistons à trouver fâcheux; car la démonstration en est tout à fait simple, quand on veut bien ne pas se perdre dans des subtibilités). Les fonctions rationnelles des racines, l'élimination par les fonctions symétriques, les racines égales, les théorèmes de Rolle et de Descartes les méthodes d'approximation de Newton et des parties proportionnelles *par des considérations géométriques* (excellentes indications) figurent expressément. Comme commentaire, on interdit certaines chicanes sur l'élimination ; on interdit aussi d'aborder l'irréductibilité d'une équation, la résolution algébrique pour le 3e et le 4e degrés, et le théorème de Budan et Fourier.

La décomposition des fractions rationnelles en éléments simples a été rétablie. Mais, comme si les auteurs du programme avaient eu peur de leur propre audace, ils écartent les choses les plus simples, comme la formule $\frac{f}{\varphi_1\varphi_2} = \frac{U}{\varphi_1} + \frac{V}{\varphi_2}$, et les éléments simples de la forme $\frac{A_n x + B_n}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}$ en sorte que de cette utile restitution, il ne reste plus grand chose ; elle est heureuse quand même, et il est à espérer qu'à l'usage, un certain tassement s'établira.

Le programme d'algèbre se termine par les fonctions primitives, et les intégrales simples indéfinies ou définies, avec emploi

du changement de variable, et application aux fractions rationnelles et aux expressions $\frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + b}} dx$; exemples simples de quadratures. Le programme lui-même spécifie que la notion fondamentale est basée uniquement sur la considération de l'aire d'une courbe, et on y insiste dans les renseignements généraux, en ajoutant qu'aucune démonstration ne sera demandée, reposant sur la définition analytique de l'intégrale. Nous passons sous silence quelques restrictions complémentaires ayant pour objet d'éviter des complications aux examens.

Dans l'ensemble, et en dépit des légères observations critiques qu'on a trouvées ci-dessus, ce programme d'algèbre est incontestablement supérieur au précédent.

Nous regrettons de n'y rien voir figurer sur les différences ni sur l'interpolation. Mais il faut nous résigner; pour l'instant ce n'est pas à la mode; et peut-être, avant un demi-siècle, se trouvera-t-il un homme de génie pour découvrir à nouveau ce qu'on savait il y a soixante-quinze ans, à savoir que ces théories sont non seulement utiles, mais indispensables dans les applications, et pour imposer sa conviction. Il faut savoir être patient, en présence du mouvement (parfois circulaire) qu'affecte le progrès pédagogique. Ne pas trop reculer, c'est déjà une notable satisfaction.

Trigonométrie. — Le programme n'a pas subi de profondes modifications; c'est toujours la théorie élémentaire des fonctions circulaires, et la résolution des triangles rectilignes, à laquelle on a ajouté la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique. A noter cependant que la résolution trigonométrique de l'équation du 3e degré a disparu, et qu'à partir de 1905, l'usage des tables centésimales sera obligatoire. On écarte formellement la théorie des racines primitives dans les équations binomes, et la formule de Moivre dans le cas d'un exposant non entier.

Géométrie analytique. — En géométrie analytique plane, c'est à peine si le texte du programme a changé; il faut remarquer cependant la suppression de la théorie générale des centres, des diamètres et des axes, et l'introduction de la courbure, rendue indispensable par celle des éléments de cinématique.

On spécifie que la théorie des formes quadratiques et celle des substitutions linéaires sont exclues, qu'il en est de même des coordonnées homogènes, et qu'en fait de points multiples, on s'en tiendra aux points doubles. Plusieurs professeurs, à ce sujet, m'ont confié leur embarras et demandé s'il serait interdit aux candidats d'employer des méthodes et des formules devenues classiques, et qui semblent éclairer et simplifier l'exposition, en ce qui concerne les coniques. J'espère que non, et je l'ai dit. Pour les courbes en coordonnés cartésiennes on insistera sur les équations résolues en y ou en x, et sur les courbes unicursales; pour les coordonnés polaires, on se bornera au cas d'une équation résolue en ρ.

Le programme de géométrie analytique à trois dimensions n'a pas subi de changement. C'est sans doute par un oubli regrettable qu'on n'y a pas introduit la notion du plan osculateur, non moins indispensable que la courbure au point de vue de la cinématique.

Mécanique. — Ici, les modifications sont profondes; on introduit la cinématique et la dynamique du point, en éliminant tout ce qui pourrait donner matière à des chicanes sur les principes. La statique du point matériel est traitée d'abord comme corollaire de la dynamique; puis finalement on traite à part la statique des solides invariables, à peu peu près comme dans le programme précédent, mais en supprimant tout ce qui concerne les machines simples.

Géométrie descriptive. — Une seule adjonction, mais qui a bien son importance : « Projections cotées ; surfaces topographiques. » On ne peut qu'y applaudir. Il était déplorable de laisser en dehors du programme des notions aussi simples et aussi utiles. On ne devra pas demander de méthodes fondées sur la courbure des surfaces.

Tel est dans ses lignes principales le nouveau programme d'admission. Il est mauvais, par cette raison qu'un programme n'est jamais et ne peut jamais être bon ; mais nous l'approuvons quand même, parce qu'il représente, il faut le répéter, un immense progrès sur celui qui vient de disparaître, et une tentative très honorable de retour à des idées raisonnables.

Il est facile de voir quelles sont les préoccupations légitimes qui l'ont inspiré. Elles peuvent se résumer en deux lignes : désir de donner aux candidats des notions utiles et même indispensables au point de vue de leur enseignement futur ; souci d'éviter les arguties raffinées, aussi bien que les théories sans application directe.

Le résultat sera-t-il celui qu'on désire ? C'est à l'usage qu'on le saura et qu'on en jugera. En ces matières, on navigue constamment entre deux écueils : danger, en ne précisant pas assez, de donner à l'enseignement un caractère de plus en plus broussailleux et confus, contraire, somme toute, au but qu'il s'agit d'atteindre ; danger, en précisant trop, de juger les candidats d'après un petit nombre de connaissances acquises et bien répétées, plutôt que sur leur aptitude à en faire application, c'est-à-dire sur leur mémoire plus que sur leur intelligence.

Il faut, en effet, voir nettement et dire franchement comment les choses se passent. Les examinateurs, contraints, dans un temps fort limité, à juger un grand nombre de candidats, ont une tendance à revenir, avec une préférence visible, vers certaines questions et certains exercices. Les professeurs, désireux avant tout (et c'est leur devoir) d'assurer le succès à leurs élèves, sont souvent aux aguets de ces questions particulières, leur attachent parfois une importance qu'elles n'avaient pas originairement, allongent leur cours en conséquence, y adaptent des théories étrangères à la lettre et à l'esprit du programme ; et c'est ainsi qu'au bout de quelques années on se trouve en présence d'un état de choses soulevant des plaintes générales et dont la faute est à tout le monde et n'est à personne.

Les professeurs se plaignent des examinateurs : les examinateurs se tiennent sur leurs gardes vis-à-vis des professeurs ; les candidats ballotés entre des poussées diverses, auxquelles s'ajoute l'émotion de l'examen, perdent la tête et ne donnent pas toujours la mesure exacte de leur valeur réelle.

Les conseils et commissions chargés du soin des programmes considèrent qu'il faut, dans l'intérêt de l'enseignement, lutter contre la tendance des professeurs et celle des examinateurs ; et le résultat final de tant de conflits est toujours médiocre.

Je suis absolument à mon aise pour parler de ces questions, et

cela pour deux motifs : le premier, c'est que je n'ai connu le programme nouveau qu'après sa publication, et que, par conséquent, je n'y ai pas la moindre parcelle de responsabilité ; le second, c'est que je ne prétends pas plus qu'un autre à l'infaillibilité dans les fonctions toujours délicates d'examinateur.

Le grand tort, c'est de ne pas produire tout haut les griefs qu'on articule tout bas, de ne pas considérer à la fois les professeurs, les examinateurs et les conseils de l'école Polytechnique comme les collaborateurs d'une même œuvre ; et de vivre dans une sorte de persistant malentendu.

Si cette collaboration désirable s'effectuait, il est certain que l'on pourrait arriver à des programmes offrant une imperfection moindre ; et si elle avait un caractère permanent, chose facile en soi, rien n'empêcherait, d'opérer graduellement dans ces programmes, d'année en année, les modifications et les perfectionnements jugés utiles d'un commun accord. Je crois même qu'on finirait ainsi par diminuer beaucoup, sinon par détruire totalement, l'action néfaste de la chance, ce fléau des examens. Et alors, on n'assisterait plus à ce spectacle, surprenant et affligeant, d'une collection d'hommes de haute valeur, compétents et consciencieux, se réunissant pour aboutir à une œuvre commune médiocre et boiteuse.

J'ai dit très haut, dans ce qui précède, ma manière de voir, parce que jai toujours considéré la vérité franchement exprimée comme l'un des meilleurs témoignages de respect qu'on puisse rendre aux gens qui en sont dignes. J'estime que ma situation d'examinateur, loin de m'imposer une réserve excessive et un silence absolu, me fait un devoir de signaler les imperfections où je les vois et les remèdes où il me semble les trouver. Mon seul but est de contribuer au progrès de l'enseignement de l'Ecole polytechnique, à la meilleure organisation possible de cet enseignement, sur lequel les études préliminaires réagissent avec tant d'énergie.

Et je tiens à déclarer en terminant, comme je l'ai fait au début, qu'en dépit de ses défauts et de ses lacunes, le nouveau programme pourra donner des résultats excellents, si l'on veut en faire l'application avec une entière bonne foi, et en y apportant un esprit libre de toute entrave.

C.-A. LAISANT (Paris).

LE PROBLÈME N° 2 DE M. DAVID HILBERT

Immédiatement après la communication *Sur les problèmes futurs des Mathématiques*, faite par M. Hilbert au Congrès international des Mathématiciens à Paris le 8 août 1900 (1), M. Peano déclarait (2) que ma communication, déjà annoncée pour le surlendemain, sur *Un nouveau système irréductible de postulats pour l'Algèbre* (3) aurait répondu au problème n° 2 de M. Hilbert : *De la non-contradiction des axiomes de l'Arithmétique* (4).

M. Hilbert n'a pas répondu, et il n'aurait pu le faire avant d'écouter ma communication ; malheureusement le surlendemain M. Hilbert était absent.

Presque deux années se sont écoulées du Congrès à la publication du compte rendu. En attendant, M. Hilbert aurait pu connaître la solution d'une question qui l'intéressait si vivement en 1900, en s'adressant à M. le Secrétaire du Congrès ou à moi pour avoir les épreuves de ma communication. Et il lui aurait suffi d'en lire l'*Avant-propos* (5) pour comprendre que son problème n° 2 (6) n'était qu'une causerie, qui se pouvait supprimer (7).

Maintenant que le compte rendu a paru et que M. Hilbert

---

(1) Compte rendu du deuxième Congrès int. des mathématiciens. Paris, Gauthier-Villars, 1900, p. 58-114.

(2) *Ibidem*, p. 21.

(3) *Ibidem*, p. 249-256.

(4) *Ibidem*, p. 71-74.

(5) *Ibidem*, p. 249, 250.

(6) Voir *L'Enseignement Mathématique*, 1902, p. 386.

(7) Personne ne l'en aurait empêché ; en effet M. Hilbert a apporté d'autres modifications à l'original de sa communication (*ibidem*, p. 58 note).

semble vouloir continuer à garder le silence, je crois rendre service aux jeunes étudiants, en leur évitant d'accepter l'invitation de M. Hilbert à méditer sur des questions qui ont été résolues depuis longtemps.

*
* *

M. Hilbert commence ainsi :

« Lorsqu'il s'agit de poser les principes fondamentaux d'une science, l'on doit établir un système d'axiomes renfermant une description complète et exacte des relations entre les concepts élémentaires de cette science. Ces axiomes sont en même temps les définitions de ces concepts élémentaires ; aucune affirmation relative à la science dont nous examinons les principes fondamentaux ne sera admise comme exacte, à moins qu'on ne puisse la tirer des axiomes au moyen d'un nombre fini de déductions. Si l'on considère les choses plus exactement, la question suivante se pose : *Certaines affirmations contenues dans des axiomes ne sont-elles pas dépendantes les unes des autres, et, par suite, ces axiomes ne renferment-ils pas des parties communes superflues que l'on doit supprimer si l'on veut obtenir un système d'axiomes complètement indépendants ?*

« Mais avant tout, parmi tant de questions soulevées par l'examen des axiomes, je regarde comme la plus importante celle-ci : *Démontrer que les axiomes ne sont pas contradictoires ; c'est-à-dire démontrer qu'en se basant sur les axiomes l'on ne pourra jamais arriver à des résultats contradictoires au moyen d'un nombre fini de déductions logiques.* »

Ma communication commence ainsi :

« Dans l'*Introduction logique à une théorie déductive quelconque* qui précède notre *Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers*, nous avons analysé la structure formelle d'une théorie déductive quelconque, pour établir les principales conditions de sa perfection logique et les règles pratiques pour reconnaître si ces conditions se trouvent vérifiées dans une théorie donnée.

« Maintenant, nous ne faisons que rappeler ces conditions et énoncer ces règles, dont l'étude appartient à la logique générale,

pour une application mathématique à l'analyse des principes de l'Algèbre.

« D'abord il faut *déclarer* quels sont les *symboles* dont on fait usage dans la théorie *sans les définir* (*symboles non définis*) et *énoncer* les *propositions* (*définitions exceptées*) qu'on accepte dans la théorie *sans les démontrer* (*postulats*) (¹).

« *Les postulats doivent être* **compatibles**; c'est-à-dire qu'ils ne doivent pas se *contredire*.

« Pour **démontrer** *la compatibilité d'un système de postulats*, il faut trouver *une interprétation des symboles non définis, qui vérifie simultanément tous les postulats.*

« *Le système des postulats doit être* **irréductible**; en d'autres termes, les *postulats* doivent être *absolument indépendants*; c'est-à-dire : il faut qu'*aucun des postulats* ne puisse être *déduit des autres*; ou bien encore : *il faut qu'en remplaçant séparément chaque postulat par sa négation on obtienne un système de propositions compatibles.*

« *Pour* **démontrer** *l'irréductibilité d'un système de postulats*, il faut trouver, pour *chacun* d'eux, *une interprétation des symboles non définis, qui ne vérifie pas le postulat considéré, mais qui vérifie simultanément tous les autres.* »

Il me semble que le second texte répond complètement aux questions posées dans le premier; je n'y ajouterai pas un seul mot, sauf la déclaration que les idées que je viens d'énoncer ne m'appartiennent pas; on ne saurait pas même leur attribuer exactement une paternité, car presque tous les mathématiciens qui ont analysé les principes de la Géométrie en ont fait usage, quoique très souvent d'une manière confuse et inutilement restrictive (²); mais depuis longtemps elles ont été énoncées exacte-

(¹) Dans le texte de M. Hilbert et dans le mien ont respectivement la même signification *concepts élémentaires* et *symboles non définis*, *axiomes* et *postulats*.

(²) On est arrivé jusqu'à confondre la recherche de la preuve qu'une proposition ne dépend pas d'un système donné avec la critique de la certitude du fait énoncé par cette proposition, en oubliant que, pour prouver l'indépendance d'une proposition d'un système donné, il ne faut pas fixer préalablement la signification des symboles employés, tandis qu'on ne saurait douter de la vérité d'une proposition, avant d'avoir fixé la signification de ces symboles; et que, par suite, il s'agit de deux questions tout à fait séparées. Plusieurs mathématiciens ont commis cette confusion, par exemple, dans leurs discussions sur le postulat des parallèles.

ment et en toute leur généralité dans la *Revue de Mathématiques* et dans le *Formulaire mathématique* (1).

*
* *

M. Hilbert poursuit :

« En Géométrie on démontre la non-contradiction des axiomes en construisant un domaine convenable de nombres tel qu'aux axiomes géométriques correspondent des relations analogues entre les nombres de ce domaine et tel, par conséquent, que toute contradiction dans les conclusions tirées des axiomes géométriques serait forcément reconnaissable dans l'arithmétique de ce domaine. De cette façon la non-contradiction des axiomes géométriques est ramenée à la démonstration de la non-contradiction des axiomes de l'Arithmétique. »

Ne m'accusez pas de vouloir trop subtiliser si je m'arrête à examiner la signification de la phrase « En Géométrie on démontre... »

Si M. Hilbert voulait dire « En Géométrie, M. un tel a démontré... » ou bien « En Géométrie, l'on pourrait démontrer... », il n'y aurait rien à objecter.

Malheureusement la phrase qui suit immédiatement dans le texte de M. Hilbert :

« Quant à la démonstration de la non-contradiction des axiomes de l'Arithmétique, elle demande à être effectuée par voie directe », nous prouve que M. Hilbert n'a pas compris que, pour démontrer l'indépendance ou la non-contradiction d'un système de propositions (2), l'on peut choisir les interprétations des symboles non définis dans un domaine convenable quelconque, pourvu seulement que la connaissance de ce domaine soit préalablement admise.

Il paraît en effet que M. Hilbert, après avoir établi une espèce de hiérarchie entre les différentes branches des mathématiques,

(1) Turin, Bocca frères.

(2) Ce sont deux questions séparées par rapport à un système donné de propositions ; mais ainsi qu'il découle de ce qui précède, ce n'est qu'une seule question logique par rapport à la méthode de démonstration.

juge que le domaine de chaque branche soit en même temps le domaine d'où devait jaillir la preuve de la non-contradiction des axiomes de la branche supérieure. Par suite (comme selon M. Hilbert les deux premières branches seraient l'Arithmétique et la Géométrie) la Géométrie devrait être justifiée par l'Arithmétique, et l'Arithmétique (puisque l'on ne saurait descendre plus bas dans la hiérarchie) devrait se résigner à se justifier par elle-même.

Deux faits concourent à prouver que la conviction de M. Hilbert est erronée : maints mathématiciens ont réussi à démontrer la non-contradiction ou l'indépendance de quelques propositions de Géométrie en donnant aux symboles considérés des interprétations différentes des ordinaires, mais sans sortir du domaine de la Géométrie ; tandis que pour ma part, dans la communication dont je m'occupe, j'ai réussi à démontrer l'indépendance de plusieurs propositions d'Algèbre en donnant aux symboles considérés des interprétations qui sortent du domaine exclusif des mathématiques.

*
* *

M. Hilbert continue :

« Les axiomes de l'Arithmétique ne sont pas essentiellement autre chose que les règles ordinaires du calcul auxquelles il faut ajouter l'axiome de continuité. Il n'y a pas longtemps, j'ai énuméré ces axiomes dans une courte note ; en même temps j'y ai remplacé l'axiome de la continuité par deux autres plus simples, à savoir : l'axiome connu d'Archimède, et un nouvel axiome énonçant que les nombres forment un système d'êtres qui n'est susceptible d'aucune extension, si l'on conserve intacts tous les autres axiomes (axiome d'intégrité). »

Laissons à M. Hilbert la responsabilité du choix de son système de postulats pour l'Arithmétique. Il est certain qu'en considérant comme postulats « les règles ordinaires du calcul » et autre chose encore, les déductions doivent être bien simples : maintenant on comprend aisément pourquoi M. Hilbert renonce à se soucier de l'indépendance des postulats.

*
* *

M. Hilbert poursuit :

« Or je suis persuadé que l'on peut trouver une démonstration directe de la non-contradiction des axiomes de l'Arithmétique en appliquant à ce but les méthodes de raisonnement connues dont on se sert dans la théorie des nombres irrationnels, après les avoir remaniées en leur faisant subir des modifications convenables. »

Étrange persuasion que celle de M. Hilbert. Il peut s'épargner la peine de remanier et de modifier n'importe quelle méthode de raisonnement, car il n'aboutira à rien.

En effet : les *contradictions* ou les *dépendances* des propositions ne peuvent être démontrées que par des *raisonnements* déductifs, tandis que les *non-contradictions* ou les *indépendances* des propositions ne peuvent être démontrées que par des *constatations* (on constate que des interprétations convenablement choisies des symboles vérifient ou ne vérifient pas les propositions en question).

*
* *

La suite du texte de M. Hilbert ne mérite pas la discussion. En voici la première période :

« Pour caractériser encore à un autre égard l'importance du problème, je ferai la remarque suivante : si l'on confère à quelque notion des attributs qui se contredisent, je dirai que, au point de vue mathématique, cette notion n'existe pas. »

Et si l'on n'avait pas la prudence de se placer « au point de vue mathématique » ?

*
* *

L'*Avant-propos* de ma communication finit par une question qui n'a pas encore été posée par M. Hilbert :

« *Le système des symboles non définis doit être* **irréductible** *par rapport au système des postulats* ; en d'autres termes, il faut

que des *postulats* on ne puisse *déduire* aucune proposition qui soit une *définition possible d'un des symboles non définis* au moyen des autres.

« Pour **démontrer** *l'irréductibilité d'un système de symboles non définis* par rapport à un *système de postulats*, il faut trouver *une interprétation des symboles non définis, qui vérifie simultanément tous les postulats et qui continue à les vérifier lorsqu'on change convenablement la signification d'un seul des symboles non définis*, et cela pour *chacun d'eux*. »

Après quoi, moyennant trois symboles non définis, j'énonce mon système de sept postulats (§ II), j'en démontre la comptabilité (§ III) et l'irréductibilité (§ IV); enfin je démontre l'irréductibilité du système de symboles non définis par rapport au système de postulats (§ V).

Que reste-t-il encore des questions logiques posées dans le problème n° 2 de M. Hilbert ?

A. Padoa (Rome).

SUR L'ENSEIGNEMENT ÉLÉMENTAIRE

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

Malgré leurs applications à des questions fondamentales de géométrie, de mécanique pure ou appliquée, de physique, les fonctions elliptiques ne font pas partie de l'enseignement élémentaire. Il en résulte que les physiciens, les ingénieurs, et ceux en général, qui ne sont pas mathématiciens de profession, sont privés d'un instrument de travail dont ils comprennent pourtant l'utilité; sans doute, bon nombre d'entre eux ont étudié les fonctions elliptiques; mais l'exposé qui leur en a été fait visait à être aussi complet que possible, tout en étant rapide et le temps leur a manqué pour se les assimiler d'une façon suffisante et surtout durable.

Les méthodes d'exposition employées sont basées soit sur l'étude d'une équation différentielle, soit sur la construction *a priori* d'une fonction doublement périodique; mais par suite de leur caractère général et abstrait, elles exigent de longues réflexions. Une étude hâtive en est impossible. Il suffit sur ce point, de rappeler l'anecdote de Sylvester et de son professeur [1]. Par conséquent si l'on ne dispose que d'un temps limité, il faut se borner aux propriétés essentielles.

Les fonctions elliptiques se sont introduites dans l'analyse sous la forme d'équations différentielles; mais pour l'enseignement, il est permis de prendre un autre point de départ, si l'on y trouve avantage. Un débutant acquérerait difficilement une idée

(1) *Revue des Sciences pures et appliquées*, T. VIII, 1897, n° 17, E. Picard, Notice sur James Joseph Sylvester.

nette de la fonction sin x par exemple, si on la lui présentait comme la fonction inverse de l'intégrale

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\,;$$

il est intéressant de considérer comme exercice, cette définition; mais il ne viendra à personne l'idée de la prendre comme point de départ de l'étude des fonctions circulaires au lieu de la définition usuelle. Les fonctions elliptiques sont plus complexes que les fonctions circulaires puisque celles-ci n'en sont qu'un cas limite ; il est donc désirable qu'on aborde leur étude par une méthode aussi facile, si faire se peut, que celle qui a servi pour le cas particulier. Or en partant d'un problème élémentaire sur les tangentes aux coniques, on peut arriver très facilement à l'intégrale d'Euler, à la notion de la double périodicité, au problème de la multiplication par un nombre entier, c'est-à-dire aux propriétés fondamentales des fonctions elliptiques et à ce qui est nécessaire pour leurs applications les plus usuelles.

Ce problème consiste à étudier les points de contact d'une ellipse avec une ligne polygonale qui lui est circonscrite en même temps qu'elle est inscrite dans une ellipse homofocale à la première.

Soit une ellipse E dont le demi-grand axe est pris pour unité et dont la demi-distance focale est k. Soit μ un point fixe de E et P le point où la tangente à E en μ coupe le petit axe; considérons l'ellipse E′ homofocale à E et passant en P, désignons par M un point mobile sur E′, par R l'une des extrémités de la polaire de M par rapport à E. Cela posé, si l'on définit le point fixe μ et les points mobiles M et R par les compléments α, φ et ω de leurs anomalies excentriques, on trouve presque immédiatement la relation

$$(1) \qquad \cos\alpha = \cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}.$$

Sous forme rationnelle, elle devient

$$(1') \qquad 2-\sin^2\alpha-\sin^2\omega-\sin^2\varphi-2\cos\alpha\cos\omega\cos\varphi + k^2\sin^2\alpha\sin^2\omega\sin^2\varphi = 0$$

et *est symétrique en* α, ω *et* φ. En la résolvant par rapport à α, par exemple, puis en posant

$$\sin\alpha = a \qquad \sin\omega = x \qquad \sin\varphi = x'$$

on trouve

$$(2) \qquad a = \frac{x\sqrt{1-x'^2}\sqrt{1-k^2x'^2} \pm x'\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}{1-k^2x^2x'^2};$$

telle est donc la relation entre les abcisses du point μ et des points mobiles M et R; le double signe correspondant aux deux points R extrémités de la polaire.

En différentiant (2), a étant constant, on obtient l'équation

$$(3) \qquad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} \pm \frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2}\sqrt{1-k^2x'^2}} = 0;$$

(2) est donc une intégrale algébrique de l'équation (3). C'est l'intégrale d'Euler. Si l'on revient aux notations primitives (3) devient

$$(4) \qquad \frac{d\omega}{\sqrt{1-k^2\sin^2\omega}} \pm \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 0;$$

(1) est donc une intégrale de (4). C'est l'intégrale obtenue par Lagrange.

Argument elliptique. — Revenons à la figure précédente que nous appellerons la figure I et considérons une ligne polygonale inscrite à E', circonscrite à E et tangente à celle-ci, à l'une des extrémités du petit axe. Désignons par $x_0 = 0$ l'abcisse de ce point, puis par x_2, x_4, ... x_{2n} ..., celles des points de contact successifs obtenus en partant dans un sens déterminé, à droite du petit axe, par exemple : n opérations (une opération consistant dans le passage d'un point de contact au point de contact suivant) nous fournissent une grandeur x_{2n}.

Nous allons voir que l'on peut définir une variable z et une fonction de cette variable telles que lorsque la variable prend des valeurs proportionnelles à 0, 1, 2, .. n, la fonction prenne les valeurs x_0, x_2, x_4, ..., x_{2n}...

A cet effet considérons : le point Q de l'ellipse E ayant même anomalie excentrique que M, la tangente à E en Q, et les inter-

sections de cette tangente avec les tangentes issues de M. On trouve que les lieux de ces deux intersections sont une seule et même ellipse E″ ayant pour demi-axes les racines carrées de

$$\frac{1+\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}{1+\cos\alpha}, \qquad \frac{(1-k^2)(1+\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha})}{\sqrt{1-k^2\sin\alpha}+\cos\alpha},$$

dirigées respectivement suivant OX et la direction perpendiculaire.

La différence de ces deux quantités est k^2; *donc E″ est homofocale à E et E′*. La ligne polygonale inscrite à E″, circonscrite à E et la touchant au même sommet que la précédente, nous fournit ainsi deux séries de points; d'abord ceux d'abcisses x_2, x_4, x_{2n}... déjà obtenus, puis une deuxième série de points intermédiaires. Nous pouvons continuer ainsi, obtenir de nouvelles ellipses E‴, E^{IV}, homofocales aux précédentes et insérer entre deux points d'abcisses x_{2n}, $x_{2(n+1)}$ un nombre $2^\gamma - 1$ de points intermédiaires, γ étant aussi grand que l'on voudra.

Considérons maintenant l'ellipse E et toutes celles qui lui sont homofocales; la tangente à E en un sommet du petit axe détermine à droite de cet axe un point N sur l'une des ellipses de la famille.

La deuxième tangente à E issue de N touche E en un point B; soit β son abcisse; l'ellipse qui passe en N peut être définie par le paramètre β. On démontrerait aisément que si l'on continue la ligne polygonale dont NB est un côté, les projections sur OX des différentes polaires des sommets tels que N sont toutes plus petites que β et vont même en décroissant du moins tant qu'on n'atteint pas l'axe OX. Dès lors soit x l'abcisse d'un point de E situé dans le premier quadrant; on pourra toujours déterminer une ellipse de paramètre suffisamment petit β et un entier λ suffisamment grand pour qu'après un nombre λ d'opérations on parvienne en un point de E dont l'abcisse diffère de x d'une quantité aussi petite que l'on voudra et qui sera plus petite que β. Nous représenterons par ϖ la limite du produit $\lambda\beta$ quand β tend vers zéro.

A toute valeur de x correspond une valeur de ϖ (et même une infinité; car à celle que nous venons de définir il faut ajouter celles qui sont égales à celle-ci augmentée d'un multiple de 4K,

K étant la limite du produit $\lambda\zeta$ quand on choisit $x = 1$, (c'est-à-dire quand la ligne polygonale embrasse le quart de l'ellipse) et réciproquement à toute valeur de z correspond une valeur de x et une seule. On dit que z est l'argument elliptique de module k et l'on écrit

$$x = sn(k, z)$$

ou simplement

$$x = sn(z).$$

On peut comparer avec z l'angle ω complément de l'anomalie excentrique du point dont l'abcisse est x; on dit que ω est l'amplitude de z; ce qui s'écrit

$$\omega = \text{am}\, z\,;$$

on a donc

$$x = \sin \omega = \sin \text{am}\, z = sn\, z.$$

D'après la définition de z, on a

$$sn\, 0 = 0 \text{ et } \lim \frac{sn\, z}{z} = 1 \text{ pour } z = 0.$$

Equation différentielle de snz. — Revenons à la relation (2) que nous avons déduite de (1); cette dernière étant symétrique en α, ω et φ, en la résolvant par rapport à $\sin \varphi = x'$, on a :

$$(2') \qquad x' = \frac{x\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-k^2a^2} + a\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}{1-k^2a^2x^2}.$$

Formant la différence $x' - x$, la divisant par a et passant à la limite (pour $a = 0$) on obtient

$$\lim \frac{x'-x}{a} = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}\,;$$

le premier membre peut s'écrire $\frac{dx}{dz}$; en effet si l'on pose $x = sn\, z$ $a = sn\, \Delta z$ on en tire $x' = sn(z + \Delta z)$ on a donc

$$\frac{x'-x}{a} = \frac{sn(z+\Delta z) - sn\, z}{sn\, \Delta z}\,;$$

la limite du second membre est la même que celle du rapport

$$\frac{sn(z+\Delta z) - sn\, z}{\Delta z}$$

puisque la limite de $\frac{sn\,z}{z}$ est 1 pour $z = 0$. La fonction $x = sn\,z$ a donc pour équation différentielle

$$\frac{dx}{dz} = \sqrt{1 - x^2}\,\sqrt{1 - k^2 x^2}. \tag{5}$$

En représentant z en fonction de x par la notation

$$z = \text{arg. } sn\,x$$

on voit que l'équation (3) d'Euler a pour intégrale

$$\text{arg. } sn\,x \pm \text{arg. } sn\,x' = \text{C}^{\text{te}}.$$

Le théorème d'addition de la fonction $sn\,z$ nous est donné par la relation (2') où x', x et a représentent respectivement

$$sn\,(z+p), \quad sn\,z, \quad sn\,p,$$

p étant comme z un argument elliptique.

On peut remarquer que si les deux ellipses E, E' au lieu d'être homofocales étaient concentriques, semblables et avaient mêmes directions axiales ou encore se réduisaient à deux cercles concentriques, $sn\,z$ dégénérerait en $\sin z$, l'équation différentielle (5) et les théorèmes d'addition se réduiraient à

$$\frac{dx}{dz} = \sqrt{1 - x^2}, \qquad x' = x\sqrt{1 - a^2} + a\sqrt{1 - x^2}.$$

Si les deux coniques étaient un cercle et une ellipse ayant pour petit axe un diamètre du cercle ; $sn\,z$ dégénérerait en $Th\,z$.

Courbe d'Halphen. — Jusqu'ici l'argument z est considéré comme la limite du produit $\lambda\beta$; on peut le représenter par une surface en employant la représentation géométrique d'Halphen ou une autre analogue, la suivante par exemple que nous appellerons la figure II.

En posant $x = \sin\omega$, l'équation (5) devient

$$\frac{d\omega}{dz} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\omega},$$

d'où

$$z = \int_0^\omega \frac{d\omega}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\omega}}.$$

Soit un cercle de rayon 1, une ellipse dont les demi-axes sont 1 et $\frac{1}{k'}$, ($k = \sqrt{1 - k'^2}$), considérons la courbe G dont le rayon vecteur est la moyenne proportionnelle entre ceux du cercle et de l'ellipse ; si l'on prend pour axe polaire le petit axe de l'ellipse et si ω représente l'angle formé avec lui par le rayon vecteur ρ ; l'équation de l'ellipse est

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega}},$$

la courbe G a donc pour équation

$$\rho = \frac{1}{(1 - k^2 \sin^2 \omega)^{\frac{1}{4}}}$$

et son aire déterminée par l'angle ω est

$$\frac{1}{2} \int_0^\omega \frac{d\omega}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega}} ;$$

elle est donc égale à la moitié de l'argument elliptique z ; d'ailleurs

$$\sin \omega = x = sn\, z.$$

Périodicité. — En continuant la ligne polygonale (figure I) inscrite à E′ et circonscrite à E ; on finira par trouver des points de contact voisins de ceux déjà obtenus ; on conçoit même que l'on pourrait déterminer l'ellipse E′ de telle sorte qu'après un certain nombre d'opérations on retombe exactement sur les premiers points de contact obtenus ; la fonction $sn\, z$ est donc périodique ; on le voit d'ailleurs d'une façon bien plus nette sur la figure II. Si K représente l'aire comprise entre l'axe polaire, un axe perpendiculaire et la courbe G, on voit que $sn\, z$ reprend les mêmes valeurs quand z augmente d'un multiple de 4K par suite

$$sn\,(z + 4K) = sn\, z ;$$

on voit aussi que la fonction ne fait que changer de signe si z augmente de 2K ; la quantité 2K est la demi-période ; elle joue le même rôle que π pour les fonctions circulaires.

Multiplication de l'argument par un nombre entier. — La multiplication de l'argument par un entier m contient deux questions : étant donné $sn\ z$ trouver $sn\ mz$; étant donné un secteur z de la courbe G, trouver l'angle déterminant un secteur m fois plus grand ; le premier de ces problèmes peut se résoudre en faisant usage du théorème d'addition ; de plus la figure I en fournit une représentation géométrique ; il est clair que si l'on détermine l'ellipse E′ de telle sorte que l'abcisse de μ soit égale à la valeur donnée de $sn\ z$ que nous pouvons supposer positive ; en construisant la ligne polygonale ayant un premier contact en μ et en tournant dans un sens convenable, les abscisses des points de contact successifs auront pour valeurs $sn\ 3z$, $sn\ 5z \ldots\ sn(2n+1)z$. En construisant entre les deux mêmes ellipses une seconde ligne polygonale ayant un contact au sommet du petit axe de E, les abscisses des contacts successifs seront $sn\ 2z$, $sn\ 4z \ldots\ sn\ (2n\ z)$.

Maintenant que l'on connaît la valeur de $sn\ mz$ on peut la reporter sur la figure II et déterminer ainsi le rayon vecteur et l'angle (à un multiple de 2π près) qui détermine sur l'aire embrassée par G, un secteur mz ; si ξ est la valeur trouvée de $sn\ mz$ on aura simplement à résoudre l'équation

$$\frac{\sin \omega}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega}} = \xi,$$

ce qui donnera pour l'angle ω cherché quatre valeurs faciles à discuter.

Valeurs imaginaires de l'argument. — On peut, soit admettre dans une première étude, soit démontrer assez facilement en s'appuyant sur le théorème d'addition, que lorsque la variable est purement imaginaire, la fonction sn est aussi purement imaginaire si on lui impose la condition d'être une fonction analytique [1]. Nous écrirons donc

$$sn\,(z\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\ Sn\,(z) = x\sqrt{-1}$$

où $Sn\ z$ représente une fonction réelle de z et où l'on pose $x = Sn\ z$.

---

[1] Voir *Nouvelles Annales*, 3e série, T. XIX, juin 1900. Exposition géométrique de quelques propriétés fondamentales des fonctions elliptiques de première espèce.

Le théorème d'addition et l'équation différentielle si l'on y remplace a, x et x' par $a\sqrt{-1}$, $x\sqrt{-1}$, $x'\sqrt{-1}$, deviennent

$$x' = \frac{x\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+k^2a^2}+a\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+k^2x^2}}{1-k^2a^2x^2},$$

$$\frac{dx}{dz} = \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+k^2x^2}.$$

Une induction naturelle conduit à penser que la nouvelle relation entre a, x et x' doit être la solution d'un problème analogue au précédent. En effet, dans le premier problème, l'équation des ellipses rapportées à deux axes rectangulaires est

$$B^2x^2 + A^2y^2 = A^2B^2,$$

avec

$$A^2 - B^2 = k^2.$$

En changeant x^2 en $-x^2$ on a les hyperboles.

$$-B^2x^2 + A^2y = A^2B^2$$

avec la même relation entre A et B. Elles ne sont pas homofocales [1], elles ont les mêmes axes que les ellipses de la figure 1. En répétant les mêmes constructions que dans le premier problème on arrive à des résultats analogues en ce qui concerne la périodicité, la multiplication de l'argument; mais on arrive à voir que la fonction Snz devient infinie pour certaines valeurs de z; dans les calculs, les fonctions circulaires sin cos sont remplacées par les fonctions hyperboliques Sh et Ch. La représentation de l'argument par une surface se fera d'une manière analogue à celle du premier cas; on considérera le rayon vecteur hyperbolique [2] et l'argument hyperbolique au lieu du rayon vecteur ordinaire et de l'angle. Nous rappelons que si les coordonnées d'un point sont x, y son rayon vecteur hyperbolique est $\sqrt{y^2 - x^2}$.

---

(1) Si l'on considérait des hyperboles homofocales on aurait bien une relation de même forme, mais k serait plus grand que 1 car il n'est autre que l'excentricité de ces hyperboles.

(2) Voir Laisant, *Essais sur les fonctions hyperboliques*, Gauthier-Villars 1874. Cela montre une fois de plus l'intérêt qu'il y aurait à introduire franchement dans l'enseignement l'usage des fonctions hyperboliques.

L'analogue de la courbe G est alors une courbe G' dont le rayon vecteur hyperbolique est la moyenne proportionnelle entre ceux de l'hyperbole équilatère de demi-axes égaux à 1 et de l'hyperbole ayant pour demi-axes 1 et $\frac{1}{k'}$; le demi-axe transverse étant celui qui est égal à l'unité; l'aire comprise entre la courbe, son asymptote et l'axe transverse est représentée par K' et Snz a pour période réelle 2 K'.

Double périodicité de snz. — De ce qui précède on conclut que la fonction snz a deux périodes; l'une réelle et égale à 4 K, l'autre imaginaire et égale à $2\,K'\sqrt{-1}$; par suite le plan des z est partagé en rectangles par des parallèles à l'axe réel et à l'axe imaginaire, quand z occupe dans ces rectangles des positions relatives semblables la fonction prend des valeurs égales; dans chaque rectangle la fonction devient deux fois nulle et deux fois infinie. Ses zéros sont $2m\,K + 2n\,K'\sqrt{-1}$; ses infinis sont $2m K + 2(n+1)\,K'\sqrt{-1}$ où K et K' sont les deux intégrales

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+k^2x^2)}}$$

que l'on peut calculer par des séries; m, n sont des entiers quelconques.

Variations de la fonction snz. — Pour se rendre compte de la manière dont varie snz quand z décrit un chemin déterminé dans son plan, il suffit d'examiner deux cas principaux, celui où z décrit une parallèle à l'axe réel et celui où il décrit une parallèle à l'axe imaginaire et de chercher les courbes décrites par la fonction. Les points de celles-ci peuvent être obtenus au moyen du compas.

Pour le premier cas on posera :

$$z = u + v_0\sqrt{-1}, \qquad sn(u+v_0\sqrt{-1}) = U + V\sqrt{-1},$$

en développant le second membre au moyen du théorème d'addition, puis en séparant le réel et l'imaginaire et posant

$$sn\,u = \xi, \quad Sn\,v_0 = V_0,$$

on a

$$U^2 = \frac{\xi^2(1+V_0^2)(1+k^2V_0^2)}{(1+k^2\xi^2V_0^2)^2}, \qquad V^2 = \frac{V_0^2(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}{(1+k^2\xi^2V_0^2)^2}.$$

En éliminant ξ^2 on trouve

$$(6) \qquad k^2(U^2+V^2)^2 - \left[\frac{1+k^2V_0^2}{1+V_0^2} + k^2\frac{1+V_0^2}{1+k^2V_0^2}\right]U^2 - \left[\frac{1}{V_0^2} + k^2V_0^2\right]V^2 + 1 = 0.$$

Tel est donc le lieu décrit par $sn\,z$ dans le premier cas. V_0 est l'ordonnée d'un point où la courbe coupe l'axe imaginaire. Pour le second cas on posera

$$z = u_0 + v\sqrt{-1}, \quad sn(u_0 + v\sqrt{-1}) = U + V\sqrt{-1},$$

on développera encore $sn(u_0 + v\sqrt{-1})$ puis posant $Sn\,v = \eta$, $sn\,u_0 = U_0$ et séparant le réel de l'imaginaire on a

$$U^2 = \frac{U_0^2(1+\eta^2)(1+k^2\eta^2)}{[1+k^2U_0^2\eta^2]^2}, \qquad V^2 = \frac{\eta^2(1-U_0^2)(1-k^2U_0^2)}{[1+k^2U_0^2\eta^2]^2};$$

l'élimination de η donne (1)

$$(7) \qquad k^2(U^2+V^2)^2 + \left[\frac{1-k^2U_0^2}{1-U_0^2} + k^2\frac{1-U_0^2}{1-k^2U_0^2}\right]V^2 - \left[\frac{1}{U_0^2} + k^2U_0^2\right]U^2 + 1 = 0;$$

U_0 est l'abscisse d'un point où la courbe coupe l'axe réel. On remarque que l'équation (7) se tire de (6) en changeant respectivement

$$V_0^2,\ V^2 \text{ et } U^2 \text{ en } -U_0^2,\ -U^2 \text{ et } -V^2.$$

On pourrait démontrer non seulement que les systèmes (6) et (7) sont bien orthogonaux comme l'exige la condition d'analyticité imposée à la fonction, mais encore que les courbes (7) sont à elles-mêmes leurs propres trajectoires orthogonales. Si le paramètre U_0 est compris entre 1 et $\frac{1}{k}$ on a les courbes relatives au

(1) *Loc. cit.*

premier cas ; s'il a une autre valeur positive on a les courbes relatives au second cas.

Ces courbes sont susceptibles d'une définition simple. A cet effet, on mettra l'équation (7) sous la forme

$$f(U, V) = C^{te}$$

en la résolvant par rapport à la constante arbitraire U_0. Le calcul ne présente aucune difficulté et l'on trouve

$$(8) \qquad C^{te} = U_0^2 = \left[\frac{1 + R^2 \pm \sqrt{(1 + R^2)^2 - 4U^2}}{2U}\right] \times \left[\frac{1 + k^2R^2 \pm \sqrt{(1 + k^2R^2)^2 - 4k^2U^2}}{2k^2U}\right]$$

où nous avons posé

$$R^2 = U^2 + V^2.$$

Désignons par F et F' les deux points de l'axe des U ayant pour abscisses $+1$ et -1 ; par G et G' les deux points du même axe ayant pour abcisses $+\frac{1}{k}$ et $-\frac{1}{k}$; soit U, V un point du plan ; f et f' ses distances à F et F', le lieu des points pour lesquels le rapport $f : f'$ est le même qu'au point considéré est un cercle ; on trouve que ce cercle coupe l'axe réel aux points d'abscisses

$$\frac{1 + R^2 \pm \sqrt{(1 + R^2)^2 - 4U^2}}{2U}.$$

De même si l'on désigne par g et g' les distances du point U, V à G et G' le lieu des points pour lesquels le rapport $g : g'$ est le même qu'au point considéré, est un autre cercle qui coupe l'axe réel aux points d'abcisses

$$\frac{1 + k^2R^2 \pm \sqrt{(1 + k^2R^2)^2 - 4k^2U^2}}{2k^2U}.$$

Ces valeurs sont précisément les facteurs du second membre de l'équation (8). Dès lors si nous représentons d'une manière générale par i les abscisses d'intersection du premier cercle avec l'axe OU, par j les points analogues pour le second cercle ; les courbes (7) auront pour équation

$$U_0^2 = ij ;$$

on voit que l'on obtiendra autant de points que l'on voudra de la courbe coupant en $\pm U_0$ l'axe réel, au moyen des intersections de deux cercles faciles à construire, l'un arbitraire du paramètre i, l'autre dont le paramètre est $j = \frac{U_0^2}{i}$.

Théorème de Poncelet. — A propos de la figure I nous avons dit que l'on pouvait concevoir l'ellipse E telle qu'après un certain nombre d'opérations on retombe exactement sur des points de contact déjà obtenus; il est clair qu'il suffit pour cela que le point μ d'abscisse $\sin \alpha = sn\, p$ soit choisi de telle sorte que p soit un diviseur de la période 4 K ou plus généralement soit commensurable avec 4 K; mais alors si l'ellipse répond à cette condition, on pourra prendre pour sommet du polygone un point quelconque de E' et les polygones ainsi obtenus auront tous le même nombre de côtés; une conclusion analogue se présente quand l'on considère les hyperboles dont nous avons parlé; on arrive ainsi à deux cas, très particuliers à la vérité, des théorèmes de Poncelet, mais qu'on peut évidemment généraliser par projectivité. Il conviendra de signaler que l'équation algébrique par laquelle on déterminera $snp \left[p = \frac{m}{n} \mathrm{K},\ m,\ n \text{ entiers} \right]$ n'est pas résoluble sauf dans des cas très particuliers.

Les considérations précédentes peuvent s'étendre presque sans changements aux fonctions à multiplicateur σ de Weierstrass [1]. En les complétant par quelques notions sur les fonctions *cn*, *dn* et en général sur celles qui sont reliées à *sn* par une équation algébrique; par la réduction des intégrales dépendant de la racine carrée d'un seul polynome du quatrième degré aux trois types canoniques, par la transformation de Landen, par les théorèmes fondamentaux sur les arcs d'ellipse et d'hyperbole qui ne présentent aucune difficulté théorique, on aura les éléments nécessaires pour les applications les plus usuelles et pour pouvoir utilement employer les tables. L'étude des fonctions considérées comme définies par les équations différentielles au moyen des intégrales curvilignes, les développements en séries et en produits, les fonc-

---

[1] Les coniques sont deux ellipses ou deux hyperboles ayant mêmes directions axiales, mais non homofocales.

tions de Jacobi, la formation *a priori* d'une fonction admettant deux périodes, les problèmes de la division et de la transformation en général seraient réservés à l'enseignement supérieur.

Dans l'enseignement moderne on laisse au second plan les fonctions *sn cn dn* et l'on considère d'abord la fonction p de Weirstrass. Si dans un enseignement préparatoire on préfère commencer aussi par l'étude de cette fonction, on peut suivre une méthode analogue à celle qui vient d'être exposée. Nous nous bornerons à dire que e_1, e_2, e_3, désignant trois constantes dont la somme est nulle, on considérera les deux paraboles dont les équations en coordonnées rectangulaires sont :

$$(P) \qquad y = \pm\sqrt{x}. \qquad (P') \quad 2\alpha y = (e_3 - e_1)(e_2 - e_1) + x \pm 2S\sqrt{x}$$

où

$$S = \sqrt{(\alpha - e_3 + e_1)(\alpha - e_2 + e_1)}$$

et où α est une constante arbitraire. Alors si l'on pose

$$\alpha = p(\zeta, e_1, e_2, e_3) - e_1,$$

si l'on prend sur P un point d'ordonnée égale à $p(z) - e_1$ et si l'on considère une ligne polygonale partant de ce point ayant ses côtés tangents à P et ses sommets sur P', les ordonnées des points de contact successifs augmentées de e_1, seront

$$p(z \pm \zeta), \qquad p(z \pm 2\zeta), \ldots . \qquad p(z \pm n\zeta), \ldots .$$

les deux signes correspondant aux deux directions possibles qu'on peut suivre en partant du premier point.

E.-M. Lémeray.

(Saint-Nazaire.)

UNE LEÇON DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1. — Trois quantités quelconques a, b, c admettent six permutations ; quelle est la position des six points de l'espace dont ces permutations sont les triples coordonnées cartésiennes rectangulaires ? On voit tout de suite que ces six points se trouvent sur le cercle d'intersection du plan $\sum_1^3 x_i = a + b + c$ et de la sphère $\sum_1^3 x^2 = a^2 + b^2 + c^2$. De plus, l'expression connue de la distance de deux points de l'espace montre que les deux triples

$$\left.\begin{array}{l}(a, b, c)\\(b, c, a)\\(c, a, b)\end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l}(a, c, b)\\(b, a, c)\\(c, b, a)\end{array}\right\}$$

de permutations cycliques correspondent aux sommets de deux triangles equilatéraux et que pour $a < b < c$ ces deux triangles égaux n'équivalent quant à leurs sommets à un hexagone regulier que dans le cas où b est la moyenne arithmetique de a et c. Dans le cas ordinaire où $2b \neq a + c$ tous les angles de l'hexagone sont egaux, seulement quant à leur longueur les còtes se groupent en deux triples en succession alternante, de maniere qu'un còté plus court se trouve toujours entre deux còtes plus longs, etc. Et cet hexagone à peu pres regulier n'obtient la faculte de couvrir par répétition tout le plan que dans le cas particulier $2b = a + c$, ou il devient régulier tout à fait.

En transportant parallelement les plans coordonnes à la nouvelle origine (a, a, a) on passe aux six permutations (o, a_1, a_2).

où nous supposons encore $a_1 < a_2$. Dans ce cas il est évident que l'hexagone en question s'obtient en tranchant d'une manière régulière les sommets d'un triangle équilatéral $A_1A_2A_3$ (fig. 1). Ce qui nous suggère l'idée de considérer le triangle $A_1A_2A_3$ comme triangle de référence d'un système de coordonnées homogènes et dans le plan de ce triangle les six points (o, b_1, b_2) où la somme $b_1 + b_2$ équivaut à la hauteur de ce triangle de référence. Alors les équations $x_i = o$ et $x_i = b_2$ font connaître les

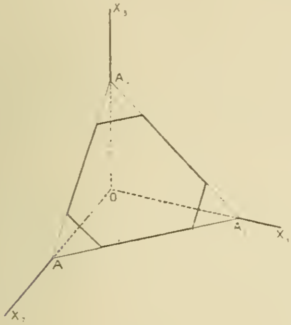


Fig. 1.

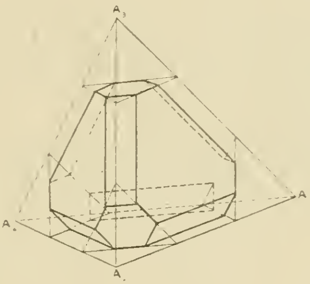


Fig. 2.

deux triples de côtés. Et les six sommets se trouvent trois fois deux à deux sur trois droites parallèles, les droites

$$x_i = o, \; x_i = b_1, \; x_i = b_2 \text{ pour } i = 1, 2, 3.$$

2. — Passons du cas (a, b, c) au cas (a, b, c, d) où il s'agit des 24 points de l'espace à quatre dimensions E_4 dont les coordonnées rectangulaires forment les permutations des quatre quantités a, b, c, d ou après un déplacement parallèle des axes coordonnés des quatre quantités o, a_1, a_2, a_3. Ces 24 points se trouvent sur la sphère d'intersection de l'espace tridimensional $\sum_1^4 x_i = \sum_1^3 a_j$ et de l'hypersphère $\sum_1^4 x_i^2 = \sum_1^3 a_j^2$. Par rapport au tétraèdre régulier $A_1A_2A_3A_4$ dont les sommets sont les points d'intersection avec cet espace, on a affaire aux 24 points (o, b_1, b_2, b_3) où $b_1 < b_2 < b_3$ et $\sum_1^3 b_i = h$, la hauteur du tétraèdre. Ainsi l'on trouve facilement que les 24 points en question sont les sommets d'un tétraèdre.

tronqué d'une manière régulière tant sur les arêtes qu'aux sommets, les plans $x_i = 0$ représentant les faces originales du tétraèdre, les plans $x_i = b_3$ en enlevant les sommets et les plans $x_i + x_k = b_2 + b_3$ en enlevant les arêtes. Donc le résultat (fig. 2) est un polyèdre à 24 sommets, 36 arêtes et 14 faces que nous représentons par le symbole (24, 36, 14). Seulement dans le cas très particulier où a, b, c, d sont quatre termes consécutifs d'une série arithmétique, ce qui amène les relations $b_1 = \frac{1}{2} b_2 = \frac{1}{3} b_3$, ce polyèdre est limité par huit hexagones réguliers égaux et six carrés égaux et forme donc cette combinaison cristallographique du cube et de l'octaèdre qui jouit de la faculté de remplir tout l'espace tridimensional par répétition (Voir *Revue générale des sciences*, t. V, p. 511).

Dans le cas général les trois espèces de faces sont représentées par les couples d'équations

$$(x_1 + x_2 + x_3 = a + b + c, \quad x_4 = d),$$
$$(x_1 + x_2 = a + b, \quad x_3 + x_4 = c + d),$$
$$(x_1 = a, \quad x_2 + x_3 + x_4 = b + c + d).$$

De la même manière les trois espèces d'arêtes sont représentées par les triples d'équations

$$(x_1 + x_2 = a + b, \quad x_3 = c, \quad x_4 = d),$$
$$(x_1 = a, \quad x_2 + x_3 = b + c, \quad x_4 = d),$$
$$(x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_3 + x_4 = c + d).$$

Pour raccourcir nous représentons les trois espèces de faces par les symboles $(3, 1)_4$, $(2, 2)_6$, $(1, 3)_4$ où les indices 4, 6, 4 indiquent les nombres de plans de chaque espèce. Dans cet ordre d'idées les arêtes se représentent par les symboles $(2, 1, 1)_{12}$, $(1, 2, 1)_{12}$, $(1, 1, 2)_{12}$.

3. — Procédons au cas (a, b, c, d, e) des 120 points de l'espace E_5, où il s'agit d'un pentaédroïde régulier $A_1A_2A_3A_4A_5$ tronqué aux sommets, sur les arêtes et sur les faces. Ici il y a à distinguer les quatre espèces $(4, 1)_5$, $(3, 2)_{10}$, $(2, 3)_{10}$, $(1, 4)_5$ d'espaces limitants ; les cinq espaces (4, 1) tronquent le polytope régulier aux sommets, les dix espaces (3, 2) et les dix espaces (2, 3) en font

autant sur les arêtes et sur les faces et les cinq espaces $(1, 4)$ sont les espaces originaux du polytope. Ainsi le nombre des espaces limitants est 30. Ensuite on trouve les six espèces $(3, 1, 1)_{20}$, $(1, 3, 1)_{20}$, $(1, 1, 3)_{20}$, $(2, 2, 1)_{30}$, $(2, 1, 2)_{30}$, $(1, 2, 2)_{30}$ de faces, ce qui prouve que le nombre des faces est 150. Et enfin il y a quatre espèces $(2, 1, 1, 1)_{60}$, $(1, 2, 1, 1)_{60}$, $(1, 1, 2, 1)_{60}$, $(1, 1, 1, 2)_{60}$ d'arêtes. Donc le polytope en question admet 120 sommets, 240 arêtes, 150 faces et 30 corps limitants ; nous le représentons par (120, 240, 150, 30).

En général le polytope trouvé est limité par dix espaces en forme de polyèdres (24, 36, 14) et par vingt prismes hexagonaux (12, 18, 8). Dans le cas très particulier où les cinq quantités a, b, c, d, e sont des termes consécutifs d'une série arithmétique, toutes les arêtes ont la même longueur, de manière que les dix polyèdres (24, 36, 14) prennent la forme de la combinaison cristallographique indiquée, tandis que les prismes sont des prismes réguliers limités par deux hexagones réguliers et six carrés.

4. — En augmentant toujours le nombre des quantités entrant dans les permutations on trouve successivement des polytopes caractérisés par les symboles

(720, 1800, 1560, 540, 62)
(5040, 15120, 16800, 8400, 1806, 126)
(40320, 141120, 191520, 126000, 40824, 5796, 254)
. . . .

qu'on obtient toujours en tronquant d'une manière régulière le polytope régulier, à un nombre minimum d'espaces limitants, aux sommets, aux arêtes, aux faces, aux espaces limitants, etc. Nous faisons suivre les calculs assez simples qui se rapportent au cas de huit quantités et donc de $8! = 40\,320$ points.

Espaces E_6

(7,1) . . .	$2(8)_1 =$	16
(6,2) . . .	$2(8)_2 =$	56
(5,3) . . .	$2(8)_3 =$	112
(4,4) . . .	$(8)_4 =$	70
		254

Espaces E_5

(6,1,1) . . .	$3(8)_1\,(7)_1 =$	168
(5,2,1) . . .	$6(8)_1\,(7)_2 =$	1008
(4,3,1) . . .	$6(8)_1\,(7)_3 =$	1680
(4,2,2) . . .	$3(8)_2\,(6)_2 =$	1260
(3,3,2) . . .	$3(8)_2\,(6)_3 =$	1680
		5796

Espaces E_4

$(5,1,1,1)$ . . .	$4(8)_1\,(7)_1\,(6)_1 =$	1344
$(4,2,1,1)$ . . .	$12(8)_1\,(7)_1\,(6)_2 =$	10080
$(3,3,1,1)$ . . .	$6(8)_1\,(7)_1\,(6)_3 =$	6720
$(3,2,2,1)$ . . .	$12(8)_1\,(7)_2\,(5)_2 =$	20160
$(2,2,2,2)$ . . .	$(8)_2\,(6)_2\,(4)_2 =$	2520
		40824

Espaces E_3

$(4,1,1,1,1)$ . . .	$5(8)_1\,(7)_1\,(6)_1\,(5)_1 =$	8400
$(3,2,1,1,1)$ . . .	$20(8)_1\,(7)_1\,(6)_1\,(5)_2 =$	67200
$(2,2,2,1,1)$ . . .	$10(8)_1\,(7)_1\,(6)_2\,(4)_2 =$	50400
		126000

Faces.

$(3,1,1,1,1,1)$ . . .	$6(8)_1\,(7)_1\,(6)_1\,(5)_1\,(4)_1 =$	40320
$(2,2,1,1,1,1)$ . . .	$15(8)_1\,(7)_1\,(6)_1\,(5)_1\,(4)_2 =$	151200
		191520

Arêtes.

$(2,1,1,1,1,1,1)$ . . . $7(8)_1\,(7)_1\,(6)_1\,(5)_1\,(4)_1\,(3)_1 = 141120.$

En cherchant à généraliser ce calcul pour le cas de n quantités, on trouve le symbole suivant

$$\left(n\,!,\ \frac{n-1}{2}\,n\,!,\ \frac{(n-2)(3n-5)}{24}\,n\,!,\ \frac{(n-2)(n-3)^2}{48}\,n\,!,\ \frac{(n-4)(15n^3-150n^2+485n-502)}{5760}\,n\,!,\ \ldots,\ 2_n-2\right),$$

qui exige qu'on s'arrête au premier terme disparaissant et qu'on interprète le terme précédent, égal à l'unité, comme se rapportant au polytope lui-même. Probablement les efforts à déterminer le terme général de la suite entre crochets se perdront encore longtemps dans les brouillards de la théorie des partitions.

P.-H. Schoute (Groningue).

LES

APPLICATIONS DU CALCUL DES PROBABILITÉS

A LA MÉTHODE SCIENTIFIQUE [1]

Chapitre V. — *Discussion de la valeur des applications scientifiques du calcul des probabilités.*

La théorie des moyennes. — La probabilité des causes. — La probabilité des erreurs. — Confusion de l'erreur et de l'écart. — On conclut à tort à des écarts objectifs de la matière observée. — Supposition illusoire de l'élimination des erreurs systématiques. — Il y a des probabilités qui ne sont pas toujours vérifiées; exemples. — Impuissance pratique de la théorie des probabilités des erreurs. — Causes efficientes et calcul des probabilités. — L'approximation; les conditions essentielles; exemples. — L'application de la probabilité des causes et l'application de la probabilité des erreurs.

Nous avons vu que les applications scientifiques, les applications pratiques aux méthodes d'observation et de recherche, étaient peu nombreuses, et que les applications exactes au point de vue mathématique étaient encore plus rares. Mais, même exactes, toutes ces applications sont-elles légitimes et jusqu'à quel point le sont-elles, c'est ce que nous allons examiner maintenant.

Les applications les plus fréquentes et les plus sérieuses sont celles qui se fondent sur la théorie des moyennes et recherchent la probabilité des erreurs.

Quelle est la valeur de ces applications?

Voyons d'abord quelles en sont les bases. L'erreur est un écart qui se produit entre une valeur réelle et une valeur appréciée. Comme, le plus souvent, la valeur réelle n'est pas connue en elle-même, mais seulement par des valeurs appréciées, on ne

---

[1] Voir *L'Enseignement mathématique*, numéro précédent.

peut savoir de combien une valeur appréciée diffère d'une valeur réelle. Il faut donc un artifice qui permette d'effectuer des calculs sur cette erreur. Pour cela, on considère comme valeur réelle, c'est-à-dire comme valeur dont la réalité est la plus probable, une moyenne entre un certain nombre de valeurs appréciées. L'erreur est donc définie, pour le calcul des probabilités, l'écart par rapport à la moyenne. On détermine une erreur que l'on appelle probable, non sans postulats et approximations, et on compare toutes les erreurs à celle-là. Une nouvelle formule donne les probabilités des erreurs, sous ce rapport. Que peut-on conclure d'une probabilité plus ou moins faible, plus ou moins forte d'un écart relatif à la moyenne, d'une erreur déterminée?

Nous voyons que l'on peut indifféremment en conclure l'une de ces assertions :

Ou bien il y a probabilité d'une cause perturbatrice, ou régulatrice de l'erreur, c'est-à-dire de la variation de la moyenne, probabilité dans tous les cas, d'une erreur systématique, distinguée ainsi de l'erreur fortuite à laquelle s'applique le calcul des probabilités. Là donc, une faible probabilité d'une erreur décèlerait l'existence d'une erreur systématique ayant échappé aux investigations préalables.

Ou bien la faible probabilité d'une erreur fera déclarer au contraire qu'on n'est plus en présence d'une erreur, mais d'un écart réel dû aux phénomènes observés, et non à la manière d'observer ces phénomènes. Ici on décèlerait un écart objectif s'opposant ainsi à l'écart subjectif qui tient aux conditions individuelles d'observation, et que l'on appelle erreur, l'erreur dont on cherche la probabilité.

Dans un cas, la faible probabilité d'une erreur indiquerait la présence d'une erreur plus considérable que les erreurs fortuites, dans l'autre cas l'absence d'erreur même fortuite à laquelle est substituée un écart réel.

On tire donc toujours des conclusions sur quelque chose d'objectif, devant dépasser la simple subjectivité, ou une erreur objective due aux méthodes ou aux instruments d'observation, ou un écart objectif résidant dans la matière même observée.

Or nous constatons qu'on conclut toujours à un écart objectif de la matière observée. Cela n'est donc pas légitime. On suppose toutes les erreurs systématiques éliminées, mais c'est une

supposition qui n'est pas valable ; rien en effet ne permet de choisir entre ces deux conclusions possibles. Il n'y a qu'un cas où une interprétation est plus indiquée que l'autre ; c'est celui où l'on prend une série de mesures, d'évaluations d'une valeur que l'on croit rester identique pendant tout le temps que durent ces évaluations et ces mesures : la mesure anthropologique d'un crâne par exemple, toujours le même, mesure que l'on fait bien rarement car cela n'a pas grand intérêt scientifique. Et encore rien dans le calcul des probabilités ne permet d'affirmer l'identité dans le temps de la matière observée : on ignore en effet les causes possibles de variation. Et, dès qu'on fait une moyenne de crânes différents, comme il y a aussi des écarts objectifs, l'ambiguité reparaît.

Cette ambiguité reste constante dans la mesure des probabilités d'erreurs des temps de réaction, par exemple où rien ne reste identique à deux moments différents du temps.

Enfin signalons une confusion véritable que l'on fait parfois de l'erreur et de l'écart, comme Stieda et Goldstein par exemple. C'est ainsi qu'ils prétendent appliquer la théorie des probabilités des erreurs à la détermination des types, caractérisés par des écarts objectifs et réels, et par conséquent à la probabilité pour que ces écarts soient dus à des variations quasi-fortuites d'un type considéré comme un individu ou pour qu'ils soient dus à une différence de deux types, à l'existence d'un type différent et objectivement distinct, type cause de ces écarts faussement assimilés aux erreurs. La théorie des erreurs ne porte que sur des phénomènes objectifs et sur leurs oscillations, et ne peut sans un arbitraire inconcevable, être étendue à des oscillations de phénomènes objectifs, surtout avec cette notion souvent obscure et arbitraire aussi du type.

Toutes ces réserves étant faites, on peut voir quelle faible portée peut avoir l'application scientifique du calcul des probabilités des erreurs : elle se limiterait à la probabilité d'une erreur systématique dans une série d'évaluations, d'une grandeur supposée identique et constante dans le temps, ce qui n'est déjà qu'approximatif [1].

---

[1] Parfois l'erreur probable ne sert qu'à limiter le nombre des unités décimales d'une approximation, quelle que soit l'insuffisance théorique du calcul, on peut reconnaître que sa portée pratique n'est pas alors dangereuse.

Et enfin il y a lieu, même dans ses limites, de ne pas oublier que ce calcul repose sur des postulats qui ne sont pas toujours vérifiés : nous avons signalé le postulat de Gauss de la moyenne considérée comme la valeur la plus probable. Il y a deux autres postulats, l'un qui consiste à admettre que les erreurs fortuites, c'est-à-dire inconstantes, car c'est le seul terme d'opposition avec les erreurs systématiques, ne peuvent pas dépasser une certaine limite, et restent dans le voisinage de l'erreur probable, dont la mesure n'est peut-être pas très exacte, le second, que les erreurs tendent à se compenser mutuellement, sans s'ajouter dans un sens ni dans l'autre.

Nous avons dit que la mesure de l'erreur probable n'avait pas une certitude *a priori* bien grande. Or, en appliquant la théorie des moyennes, et, par extension du postulat de Gauss, en considérant la moyenne des erreurs, des variations (indépendamment de la moyenne générale) comme l'erreur probable, on constate *a priori* que cette mesure diffère très souvent et parfois d'une façon très considérable de l'erreur probable mesurée par la moyenne des écarts relatifs à la moyenne avec le coefficient du calcul.

M. Binet a été victime d'une absurdité due à son application, que nous avons relatée, du calcul de probabilité des erreurs :

Il a mesuré, et cela est très louable, son erreur moyenne de mesure, en faisant à des intervalles plus ou moins éloignées, des évaluations de la même mesure. Il a trouvé une erreur moyenne de $1^{mm}8$; en supposant que les variations se produisent également dans les deux sens par rapport à la moyenne, il faut en prendre la moitié, c'est-à-dire $0^{mm}9$. D'autre part il applique la formule de probabilité des erreurs dans l'écart des deux moyennes

$$\Theta(t), \quad t = \frac{n_1 \sqrt{ndv}}{nv_1^2 + n_1 v^2}.$$

Et il trouve une probabilité de 70 p. 100 pour que l'écart qu'il a trouvé entre la moyenne des mesures du diamètre frontal minimum soit un écart réel dû à la matière observée, et non aux conditions subjectives, fortuites d'observation.

Or quel est cet écart : $0^{mm}76$ (1).

(1) BINET p. 399. Diamètre frontal minimum. Intelligents : $103^{mm}20$.
Inintelligents : $102^{mm}34$.

Cet écart est donc inférieur à l'erreur moyenne observée ($0^{mm}9$). Cela suffit pour condamner les conclusions de M. Binet pour cette mesure, et la formule de calcul des probabilité des erreurs.

Il est étrange que M. Binet n'ait pas été frappé de cette absurdité évidente et qu'il ne l'ait pas signalée.

Aussi félicitons-nous vivement M. Bourdon qui, faisant appel aux probabilités dans une étude de psychologie, procéda par une recherche expérimentale de leur valeur au lieu de faire appel à des formules mathématiques du calcul.

Pour déterminer dans des recherches sur l'association, la probabilité pour que deux phénomènes consécutifs, pris au hasard, se ressemblent, il a ouvert des livres, et a considéré chaque fois le premier adjectif, substantif ou verbe qu'il rencontrait, sur la première ligne de la page de droite, et renouvelant un très grand nombre de fois ces expériences de consécution, il a dressé un tableau expérimental des ressemblances phonétiques, graphiques, ou syllabiques constatées, dont il a établi la proportion. Et il a pu comparer le tableau obtenu dans ses expériences sur l'association avec celui-là.

Si la théorie de la probabilité des erreurs est vraiment entachée d'une impuissance pratique, il en est de même des notions qu'on prétend en tirer, de précision et de poids. D'ailleurs la mesure du poids paraît assez livrée à l'arbitraire. Nous voyons un astronome, dans une thèse toute récente, après avoir donné une détermination des poids ajouter : « Toutefois, on ne peut accorder une confiance trop absolue aux nombres ainsi déterminés. Il est certain, en effet, que dans l'appréciation si délicate du poids, beaucoup de circonstances inconnues doivent échapper au calcul. D'ailleurs les différentes méthodes employées par les astronomes qui se sont occupés de la formation d'un catalogue montrent que cette détermination est toujours quelque peu livrée au sentiment de chacun. Nous avons donc suivi les coutumes habituelles en nous laissant, dans l'évaluation du poids, une certaine latitude [1]. »

Enfin nous ferons remarquer que les observations que nous

---

[1] Joanny LAGRULA. *Étude sur les occultations d'amas d'etoiles par la lune, avec un catalogue normal des Pléiades.* Lyon, Ruj, in-8, 1901, p. 50.

avons faites aux bases mathématiques de cette théorie et à ses postulats ont été présentées déjà par Bertrand. « La règle des moyennes, dit-il, il importe d'insister sur ce point, n'est ni démontrée, ni exacte (1).

D'ailleurs « l'application du calcul des probabilités à l'étude des erreurs d'observation repose sur une fiction dont il ne faudrait pas faire une réalité. Les erreurs sont supposées tirées au sort dans une urne dont la composition est définie par la loi de probabilité acceptée (2) ».

Ainsi la théorie de la probabilité des erreurs très sujette en elle-même à la critique, pleine de postulats et d'approximations rencontre dans l'application des difficultés insurmontables, et n'aboutit à aucune conclusion certaine. Partout on peut introduire de l'arbitraire, jusque dans le calcul, à plus forte raison dans sa pratique. Les conditions exigées sont irréalisables, l'élimination complète des erreurs systématiques n'étant jamais certaine. Il n'y a pas adéquation à la nature qui ne reste pas identique dans le temps. Et au terme on ne sait si les résultats doivent s'interpréter dans le sens d'une réalité objective des faits observés, ou d'une perturbation constante des méthodes et des instruments d'observation.

Mais, à côté de cette application du calcul de probabilités à la vérification scientifique en quelque sorte, il y a une application plus importante d'investigation et de recherche. Elle porte, non plus sur la question de l'existence d'un substrat réel de variations apparentes observées, mais d'une cause efficiente de phénomènes constatés.

A quelles conditions le calcul des probabilités sera-t-il ici applicable ?

Nous ne reviendrons pas sur la théorie mathématique en elle-même, ses approximations et ses postulats inévitables.

En la supposant exacte, qu'exige-t-elle pour conserver cette exactitude ?

Il y a deux conditions essentielles requises :

1° Un très grand nombre de cas ;

---

(1) BERTRAND, p. 110.

(2) *Id.*, p. 222.

2° L'égale possibilité des cas.

1° Il faut un très grand nombre de cas. Or que de fois l'on applique le calcul des probabilités à un cas isolé. Nous en avons montré un remarquable exemple. Les études de Mitchell sur la probabilité d'une cause qui aurait produit le rapprochement de deux étoiles dans le ciel portent aussi sur un cas isolé et sont donc entachées d'un vice radical.

Mais, dans cette loi des grands nombres, il y a une indétermination énorme. Tous les nombres sont à la fois petits et grands : je cherche la probabilité d'un événement ; elle est très faible ; et s'il se produit une fois dans une année, dans un mois, dans une semaine ; conclurai-je à l'existence d'une cause de cet événement? Je puis dire que cette semaine, ce mois, cette année sont des périodes trop limitées. Si j'ai une probabilité d'un milliardième, cela veut dire que, sur un milliard de cas analogues, l'événement considéré se produira une fois.

Je puis être tombé sur cette milliardième fois. Il faudra que je m'assure que sur un milliard de cas analogues, l'événement ne s'est produit qu'une fois; et encore cela pourra paraître insuffisant : dans un milliard de séries d'un milliard, l'événement doit arriver un milliard de fois; mais il y a des écarts d'autant plus grands en valeur absolue que les nombres de cas sont plus élevés. Je pourrai avoir plus d'un milliard d'événements; ils pourraient se trouver parfois réunis plus particulièrement en certaines séries, être plus particulièrement disposés dans d'autres.

Donc, dans ma série d'un milliard, je pourrai me trouver en présence d'une de ces séries anormales, et rencontrer plusieurs fois l'événement. Remonterai-je à un milliard de ces séries, le même raisonnement viendrait encore, où s'arrêter? Et les écarts croissant en valeur absolue à mesure, ils vont, eux aussi, se perdre dans l'infini, en sorte que la précision semble s'enfuir et s'éloigner de plus en plus à mesure qu'on croit l'atteindre, ou s'en approcher davantage.

En tout cas le calcul des probabilités exige un nombre de cas plus considérable la plupart du temps qu'il n'est possible au savant d'en observer : des vies seraient insuffisantes à des observations de ce genre, surtout pour les événements à probabilité très faible et à très grande probabilité de cause.

Voici une probabilité pour l'existence d'une action télépathique : cette probabilité est énorme. Le nombre de cas est-il très grand; il est relativement très faible, surtout eu égard à ces chiffres.

On fait une enquête dans un milieu limité, et portant sur des faits passés; on demande de répondre « oui » ou « non » pour l'existence antérieure, dans des limites très vagues, de l'événement en question : une hallucination télépathique ! Puis on fait le rapport des « oui » aux « non » comme de deux quantités complètes. Il est de toute évidence que scientifiquement cela est sans valeur. Prenez un milieu considérable, d'au moins un million de personnes ; observez-les pendant un an, avec des moyens sérieux de contrôle, et comptez les événements en question. Etablissez ensuite leur probabilité et comparez au nombre total de cas observés : un événement d'une probabilité d'un millionième pour un jour, doit arriver une fois par jour pour un million de personnes. Ce n'est qu'avec des nombres suffisamment grands et vraiment complets et une observation rigoureuse que l'on pourra songer à utiliser le calcul des probabilités. Mais est-ce possible ? Evidemment non.

2° Egale possibilité des cas.

Mais cela serait encore peu de chose, et les difficultés soulevées ne sont rien auprès du second réquisit de l'application du calcul des probabilités à la recherche des causes.

Pour que des cas puissent être comparés et sériés, pour qu'ils puissent rentrer dans un calcul de probabilités, il faut que leur probabilité respective soit complètement définie, qu'ils présentent une égale possibilité, ou du moins une possibilité quantifiée pour être comparable.

Or cela est-il réalisé dans la question ?

L'exemple type est celui des boules dans une urne : mais cela suppose une identité absolue des différentes boules, qui ne peut dans la nature être parfaitement réalisée, sinon comme une conception et comme un rêve, jamais en fait. Cela supposerait même une identité absolue de position, ce qui est absurde. Nous disons que les différences de position sont des causes perturbatrices, car quelqu'un, qui, au moment du tirage, verrait la position respective des boules, pourrait dans une certaine mesure

prévoir la nature du tirage. Mais on répond par le postulat de la compensation des différences qui peuvent ainsi se produire, grâce aux grands nombres.

Si des boules dans une urne ne peuvent déjà répondre parfaitement aux réquisits du calcul qui réclame l'identité et l'indifférence mathématique, comme la géométrie réclame des points, lignes et surfaces irréalisables dans la nature, à plus forte raison, quand on complique les données, s'éloigne-t-on de ces conditions essentielles, et on s'en éloigne d'autant plus que la complication devient plus grande.

Or, dans les sciences les plus simples, on ne fait pas appel au calcul des probabilités pour l'investigation des causes, car on peut arriver à les découvrir par des méthodes directes. C'est donc dans les sciences très complexes, où ces méthodes directes échouent souvent, que l'on voudra l'utiliser comme méthode. Mais l'égale possibilité des cas réclamée très énergiquement par Laplace ne sera plus, même approximativement, appréciable. La quantification n'en est plus possible.

Prenons les faits psychologiques. Pour que deux cas soient, sinon identiques, du moins comparables, il faut que toutes les circonstances accompagnant le fait, et les conditions du fait puissent être quantifiées comme les conditions d'apparition des boules tirées dans une urne : c'est dire qu'il faudra quantifier les rapports temporels, spatiaux, physiologiques, affectifs, qu'il faudra quantifier le passé psychologique de l'individu, et d'autres circonstances ignorées ; il faudrait quantifier l'inconnu et l'inquantifiable. Il faut absolument renoncer à une pareille prétention. Donc, toute application du calcul des probabilités à des sciences complexes, et, à vrai dire, à toute science, car toute science est complexe, est illégitime, car elle ne répond pas aux réquisits du calcul, même d'une façon approximative.

Vous faites une enquête sur les hallucinations télépathiques. Rendez-moi vos cas comparables. Si vous ne le pouvez pas, alors ne les comparez pas, considérez-les individuellement, c'est-à-dire renoncez à leur appliquer la formule du calcul des probabilités.

Ce qui est vrai des sciences psychologiques le sera donc encore plus des sciences sociales, d'autant qu'ici apparaît un élément

nouveau de complication, la valeur du témoignage, appréciée elle aussi par le calcul des probabilités. Quelle est la probabilité du mensonge ?

Aussi ceux qui appliquent les probabilités aux résultats des enquêtes, et prétendent compromettre en leur faveur les probabilités feront bien de méditer ces lignes de Laplace que nous leur mettons sous les yeux :

« Ainsi, dit-il, les puissances successives d'une fraction moindre que l'unité diminuant sans cesse, un événement qui dépend d'une suite de probabilités fort grandes peut devenir extrêmement peu vraisemblable. » Il y a « dégradation de la probabilité des faits lorsqu'ils sont vus à travers un grand nombre de générations successives : plusieurs événements historiques, réputés certains, seraient au moins douteux, si on les soumettait à cette épreuve ».

« Dans les sciences morales, où chaque conséquence n'est déduite de ce qui la précède que d'une manière vraisemblable, quelque probables que soient ses déductions, la chance de l'erreur croît avec leur nombre et finit par surpasser la chance de la vérité [1]. »

Puis, parlant de la probabilité individuelle de vérité ou de mensonge, qui est rapportée à la probabilité du fait raconté, un fait impossible donnant certitude du mensonge de celui qui le rapporte, Laplace déclare : « En étendant cette conséquence à tous les faits extraordinaires, il en résulte que la probabilité de l'erreur ou du mensonge du témoin devient d'autant plus grande que le fait attesté est plus extraordinaire [2]. »

Ainsi donc, de la très faible probabilité de coïncidence entre une hallucination et une mort, un probabiliste comme Laplace aurait pu conclure, non pas à l'existence d'une action télépathique, mais à la mauvaise foi des personnes interrogées.

Nous retrouvons pour la probabilité des causes la même ambiguité dans l'interprétation des résultats que pour la probabilité des erreurs : faut-il rapporter les chiffres à un phénomène objectif réel, dans les événements observés, ou à un défaut systé-

---

(1) Laplace. *Essai philosophique sur les probabilités*. Paris, 1819, 4 éd., in-8 p. 15.
(2) *Id.*, p. 145.

matique des instruments et des méthodes, ici le mensonge dans les témoignages.

Voilà une conclusion probabiliste qui ne serait pas faite pour plaire à nos probabilistes nouveau jeu.

Ainsi la probabilité des causes est encore moins applicable que la probabilité des erreurs. Non seulement les résultats ne sont pas toujours certains, mais les conditions requises ne peuvent être réalisées, et surtout dans les sciences les plus complexes, où l'on est le plus tenté de faire appel à ce calcul. Les grands nombres présentent une condition insuffisamment déterminée, et dépassant en tout cas la plupart du temps les forces humaines ; l'égale possibilité des cas, ou sa quantification, est quelque chose d'absolument irréalisable, particulièrement dans les sciences psychologiques et dans les sciences sociales, où s'ajoute encore l'élément de probabilité du témoignage.

Toutes les applications du calcul des probabilités s'évanouissent donc définitivement et sans recours quand on les examine d'un peu près (1).

Chapitre VI. — *Conclusion.*

Le calcul des probabilités comme méthode scientifique. — Ses avantages et ses causes d'erreurs.

Ce qui reste du calcul des probabilités, ce sont les probabilités simples, dont on peut dire, avec Laplace, qu'elles ne sont « que le bon sens réduit en calcul ».

En fait, nous nous conduisons la plupart du temps dans la vie par des probabilités, et souvent par des probabilités subjectives qui gagneraient à une quantification par laquelle elles perdraient peut-être de leur poids, mais cette quantification n'est pas pos-

---

(1) On trouvait nombre d'objections très judicieuses de M. Bertrand à l'application du calcul des probabilités. Une démonstration systématique des lemmes impliqués par cette application n'a jamais été faite par lui.

— Notons encore la remarque d'un astronome, M. Jean Mascart qui fit voir tout « ce qu'il peut y avoir d'arbitraire dans l'application du calcul des probabilités aux phénomènes naturels » en l'appliquant. Jean Mascart. *Contribution à l'étude des Planètes télescopiques*, p. 63.

sible d'une façon précise [1]. On ne peut quantifier la croyance, parce qu'il y a toujours des éléments et des facteurs qui nous échappent. Une quantification alors sera tout arbitraire, et la croyance se fortifiera encore par le prestige des chiffres, des chiffres qu'elle se sera inventés à elle-même. Mais la pratique n'exige pas nécessairement la certitude de la vérité. L'action n'est pas la science.

En science il n'en peut être ainsi. On ne peut vivre de croyances et de probabilités. Il faut des faits, il faut une certitude, il faut une vérité, provisoire peut-être, mais une certitude et une vérité cependant, rendant compte de tous les faits actuellement connus, sinon de tous les faits qu'on pourra être appelé à connaître dans l'avenir.

Il faut donc s'en tenir aux vieilles règles de la méthode scientifique, et ne pas négliger les tables de présence et d'absence et des variations concomitantes, pour des probabilités et des formules d'intégrales. On découvrira les causes réelles avec plus de précision et de garanties.

Au lieu de multiplier des expériences plus ou moins bien faites, on s'en tiendra à un plus petit nombre d'expériences plus minutieusement conduites. On tâchera d'éliminer les erreurs le plus possible, au lieu de compter sur les compensations que bonne dame Nature peut y effectuer ; l'observation des constances dans les phénomènes sera plus féconde que la probabilité pour l'objectivité des écarts. Et si l'assertion de M. Victor Henry était exacte, qu'on ne peut faire de psychologie sans faire de calcul des probabilités, cela donnerait une triste idée de la valeur scientifique de la psychologie.

Heureusement il n'en est rien, et la psychologie, comme toute autre science, sait fort bien s'en passer, et elle doit, plus que toute autre, s'en passer.

Mais il y a peut-être un peu de snobisme à l'heure actuelle,

---

[1] Nous n'avons pas discuté la question critique et logique de la probabilité en elle-même, et de ses rapports avec la certitude. Nous n'avons envisagé que le calcul, capable de fausser souvent la valeur exacte de la probabilité, qui n'est par aucun moyen connu quantifiable. Aussi tout ce que l'on a pu dire (voir par exemple d'excellentes remarques d'Hirschfeld) en faveur de la quantification idéale de la probabilité ne peut valoir en faveur du calcul constitué des probabilités.

dans cette mathématisation des sciences complexes. La mathématique est toujours le type rêvé par les sciences ; on croit que les sciences de la nature ne seront vraiment des sciences que quand elles se réduiront à un système d'algorithmes. Et comme on n'est pas près d'aboutir à un tel résultat, on se hâte de s'approprier des formules qu'on croit applicables, et où l'on voit briller les symboles analytiques ; et l'on se persuade que l'on augmente la précision de la science, alors qu'on n'a fait que s'embarrasser de symboles plus ou moins incompris, très imprécis, sous leur apparence de précision, avec leurs approximations parfois lointaines, et leurs postulats parfois contredits par les faits.

Nous avons voulu faire réfléchir un peu sur les fondements de ces applications pour montrer où mène cet amour erroné de la mathématisation à outrance.

Et nous avons songé aussi à l'abus pseudo-scientifique du calcul des probabilités que n'ont pas manqué de faire tous ceux qui, aux confins de la science, prétendent pénétrer au delà de ses limites.

En appliquant mal le calcul, et au point de vue du calcul lui-même, et au point de vue de la matière qu'ils y fournissent, ils accumulent des chiffres auxquels ils font dire toute autre chose que ce qu'ils pourraient à la rigueur signifier. Et l'on ne sait si c'est chez certains, naïveté extrême, ou charlatanisme à outrance.

Aussi, ce que nous avons tâché de faire, c'est de dessiller les yeux des gens sincères qui se sont laissés impressionner par la magie toute-puissante des chiffres, souvent incompris. Mais, on ne le dira jamais trop, une science complexe qui persistera à user, comme méthode, de l'application du calcul des probabilites, même en s'attachant à ne commettre aucune erreur grossière, aura beau accumuler chiffres sur symboles et équations sur intégrales, elle n'en restera pas moins, avec son apparence sérieuse, inférieure à l'intuition vulgaire qui, pour avoir l'air moins précis, sera toujours cependant plus exacte. Et d'ailleurs l'ignorance qui prend un aspect de précision et qui s'amplifie par la mesure, en devenant fausse science, sera toujours plus dangereuse que celle qui, restant plus vague, restera plus facile à reconnaître

et à dépister ; elle sera plus dangereuse, car elle en imposera davantage.

Quand donc, lorsque l'on ne sait rien, si l'on ne peut rien savoir, se décidera-t-on à se limiter à la connaissance de cette ignorance même, à ne pas chercher à abuser les autres et à s'abuser soi-même ? La science ne s'accommode pas du bluff et de la fausse précision. Elle réclame avant toutes choses la sincérité et la conscience. Que celui qui ne sait pas n'hésite pas à dire : je ne sais pas. Et que celui qui ne veut pas employer les vieilles méthodes, laborieuses, mais fécondes, renonce à faire de la science, et qu'il ne fasse pas « appel au procédé des formules qui effectueraient sa besogne. » Enfin, laissons aux spéculations mathématiques le calcul des probabilités, et retournons à nos vieilles charrues pour continuer à labourer le champ illimité de la science.

N. Vaschide (Paris). H. Piéron (Paris).

BIBLIOGRAPHIE

Cette bibliographie, que nous avons tâché de rendre assez complète dans ses grandes lignes sans prétendre l'être complètement, comprend une série d'ouvrages sur les applications de la loi de Gauss à la psycho-physique ; ceci est en effet la base de la méthode essentielle des cas vrais et des cas faux. En butte aux objections générales que nous avons faites, cette application aurait pu être directement critiquée. Nous ne l'avons pas fait, car ç'aurait été discuter les fondements même de la psycho-physique, ce qui était trop spécial pour notre étude. Notons que M. Marcel Foucault, dans une thèse récente de la Faculté des Lettres de l'Université de Paris sur la psycho-physique, a pris à partie la loi de Gauss ainsi expliquée et a vivement discuté la légitimité de cette application [1]. Beaucoup de ses remarques nécessairement un peu spéciales, mais qui s'élèvent parfois à une certaine généralité encore un peu timide, concordent entièrement avec ce que nous avons tâché d'établir.

Inutile d'ajouter que ces remarques nous paraissent, par conséquent, être absolument justes.

On trouvera dans *H. Laurent* une bibliographie très complète des travaux concernant le calcul des probabilités ; la nôtre se réfère particulièrement aux problèmes qui nous préoccupent.

---

(1) Marcel Foucault, *La psycho-physique*, in-8°, Paris, p. 317-339.

Amann (J.). — Application du calcul des probabilités à l'étude de la variation d'un type végétal, *Bull. herb. Boissier*, 1896, IV, p. 577-590.
Ammon (O). — Die Vererbung Erworbener Eigenschaften. *Nat. Woch.*, Berlin, 1896, X, p. 306.
Ampère. — Considérations sur la théorie mathématique du jeu, in-4°, Lyon, 1802.
Auber. — Traité du calcul des probabilités. In-8°, Paris.
Baillaud. — Cours d'astronomie, 1re partie, chapitres I et II, 1893.
Barbier. — Notes sur le problème de l'aiguille et le jeu du point couvert. *Journal de Liouville*, 1860. V.
Bernouilli (Jacques). — Ars conjectandi. T.ad. Vastel. In-8°, 1801.
Bernouilli (Jean). — Sur les séquences de la loterie de Genève. *Histoire de l'Académie de Berlin*, 1769.
Bertrand. — Calcul des probabilités. In-8°, Paris, Gauthier-Villars, 1889.
Bessel. — Fundamenta Astronomiæ. Sect. II, 1818.
Binet. — Mensuration de la tête vivante. *Année psychol.* VIIe année, 1901, p. 359.
Boas. — Ueber die Berechnung der Unterschiedschwellenwerthe der Methode der richtigen und falschen Fälle. *Archiv. de Pflüger*, XXVIII, p. 84
Bourdon. — Recherches sur la succession des phénomènes psychologiques. *Rev. philos.* XXV, mars 1893, p. 226.
Bruns. — Ueber die Ausgleichung statisticher Zählungen in der Psychophysik. *Philos. Studien*, IX, p. 1.
Bruns. — Ueber die Darstellung von Fehlergesetzte. *Astron. Nachrichten*, 143, p. 329.
Bruns. — Zur Collectiomasslehre. *Philos. Studien*, XIV, p. 339.
Buffon. — Essais d'arithmétique morale. Histoire naturelle, supp., t. I.
Catalan. — Solution d'un problème relatif au jeu de rencontre. *Journal de Liouville*, II, 1re série.
Chandos (R.). — *Revue des Deux-Mondes*, 1887, p. 211.
Clarck. — The laws of chance applied to the solution of a great variety of problems relating to cards. Londres, in-8°, 1858.
Coupin. — Suggestion et prestidigitation. *La Nature*, 25 novembre 1899, p. 402.
Cournot. — Essai sur les fondements de notre connaissance et sur les caractères de la critique philosophique. In-8°. Paris, Hachette, 1851.
Cury. — Theory of errors of observation. Londres, 1875.
Czuber. — Theorie der Beobachtungsfehler. Leipzig, 1891.
D'Alembert. — Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie. In-12, Amsterdam, 1770. — Doutes et questions sur le calcul des probabilités p. 275-304. — Reflexions philosophiques et mathématiques sur l'application du calcul des probabilités à l'inoculation, p. 305-386.
D'Alembert. — Opuscules mathématiques, t. II, Mem. X.
Dormoy. — Théorie des jeux et du jeu de Baccara. *Journal des act. français*, IV.
Dormoy. — Théorie mathématique des paris de courses. *Journal des act. français*, II et III.
Euler. — Probabilité dans le jeu de rencontre. *Histoire de l'Ac. de Berlin*, 1751.
Euler. — Sur la loterie. *Histoire de l'Ac. de Berlin*, 1751.

EULER. — Sur l'avantage du banquier dans le jeu de Pharaon. *Hist. de l'Ac. de Berlin*, 1774.

FAYE. — Cours d'astronomie, 1re partie, livre III, t. I, p. 187-236, 1881.

FECHNER. — Elemente der Psychophysik, I, p. 102.

FECHNER. — Ueber die Methode der richtigen und falschen Fälle in Anwendung auf die Massbestimmungen der Feinheit oder extensiven Empfindlichkeit des Raumsinnes. *Abhandl. d. math. phys. Cl. d. Kgl. Sachs. Ges. d. Wiss*, XIII, 1884.

FECHNER. — Revision der Hauptpunkte der Psychophysik, p. 49.

FECHNER. — In Sachen des Zeitsinnes und der Methode der richtigen und falschen Fälle, gegen Estel und Lorenz. *Philos. Studien*, III, p. 12.

FECHNER. — Kollektiomasslehre, chapitre V, 1897.

FERMAT. — Correspondance avec Pascal.

FLAMMARION. — L'Inconnu et les problèmes psychiques, chapitre IV, p. 239-241.

FOUCAULT. — La psychophysique. Paris, Alcan, in-8°, 1901, p. 40, p. 327-339.

GAUSS. — Theoria motus corporum cœlestium. Liv. II, sec. 3, 1809.

GAUSS. — Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiæ. *Commentationes societ reg. scient.* Göttingue, vol. IV, 1823.

GEWATT. — The calculus of probabilities. Applied to psychical Research.

GOLDSTEIN (Ed). — Des applications du calcul des probabilités à l'anthropologie. *Revue d'anthropologie*, 2e série, t. VI, 1883, Paris, p. 704-728.

GOURÉAND. — Thèse sur l'histoire du calcul des probabilités, 1848.

HAUTESERVE. — Traité élémentaire sur les probabilités, in-12, 1834.

HENRI (V.). — Le calcul des probabilités en psychologie. *Année psychol.*, II, 1895, p. 466 (publié en 1896).

HENRI (V.). — Quelques applications du calcul des probabilités à la psychologie. *An. psych.*, V, 1898, p. 153-160 (publié en 1899).

HERSCHELL (G.). — Sur la théorie des probabilités et ses applications aux sciences physiques et sociales. *Revue d'Édimbourg*, no 185, juillet 1890, publié dans — Essays from the Edinburgh and quaterly Review, in-4°, Londres, 1897, et dans *Quételet*. Physique sociale, p. 1-89.

HUYGHENS. — Di ratiocinimis in ludo aliæ, 1658.

KÜLPE. — Grundriss der Psychologie, p. 66, 1893.

KAEMPFE-BRUNS. — Beitrag zur experimentelle Prüfungen der Methode der richtigen und falschen Fälle. *Philos. Stud.*, VIII, p. 511.

LACROIX. — Traité élémentaire du calcul des probabilités, in-4°, 1806.

LAGRANGE. — Recherches sur les séries recurrentes. *Mém. de l'Ac. de Berlin*, 1775.

LAGRULA. — Étude sur les occultations d'amas d'étoiles par la lune avec un catalogue normal des pleiades. Lyon, in-8°, 1901, p. 50.

LAPLACE. — Essai philosophique sur les probabilites, 4e ed. Paris, 1819.

LAPLACE. — Théorie analytique des probabilites, œuvres. Paris, in-4°, 1847, t. VII, l. II, ch. 5 et 6, p. 383-442.

LAURENT (H.). — Traité du calcul des probabilités, in-8°, Paris, 1873.

LAURENT (H.). — Jeux de hasard. Paris, in-12.

LORENZ (CARL). — Untersuchungen über die Auffassung von Ferndistanzen. *Philos. Stud.*, VI, p. 26.

LORENZ (GUSTAV). — Die Methode der richtigen und falschen Fälle in ihrer Anwendung auf Schallempf. *Philos. Stud.*, II, p. 394.

Merkel. — Theoretische und experimentelle Begründung der Fehlermethoden. *Philos. Stud.*, VII, p. 558.

Merrimau. — Method of least squares, 6e éd., New-York, 1894.

Moivre. — Doctrin of chances, in-4°, 1758.

Montmort. — Analyse des jeux de hasard, 1713.

Mosch Erich. — Zur Methode der richtigen und falschen Fälle im Gebiete der Schallempf. *Philos. Stud.*, XIV, p. 491. 1898.

Müller (G.-E.). — Zur Grundlegung der Psychophysik, ch. I à III.

Müller (G.-E.). — Über die Massbestimmungen des Ortsinnes der Hand mittels der Methode der richtigen und falschen Fälle. *Archiv. de Pflüger.*, XIX, p. 191.

Myers. — Das Doppel-ich. *Proceedings of Soc. for psych. Res.*, VI, 1889, p. 209.

Ottinger. — Sur le jeu de rouge et noir (ou trente et quarante). J. de Crelle, LXVII.

Paillot (R.). — Recherches sur les forces électromotrices d'aimantation. Thèse Fac. des Sc. de Lille, 1901, in-8°, Lille, p. 25-31.

Pizetti. — Fondamenti matematici per la triticadi resultati sperimentati, Genève, 1892.

Plytoff. — Les sciences occultes. Paris, J.-B. Baillière, in-12, 1891. ch. III. Le calcul des Probabilités. p. 47-66.

Pochet. — Sur le jeu de l'horloge. *Journ. des act. francais*, V.

Poincaré. — Calcul des probabilités (leçons). Paris, Carré, in-8°, 1896.

Poincaré. — Réflexions sur le calcul des probabilités. *Revue générale des sciences*, 5 avril 1899.

Poisson. — Sur le jeu de trente et quarante. *Gergonne*, XVI.

Poisson. — Recherches sur la probabilité des jugements, Paris, Bachelier, in-4°, 1837.

Quételet. — Sur la théorie des probabilités appliquées aux sciences morales et politiques, 1896.

Quételet. — Physique sociale ou essai sur le développement des facultés de l'homme, in-8°, 1869. Appendice p. 479-492, t. IV, p. 133-146.

Rabelais. — Pantagruel, l. III, ch. XLIII. Œuvres. Ed. Garnier, in-12. Paris, p. 288.

Regnault. — Calcul des chances et philosophie de la Bourse, in-8°. Paris, 1863.

Richet (Ch.). — Furker experiments or in hypnotic lucidity clairvoyance. *Proc. Soc. of. Psych.* t. VI, 1889, 75-82.

Scripture. — Studies from the Yale psychol. laboratory. vol. VII, 1899, p. 108, in-8°, New-Haven.

Scripture. — Computation of a set of simple diret ineasurements. *Stud. from the Yale psych. Labor.*, vol. VIII, 1900.

Sidgwick (H.). — Experiments in thought transference. *Proc. of Soc. Psych. Res.*, VI, 1889, p. 128.

Stieda (Dr L.). — Ueber die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der anthropologischen Statistik. *Archiv. für Anthropologie*, XIV, Braunschweig, 1882.

Taylor (L.). — Experimental comparison between chance and thought transference in correspondance of diagrams. *Proc. of Soc. of psych. Res.*, VI, 1889, p. 398-401-405.

Terquem et Damien. — La physique expérimentale. Paris, Hermann, in-8°, 1888. 1er fasc. Introduction. ch. II. p. 60-105.
Trembley. — Observations sur le calcul d'un jeu de hasard. Acad. de Berlin, 1802.
Vaschide (N.). — Experimental investigations in telepathic hallucinations. *The Monist*, 1902, vol. XII, ch. 24, p. 273-308-347-365.
Weinstein. — Handbuch der physikalischen Maasbestimmugen. Berlin, 1886.

Nous ne connaissons pas, à notre grand regret, les travaux de *K. Marbe* et celui de M. *Karl Pearson :* ils nous ont été signalés récemment par le professeur L.-W. Scripture.

Note de la Rédaction

L'article qu'on vient de lire est publié, comme tous ceux de notre revue, sous la responsabilité des auteurs.

Ceux-ci sont des psychologues qui jugent surtout les tentatives mathématiques dirigées dans le domaine de la psychologie, et la bibliographie qui précède montre assez qu'ils n'ont pas traité le sujet à la légère. Nous croyons toutefois que, s'ils ont raison d'attaquer certaines applications saugrenues, ils ont tort de s'en prendre aux formules elles-mêmes du calcul des probabilités. C'est ce que montre M. Cailler dans deux pages publiées ci-après dans la *Correspondance*.

Nous avons cru cependant que la lecture des pages écrites par ces psychologues qui se sont donnés la peine de devenir mathématiciens pouvait présenter un réel intérêt.

Une note fort juste nous semble donnée dans ces questions par M. Angel Gallardo (*Comptes rendus du deuxième Congrès international des Mathématiciens* : p. 395. — Les mathématiques et la biologie). Pour cet auteur « les objections ne doivent pas être adressées aux méthodes mêmes mais à la manière de s'en servir. »

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

Semestre d'été 1903

ALLEMAGNE

Greifswald. (Beginn : 15 April). — THOMÉ : Potentialfunktion, 4^{st} ; Th. d. algebraischen Flächen und Raumcurven, 2 ; Math. Seminar, 2. — STUDY : Infinitesimalrechnung I, 4, Uebungen dazu, 1 ; Liniengeometrie. 3 ; Math. Seminar. — KOWALEWSKI : Allgemeine Funktionentheorie, 4 ; Geometrie der Zahlen, 1 ; Uebungen zur Funktionentheorie, 1.

Heidelberg. (Beginn : 20 April). — KŒNIGSBERGER : Differential- und Integralrechnung, 4^{st} ; Funktionentheorie, 4 ; Math. Unter-u. Ober-Seminar. — M. CANTOR : Anwendung der Analysis auf höhere algebraische Kurven in der Ebene, 4 ; Arithmetik und Algebra (für Kameralisten), 3. — EISENLOHR : Wahrscheinlichkeitsrechnung, 3 ; Mechanik, 4. — KOEHLER : Analytische Geometrie der Ebene, 3. — LANDSBERG : Th. der Determinanten u. Invarianten, 4 ; Ausgewählte Kapitel der Theorie des Alg. Funktionen. — BOEHM ; Th. d. elleptischen Funktionen, 2. — VALENTINER : Bahnverbesserung einschliesslich spezielle Störungen.

Iena. (vom 20 April bis 8 Aug. 1903). — GUTZMER : Differenzialrechnung mit Uebungen, 5^{st} ; Einführung in die Theorie der diff. Gleichungen, 5. — THOMAE : Analytische Geometrie der Ebene, 4 ; Math. Geographie, 3. — FREGE : Funktionentheorie nach Riemann, 4 ; Math. Uebungen, 1. — KNOPF : Zeit u. Ortsbestimmung mit prakt. Ueb. auf der Sternwarte, 4 ; Geodäsie mit prakt. Ueb. im Gelände, 2.

Leipzig. — C. NEUMANN ; Differential-und Integralrechnung (Fortsetzung und Anwendungen), 8^{st} ; Math. Seminar, 2. — A. MAYER : Gewöhnliche Differentialgleichungen, 4 ; Uebungen dazu, 1.— HÖLDER : Anwendungen der elliptischen Funktionen, 3 ; Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung, 3 ; Seminar, 1. — ENGEL : Analytische Geometrie, 4 ; Uebungen dazu, 1 ; Alg. Gleichungen (Forts.), 2 ; Trans-

formationsgruppen; 2. — HANSDORFF : Th. der Kurven u. Flächen, 4 : Ueb. dazu, 1. — LIEBMANN : Einführung in die höhere Analysis, 3 ; Nichteuklidische Geometrie, 2. — BRUNS : Fehlertheorie u. Ausgleichungsrechnung, 2 ; Himmlische Mechanik (II theil), 2. — PETER : Bahnverbesserung und spezielle Störungen, 2. — BRUNS u. PETER : Prakt. Uebungen auf der Sternwarte. — STUCKER : Prakt. Geometrie mit Uebungen im Feldmessen und Nivelliren, 2. — v. OETTINGEN : Geometrischperspektivisches Zeichnen, 2. — O. FISCHER : Einführung in die math. Behandlung der Naturw. (Anal. Geom., Diff. u. Int. rechnung), 3.

FRANCE

Paris. (*Sorbonne*). E. PICARD : Equations différentielles au point de vue de la physique mathématique, 1 h. Théorie des fonctions algébriques de deux variables, 1 h. — E. GOURSAT : Equations différentielles, 1 h. — P. APPELL : Mouvement des systèmes, mécanique analytique, mécanique des fluides, 2 h. — C. WOLF : Astronomie, 2 h. — M. BOUSSINESQ : Phénomènes ondulatoires, 2 h. — M. KŒNIGS : Elasticité et résistance des matériaux, 2 h. — L. RAFFY : Equations différentielles et leurs applications à la mécanique et à la physique, 2 h. Conférences sur le calcul infinitésimal, 1 h. — J. HADAMARD : Conférences sur les cours de M. Goursat, 1 h. et de M. Picard, 1 h. — M. PUISEUX : Conférences de mécanique et d'astronomie, Lune, détermination des longitudes, 2 h. — M. ANDOYER : Théorie des éclipses, 1 h. — BLUTEL : Conférences aux candidats à l'Agrégation. — M. SERVANT : Conférences de mécanique physique.

Paris. (*Mairie du IX^e arrondissement*). COURS DE L'INSTITUT FINANCIER ET DE L'INSTITUT DES ASSURANCES DONNÉS PAR L'ASSOCIATION PHILOTECHNIQUE. — Nous regrettons de parler aussi tardivement de ces cours qui fonctionnent depuis le 10 novembre 1902. Ils sont destinés aux personnes qui veulent se mettre au courant des théories mathématiques des opérations commerciales et financières et mettent les candidats à même de subir l'épreuve d'admission à l'*Institut des actuaires français*.

Directeurs des cours : MM. Charliat et Barriol.

M. ROUX : Comptabilité financière, le lundi à 8 heures et demie du soir. — M. BONDON : Théorie et pratique des opérations des grands établissements de crédit, le mardi à 8 h. — M. ICHAC : Bourse et finance, le mardi à 9 h. — M. CHEVALIER : Economie sociale, le mardi à 8 h. — M. BARRIOL : Opérations financières à long terme, le mercredi à 8 h.

M. POUSSIN : Théorie des assurances sur la vie, le mercredi à 9 h. — M. BOSLER : Mathématiques préparatoires, le jeudi à 8 h. — M. COTTIN : Mathématiques complémentaires, le jeudi à 9 h — M. PETIT :

Calcul des probabilités, le vendredi à 8 h. — M. Le Vasseur : L'assurance au point de vue de l'inspection, le vendredi à 8 h. — M. Lange. Assurances maritimes, le samedi à 9 h. — M. Deléarde : Assurances contre les accidents, le samedi à 9 h.

SUISSE

Bern. (21 April *bis* 25 Juli). — J. H. Graf : Besselsche Funktionen mit Repetitorium, 3st ; Elliptische Funktionen mit Repet, 3 : Funktionentheorie, 2 ; Differentialgleichungen, 2 ; Differential-und Integralrechnung, 2 ;— Graf u. Huber : Mathematisches Seminar, 2. — Graf u. Moser : Mathematischversicherungswissenschaftliches Seminar, 1. — Huber : Sphärische Astronomie (II Teil), 2 ; Einleitung in die Theorie der alg. Flächen, 2. — Sidler : Ueber Ellipsenbogen, deren Differenz rektifizierbar ist, 2. — Ott : Differentialrechnung, 2 ; Analytische Geometrie, 2. — Benteli : Elem. d. darst. Geometrie, 4 ; Praktische Geometrie, mit Ueb. auf dem Terrain, 3. — Moser : Die Intensitätsfunktion und ihre Anwendung zur Sterblickkeitsmessung (1-2 st). — Crelier : Géométrie synthétique dans l'espace, 2.

Genève. (du 8 avril au 15 juillet). — C. Cailler : Calcul différentiel et intégral, 3 h. ; Mécanique rationnelle, 3 ; Conférences d'analyse supérieure, 2. — H. Fehr : Théorie générale des équations, 2 ; Géométrie descriptive, 2. — C. Cailler et H. Fehr : Exercices pratiques de Calc. diff. et int., 2 ; d'Algèbre et Géométrie supérieures ; de Mécanique rationnelle 2. — R. Gautier : Astronomie théorique, 2 ; Météorologie, 2. — D. Mirimanoff : Le problème de Dirichlet.

CHRONIQUE

Le Congrès international des sciences historiques à Rome.

En avril prochain se tiendra à Rome un congrès d'Histoire des Sciences sous le patronage de S. M. le Roi d'Italie. Des sections particulières sont réservées aux mathématiques, à la physique, à l'astronomie, à la géodésie. Les invitations ont été lancées avec les signatures des professeurs P. Blaserna, V. Cerruti, V. Volterra, P. Giacosa, G. Loria. Pour participer au Congrès il est nécessaire d'adresser l'adhésion au *Secrétaire général du Congrès, Palazzo del Collegio Romano* (via Collegio Romano, 26). L'inscription est de 15 francs. Moyennant 40 francs on obtiendra le titre de sociétaire fondateur du Congrès.

Ces détails matériels étant donnés, nous pouvons ajouter que ce congrès s'annonce comme devant être des plus intéressants ; bon nombre de communications ont été déjà annoncées par MM. Cantor, Favaro, Celoria, Vacca, Vuibert, P. Tannery, G. Loria. Des rapports seront faits sur des thèmes choisis par le comité d'organisation, l'un de ces thèmes touchant à l'introduction de l'histoire des sciences dans l'Enseignement supérieur. Il y aura également une conférence sur *l'histoire générale des sciences*, à laquelle sont invités tous les membres du congrès, qui sera faite par M. P. Tannery avec la haute compétence qu'on lui connaît. D'ici à l'ouverture du congrès, ce programme ne pouvant que s'augmenter, on voit combien la tentative promet d'être heureuse.

Achille Goulard.

Nous avons appris, trop tard pour l'annoncer dans notre numéro de novembre 1902, la mort d'Achille Goulard, professeur au lycée de Marseille. Il a succombé, dans les derniers jours d'octobre 1902, à l'âge de 42 ans, aux atteintes d'une maladie cruelle, contre laquelle il luttait depuis plusieurs années avec une énergie, hélas ! inutile. C'était un professeur excellent, dévoué à son enseignement autant qu'on peut l'être, et un esprit mathématique remarquablement fin et original. Un grand nombre de notes, parues surtout dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, en sont la preuve et ses lecteurs déploreront avec nous la perte prématurée de celui dont on pouvait encore tout attendre.

A côté du professeur et du savant, il y avait en lui l'homme, le père de famille, admirable de dévouement et de conscience. En exprimant aux siens la part qu'elle prend à leur douleur, la rédaction de *l'Enseignement Mathématique*, sait qu'elle ne peut leur apporter ni consolation, ni adoucissement ; mais elle accomplit un devoir de confraternité et de justice.

CORRESPONDANCE

A propos d'un article sur le calcul des probabilités.

Les auteurs de l'article sur les *Applications du calcul des probabilités à la méthode scientifique* publié dans le dernier numéro de l'*Enseignement mathématique*, (5e année, p. 3-29), à côté de nombre de remarques judicieuses et d'applications intéressantes ont commis quelques inadvertances. Je me permets d'en relever en passant quelques-unes pour l'instruction de ceux de nos lecteurs qui n'ont pas le loisir de refaire les calculs de MM. VASCHIDE et PIÉRON.

Ces auteurs trouvent une absurdité dans la formule approchée

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} e^{-\frac{h^2}{2mpq}}$$

de la probabilité d'un écart égal à h sur une série de m parties. A les en croire, le bon sens indique que, h restant fixe et m croissant, cette probabilité doit croître toujours, au lieu que la formule après une courte période de croissance passe par un maximum puis diminue constamment. Bien qu'ils ne présentent pas leur objection avec toute la netteté désirable, ils paraissent admettre que le soi-disant paradoxe provient de l'approximation insuffisante de la formule de Stirling et des simplifications employées pour obtenir la formule précédente. Or il est aisé de montrer que le maximum existe encore dans la formule rigoureuse. Par exemple, en jouant $2s$ parties à rouge ou noire, la probabilité d'un écart h au profit de la rouge, autrement dit la probabilité de voir la rouge sortir $(s+h)$ fois et la noire $(s-h)$ fois seulement est

$$\frac{2s\,!}{(s+h)!\,(s-h)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2s}.$$

Si s augmente d'une unité la valeur précédente se multiplie par le facteur

$$\frac{(2s+1)(2s+2)}{(s+1+h)(s+1-h)}\,\frac{1}{4};$$

ainsi, lorsque s est plus petit que $2h^2-1$, la probabilité d'un écart h

augmente avec s, tandis que si s a dépassé $(2h^2 - 1)$, cette probabilité décroît et même va jusqu'à zéro quand s va à l'infini.

Non seulement il n'y a rien là de contraire au bon sens, ainsi qu'on peut s'en convaincre par l'examen de petits nombres s et h, mais le fait même de la diminution de P avec s est en parfaite harmonie avec le théorème de Bernoulli. Si la probabilité d'un écart égal à h augmentait sans cesse avec s, il en serait de même pour la probabilité d'un écart absolu plus petit qu'un nombre fixe quelconque et l'on ne serait pas autorisé à conclure que l'écart absolu augmente sans limite avec le nombre des parties. En outre, le maximum de la formule approchée correspond, dans le cas présent, à la valeur $4h^2$ du nombre m, tandis que le maximum de la formule exacte donne, comme on vient de voir, $m = 2s = 4h^2 - 2$. La faiblesse de l'erreur relative pour h tant soit peu grand, est de nature à accroître la confiance accordée à la formule approchée.

Je conclus que les deux formules

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2mpq}}\, e^{-\frac{h^2}{2mpq}} \quad \text{et} \quad P_2 = \Theta\left(\frac{h}{\sqrt{2mpq}}\right),$$

bien que non équivalentes, sont exactes l'une et l'autre au moins en première approximation : la première donne la probabilité d'un écart égal à h, la seconde la probabilité d'un écart plus petit que h.

Un autre point appelle encore une critique. Aussi bien rien n'est plus instructif et ne met mieux en évidence ce qu'il y a de vague dans les principes du calcul des probabilités et de décevant dans beaucoup de ses applications, que les divergences d'appréciation qui se produisent à propos des problèmes les plus simples.

Ainsi nos auteurs prennent à partie M. Poincaré au sujet du problème de rouge et noire et ne combattent que mollement l'opinion des joueurs qui mettent sur la noire après la sortie de six rouges consécutives. N'est-ce pas là cependant supposer de la mémoire à la roulette, lui prêter des intentions ?

Après l'apparition de six rouges il faut, pour savoir si la série est close, jouer un septième coup. Nos joueurs, si du moins ils se donnent la peine d'analyser leurs impressions, partent donc de l'idée que les séries de six rouges suivies d'une noire sont plus fréquentes que les séries de sept rouges. Or si l'on admet la probabilité de la sortie d'une rouge ou d'une noire soit $\frac{1}{2}$, toute succession donnée de ces couleurs, celle-ci par exemple : rouge, noire, noire, noire, rouge, noire, rouge, a une probabilité égale à $\frac{1}{128}$. Ainsi la sortie de ces deux couleurs dans l'ordre indiqué est aussi probable que celle de toute autre succession et sera, en pratique, aussi rare que la sortie de sept rouges de suite. Je ne vois pas ce qu'on peut objecter de fondé à ce raisonnement.

C. Cailler (Genève).

1. Sur les formules de Bonnet, Enneper et Kommerell.

La formule de *Bonnet :*

$$\frac{1}{R} \pm \frac{d\omega}{ds} = \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right) \sin\varphi \cos\varphi \tag{1}$$

qui détermine la torsion géodésique de toute courbe d'une surface, comprend, comme cas particuliers, celles d'*Enneper* pour les lignes asymptotiques :

$$R = \pm\sqrt{-\rho_1\rho_2} \tag{2}$$

et de M. *Kommerell* pour les géodésiques (*Archiv der Math. und Physik*, 3[e] Reihe, B. I, S. 116-7) :

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right)\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho}\right); \tag{3}$$

mais cette circonstance apparaît bien plus clairement, si l'on donne à la formule de Bonnet (1) une autre forme. En effet, éliminons φ entre (1) et l'équation :

$$\frac{\cos\omega}{\rho} = \frac{\cos^2\varphi}{\rho_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho_2};$$

on a :

$$\frac{\cos\omega}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} = \sin^2\varphi\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right), \quad \frac{1}{\rho_2} - \frac{\cos\omega}{\rho} = \cos^2\varphi\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right),$$

d'où la formule (1) se transforme en la suivante :

$$\left(\frac{1}{R} \pm \frac{d\omega}{ds}\right)^2 = \left(\frac{\cos\omega}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right) \cdot \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{\cos\omega}{\rho}\right); \tag{1'}$$

sous cette forme, on voit tout de suite qu'elle comprend la formule (2) pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, et la formule (3) pour $\omega = 0$. Plus généralement, pour les courbes $\omega = \text{const.}$, elle devient :

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{\cos\omega}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right)\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{\cos\omega}{\rho}\right). \tag{1''}$$

Enfin, pour les lignes de courbure, elle donne le théorème dit de *Lancret :*

$$\frac{1}{R} = \pm\frac{d\omega}{ds}.$$

A propos de la démonstration des formules (1), (2) et (3), je voudrais observer que la manière la plus courte de la faire, c'est de partir des équations :

$$\cos\omega = \frac{\zeta - p\xi - q\eta}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

ou :

$$\lambda = \frac{\pm p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \mu = \frac{\pm q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \nu = \frac{\mp 1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

ou enfin :

$$\xi = \frac{\pm p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \eta = \frac{\pm q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \zeta = \frac{\mp 1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

respectivement, que l'on différentie et ajoute.

2. Remarque sur les lignes de courbure.

Dans toute ligne de courbure on a :

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{d\omega}{ds},$$

d'où :

$$\omega = \pm \int \frac{ds}{R} + c;$$

d'autre part :

$$\rho_1 \cos\omega = \rho,$$

ou :

$$\frac{\cos\omega}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}.$$

Donc :

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\cos\left(\pm \int \frac{ds}{R} + c\right)}{\rho}.$$

et de même :

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\cos\left(\pm \int \frac{ds'}{R'} + c'\right)}{\rho'}.$$

3. *Quand la trajectoire d'un mobile est plane, l'hodographe l'est aussi, quel que soit le mouvement*, car de la relation :

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

on tire :

$$A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} = 0;$$

réciproquement, *si l'hodographe se trouve dans un plan passant par l'origine, la trajectoire est plane*, car de :

$$A\frac{dx}{dt}+B\frac{dy}{dt}+C\frac{dz}{dt}=0$$

on trouve :

$$Ax+By+Cz=D.$$

4. Dans le mouvement central on a :

$$\frac{x''}{x}=\frac{y''}{y}=\frac{z''}{z}$$

et la trajectoire est plane. *La trajectoire est aussi plane* (mais dans un plan qui ne passe plus *nécessairement* par l'origine) *quand on a :*

$$\frac{x'''}{x'}=\frac{y'''}{y'}=\frac{z'''}{z'}$$

(c'est-à-dire *quand le mouvement sur l'hodographe est central*); car on trouve :

$$y'x'''-x'y'''=0,\ \text{etc.}$$

d'où :

$$y'x''-x'y''=C,\quad z'y''-y'z''=A,\quad x'z''-z'x''=B,$$

et :

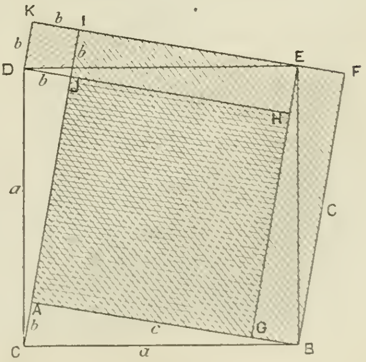
$$Ax'+By'+Cz'=0,$$

et par conséquent :

$$Ax+By+Cz=D.$$

Juin 1902. N. J. Hatzidakis (Athènes).

Sur le théorème du carré de l'hypoténuse



Le carré CDEB $= a^2$ construit sur l'hypoténuse BC du triangle rectangle ABC est égal à la surface du carré AJHG $=(c-b)^2$, plus les quatre triangles rectangles égaux ABC, CDJ, DHE, EBG.

Les carrés ABFI $= c^2$ et DKIJ $= b^2$ ont également pour surface AJHG $=(c-b)^2$, plus les quatre triangles rectangles (égaux à ABC) DKE, DEH, EFB et EGB.

La somme des surfaces de ces deux derniers est donc bien équivalente à celle du carré construit sur l'hypoténuse.

L. Barré.

Sur une question de convergence

Dans le débat engagé entre M. Barbarin et moi, au sujet d'un théorème sur un quadrilatère birectangle, (*L'Ens. Math.*, 1902, p. 343-346 et 438-444), il s'agit de savoir si une certaine suite de distances, comptées sur un même côté du quadrilatère, peut-être convergente ou non.

M. Barbarin dit *oui*, moi je dis *non*.

Pour justifier sa manière de voir, mon distingué contradicteur s'appuie tout d'abord sur l'atomisme géométrique de M. Bonnel. Ce simple fait me suggère déjà une réflexion.

Je serais curieux de savoir si M. Barbarin, qui utilise si adroitement l'atomisme bonnélien contre ma démonstration du postulatum d'Euclide, admet celle que M. Bonnel prétend donner du même postulatum au moyen du même atomisme [1] S'il ne l'admet pas, comme il est probable, comment la réfute-t-il ? Et s'il l'admet, comment explique-t-il qu'une théorie capable, à ses yeux, de démontrer le postulatum, soit capable également de démontrer la *fausseté* d'une proposition *qui est certainement vraie si le postulatum est démontré* et de laquelle, pourvu qu'on la démontre avant le postulatum, on peut faire dépendre la démonstration de celui-ci ?

Quoi qu'il en soit, admettons pour le moment, avec M. Bonnel et M. Barbarin, la notion d'*atome linéaire*, c'est-à-dire la notion d'*une longueur qui, sans être nulle, serait cependant plus petite que toute longueur assignable*.

Rapprochant de cette notion l'exemple classique des polygones réguliers convexes de *n* côtés, inscrits et circonscrits à une même circonférence, M. Barbarin pose en principe que les distances successives AE, EG..., peuvent décroître constamment.

Faisant ensuite l'hypothèse que l'une de ces distances VX est égale à l'atome linéaire, il en conclut que la distance suivante XX' « ne saurait exister » c'est-à-dire doit être *nulle*.

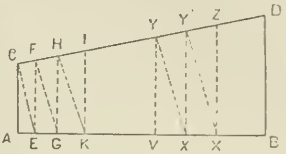
J'observe tout d'abord que cette conclusion au sujet de XX' me paraît difficile à concilier avec un fait accepté par M. Barbarin, à savoir : qu'*aucune* des distances AE, EG..., « ne peut être rigoureusement nulle, en vertu de la construction employée. »

Je rappelle ensuite qu' « en vertu de la construction employée », la valeur des distances AE, EG..., est *commandée* par celle des angles ACD, EFD..., et que, par suite, une hypothèse sur la valeur des distances n'est acceptable que *si elle est compatible avec la valeur des angles.*

Cette remarque faite, supposons, je le veux bien, que VX soit égal à l'atome linéaire. Cela revient à dire que VX, si petit soit-il, n'est pas

(1) J. Bonnel. *Les atomes et hypothèses dans la Géométrie*, p. 78 et 113 ; *La géométrie atomique rationnelle*, p. 65.

nul. Donc XY ne coïncide pas avec VY. On a donc un triangle XVY rectangle en V, exigeant par conséquent que l'angle VXY soit *aigu*. Et voilà par le fait anéantie la conclusion de M. Barbarin, affirmant que XY est *perpendiculaire commune* à AB et à CD. — L'angle VXY étant aigu, il s'ensuit (je crois inutile de l'expliquer avec plus de détail) que *l'angle* XY′D *est obtus*. Donc X′Y′, perpendiculaire à CD en Y′, ne coïncide pas avec XY′, et par suite XX′ *ne peut être nul*. Il faut donc, d'après les principes mêmes de l'atomisme bonnélien, que XX′ soit *au moins* égal à l'*atome linéaire*, c'est-à-dire à VX.



Ainsi s'évanouit l'objection de M. Barbarin, fondée sur *l'hypothèse* que XX′ *peut être moindre que* VX.

Quel que soit, par conséquent, le crédit que mérite le singulier atomisme de M. Bonnel, la démonstration de mon théorème n'en peut recevoir aucune atteinte.

Me voilà donc bien à l'aise pour déclarer maintenant que je repousse absolument une théorie d'après laquelle, pour une valeur de n suffisamment grande, mais **finie**, l'expression $\frac{1}{n}$ *ne peut diminuer* **sans s'annuler**. J'estime qu'une pareille *condition* suffit pour juger, je veux dire pour condamner la théorie qui l'exige.

Mais alors, impossible de contester, avec M. Barbarin, l'exactitude de cette assertion : « Il n'y a que les longueurs pouvant devenir *nulles* dont on puisse dire qu'elles peuvent tomber au-dessous de *toute* longueur assignable. »

Impossible également de soutenir, avec M. Barbarin, que la différence P — p des périmètres de deux polygones réguliers convexes de n côtés, l'un circonscrit, l'autre inscrit à une circonférence de rayon R peut « tomber au-dessous de **toute** longueur assignable » sans « jamais devenir nulle ». C'est contradictoire, comme on peut en juger par la formule

$$P - p = \frac{1}{n} \cdot \frac{Pp^2}{2R\left(2nR + \sqrt{4n^2R^2 - p^2}\right)}.$$

Autre objection. — Elle est inspirée par les travaux de M. de Tilly, d'après lesquels toute la métagéométrie peut découler de la notion de distance « considérée comme seule notion première intuitive. » M. Barbarin veut bien en tirer d'abord la conclusion que mon théorème demeure vrai « dans le système usuel (euclidien) comme dans le système lobatchefskien ».

C'est tout ce que je demande !

— Mais, poursuit mon distingué contradicteur, il n'en est plus de même dans la géométrie de Riemann.

— Que m'importe ? La géométrie riemannienne n'a rien à faire ici, parce que ses données fondamentales *ne répondent pas à l'état de la question dont il s'agit.* Le compte à régler entre la géométrie euclidienne et la riemannienne est un compte *à part :* on le règlera quand sera réglé celui de la géométrie lobatchefskienne.

Dernière objection. — C'est moi-même, paraît-il, qui en ai fourni les éléments en déclarant qu'au fond, dans le théorème en litige, « il s'agit de savoir si les angles correspondants successifs ACD, EFD..., sont *tous* obtus ou *tous* aigus. » De cette façon d'envisager la question, M. Barbarin conclut comme précédemment que mon raisonnement n'est admissible que pour les deux géométries euclidienne et lobatchefskienne.

Encore une fois, c'est tout ce que je demande !

Je récuse, d'ailleurs, l'obligation que veut m'imposer mon contradicteur de m'assurer si les angles successifs ACD, EFD, GHD..., « obtus depuis le premier jusqu'au n^e inclusivement, c'est entendu » sont croissants constants ou décroissants. Il me suffit de savoir qu'ils demeurent *obtus.*

En résumé, des diverses objections de M. Barbarin, contre mon théorème les unes ne l'atteignent pas, les autres le confirment plutôt, toutes crient en quelque sorte : il faut bien que le théorème soit bon, puisqu'il résiste à la critique de M. Barbarin.

Il me reste maintenant à répondre à une seconde critique.

« En partant des définitions habituelles de la droite du plan, dit M. Mansion (*L'Ens. Math.*, 1903, p. 65), on prouve qu'il existe entre l'hypoténuse a et les côtés b et c d'un triangle rectangle l'une des relations

$$(L) \qquad ch\left(\frac{a}{l}\right) = ch\left(\frac{b}{l}\right) ch\left(\frac{c}{l}\right).$$

$$(E) \qquad a^2 = b^2 + c^2,$$

suivant que *l'on rejette* ou que *l'on admet* le postulat de la parallèle unique, et réciproquement. Il en résulte que le postulat de la parallèle unique est indémontrable en se servant des définitions *seules,* puisque ces définitions conduisent à deux relations distinctes dont la seconde seulement a pour conséquence ce postulat. »

Pour prévenir toute équivoque, rappelons d'abord que, d'après les définitions auxquelles se réfère ici M. Mansion, la ligne droite est telle que *par deux points donnés quelconques on en peut mener une et une seule.* — Partant de là (et en admettant, bien entendu, les postulats ordinaires autres que le postulat en litige), le raisonnement de M. Mansion serait péremptoire si les définitions *seules* de la droite et du plan conduisaient effectivement à la relation (L). Mais justement, et d'après

ce que dit M. Mansion lui-même au début de sa remarque, ce ne sont pas les définitions *seules* qui conduisent à la relation (L), c'est encore et avec elles *la contradictoire du postulat de la parallèle unique*. On ne peut donc pas savoir, d'après la seule relation (L), si les définitions *seules* de la droite et du plan ne contiennent pas le postulat de la parallèle unique. Rien ne sert alors d'observer que la relation (E) *exige* ce postulat. Cela signifie, en effet, que pour obtenir la relation (E) il faut ajouter le postulat aux définitions *si elles ne le contiennent pas*. Cela ne signifie pas du tout qu'elles ne le contiennent pas. Dira-t-on que la preuve qu'elles ne le contiennent pas c'est que la relation (L) démontre l'absence de contradiction dans les conséquences de la contradictoire du postulat ? C'est revenir au sempiternel sophisme dont on a voulu faire l'*argument de non-contradiction* et que nous avons réfuté dans cette Revue (*Sept.* 1902, p. 330-333). Donc ni la relation (L), ni la relation (E), considérées soit séparément, soit simultanément, ne permettent de conclure à l'indémontrabilité du postulat de la parallèle unique.

Quant à l'argument de la pseudosphère, M. Mansion affirme qu'il est « parfaitement *probant* quand on l'entend d'une pseudosphère enroulée un nombre infini de fois sur elle-même ». A cette affirmation pure et simple j'oppose cette simple observation que ma réfutation de l'argument de la pseudosphère (*L'Ens. math.*, 1902, p. 333-336) est parfaitement indépendante de l'enroulement illimité de la pseudosphère sur elle-même.

C. Vidal. (Paris).

Janvier 1903.

BIBLIOGRAPHIE

P. Appell. — Traité de Mécanique rationnelle. t. III. Equilibre et mouvement des milieux continus. Paris, Gauthier-Villars. Un beau vol. gr. in-8° de 558 pages. Prix : 16 fr.

Le tome troisième du *Traité de Mécanique rationnelle* termine le magistral ouvrage entrepris par M. P. Appell. Il ne m'appartient guère d'en faire l'éloge, si ce n'est par cette simple remarque que bien avant la publication du dernier volume, toute l'édition du premier était épuisée. Toutefois ceux qui comme moi se sont assimilés les méthodes de la Mécanique en étudiant cette œuvre simple et savante, se douteront bien que les questions, autrefois si obscures, de la Statique et de la Dynamique des fluides, vont être présentées à eux avec un intérêt nouveau et une clarté nouvelle.

Le volume débute par l'exposition analytique de formules qui sont d'un usage constant en Physique mathématique et en Mécanique : formules de Green, d'Ampère et de Stokes, qui servent à transformer une intégrale triple étendue à un volume, en une intégrale double étendue à la surface qui le limite, ou une intégrale double étendue à une aire en une intégrale simple étendue au contour de cette aire. La notion de *tourbillon* est introduite avec une grande simplicité et, par son emploi, on retrouve de façon toute naturelle des théorèmes connus d'analyse élémentaire. Ainsi écrire que $Pdx + Qdy + Rdz$ est une différentielle exacte, c'est écrire qu'un tourbillon est nul.

Après ces notions analytiques, nous abordons la théorie de l'attraction. M. Appell nous fait remarquer tout au début qu'on passe de l'attraction newtonienne aux attractions électriques et magnétiques, en remplaçant la constante positive f par une constante négative $-k$.

L'expression $-kmm'r^{-2}$ est bien alors positive, tout comme dans le cas d'une attraction newtonienne, si les masses m et m' sont de signes contraires. Si elles sont de même signe, il y a répulsion. Beaucoup de calculs cessent alors d'être des exercices analytiques et donnent des résultats tangibles. Au point de vue de la seule attraction newtonienne à quoi sert d'étudier l'action que peuvent avoir l'une sur l'autre deux portions de plans parallèles ?

En électricité, au contraire, ce calcul ne se présente-t-il pas naturellement dans l'étude du condensateur ?

Nous trouvons aussi une théorie succincte de l'aimant élémentaire et du potentiel d'une double couche magnétique.

Inutile de dire que les exemples de calculs d'attraction sont nombreux et variés ; les théorèmes d'Ivory sur les ellipsoïdes homofocaux sont, par contre, simplement cités comme exercices et rien n'est plus heureux que la sup-

pression de démonstrations compliquées qui, dans certains traités, tiennent la moitié des pages réservées à l'attraction. Dans l'ouvrage de M. Appell ces pages ne sont pas prétextes à des subtilités analytiques qui font perdre de vue les applications à faire ultérieurement.

Nous passons ensuite aux propriétés générales des fonctions vérifiant l'équation de Laplace $\Delta U = 0$ et dites *fonctions harmoniques*, puis aux masses attirantes illimitées et au potentiel logarithmique : pour les masses illimitées, l'auteur montre que le mot *attraction* peut ne plus avoir de sens, comme dans le cas du plan indéfini.

Ce n'est qu'après ces préliminaires que nous entrons, à proprement parler, dans l'étude de l'équilibre et du mouvement intérieurs *d'une masse continue.*

Il ne s'agit pas encore d'hydrostatique ou d'hydrodynamique, mais de généralités relatives à tout milieu continu gazeux, liquide ou solide, desquelles on déduira plus tard la mécanique des fluides et la théorie de l'élasticité. Il y a à signaler ici tout particulièrement la belle représentation géométrique de Cauchy pour la variation en direction de l'effort élémentaire, représentation semblable à celle que fournit l'ellipsoïde d'inertie dans la théorie des moments.

Au début de l'hydrostatique et, comme une des premières applications, nous rencontrons la formule barométrique discutée avec achèvement complet des calculs et même mise sous la forme qui s'accorde avec les tables de M. Mathieu, publiées dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*. Viennent ensuite le principe d'Archimède et l'étude générale de l'équilibre isotherme. Le cas où les forces dérivent d'une fonction de forces non uniforme est bien curieux ; il matérialise pour ainsi dire certaines conceptions de la théorie des fonctions. Soit la fonction de forces

$$U = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}$$

uniforme dans toute surface fermée n'entourant pas l'axe des z ; elle permet un état d'équilibre à un fluide enfermé dans une telle surface. Mais si la surface entoure l'axe des z, le fluide se met en mouvement ; introduit-on une cloison pour empêcher ce mouvement, elle ne l'empêchera que si elle fait l'effet d'une coupure rendant à nouveau la fonction U uniforme.

Des considérations des plus utiles viennent ensuite sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, questions fondamentales en mécanique céleste et que les beaux travaux de M. Poincaré ont beaucoup avancées, surtout quant aux figures d'équilibres ellipsoïdales, annulaires et autres qui n'ont pas forcément plusieurs plans de symétrie. Après l'équilibre des fluides pesants nous trouvons celui des corps flottants. Le sujet date d'Archimède et cependant, après les travaux de M. Guyou, il paraît né d'hier. Je ne puis entrer ici dans tous les théorèmes élégants auxquels il donne lieu, mais le résultat fondamental est des plus simples à énoncer : la détermination de l'équilibre d'un corps flottant se ramène à celle de l'équilibre d'une certaine surface (surface des centres de carène) que l'on peut supposer réalisée matériellement et posée sur un plan horizontal rigide.

Avant d'entrer définitivement dans la Dynamique, M. Appell nous fait étudier les propriétés purement géométriques et cinématiques de la déformation des milieux continus.

L'équation de continuité est donnée sous une forme absolument générale et, dans l'étude des dilatations autour d'un point, nous retrouvons encore un ellipsoïde pour interpréter plus commodément les choses ; il y a là une représentation géométrique qui fait facilement image. Une déformation *homogene* d'une masse continue est caractérisée par ce fait que ces ellipsoïdes de dilatation sont égaux et orientés de la même façon en tous ses points. Pour une déformation quelconque, nous pouvons imaginer en chaque point de la masse une *déformation homogène tangente*, conception de même nature que celle du mouvement hélicoïdal tangent dans l'étude du déplacement d'un solide invariable et qui ne le cède en rien à cette dernière au point de vue de l'élégance et de l'utilité.

Dans la cinématique des milieux continus, nous trouvons un chapitre des plus importants sur la propagation des ondes. Les derniers résultats dus à M. Hadamard, y sont développés. L'onde est une surface qui se déplace et se déforme dans le milieu considéré, sur laquelle les dérivées des coordonnées prises par rapport à leurs valeurs initiales, ou par rapport au temps, cessent d'être continues.

Une discontinuité d'ordre n est celle où la première dérivée qui cesse d'être continue, est d'ordre n, toutes les dérivées d'ordre inférieur à n restant continues.

Les cas de $n = 1$ et $n = 2$ sont étudiés en détail par M. Appell. Les résultats généraux obtenus par M. Hadamard pour n quelconque, sont rappelés sommairement et leurs démonstrations sont proposées comme exercices.

Dans la dynamique des fluides parfaits, nous trouvons maintes choses remarquables, telles que le théorème d'Hugoniot et la détermination de la vitesse de propagation du son.

A remarquer aussi la transformation des équations de l'hydrodynamique pour le cas de coordonnées quelconques, transformation exactement comparable à celle qui change les équations ordinaires du mouvement d'un point ou d'un système en les équations de Lagrange.

Dans ces théories difficiles qui semblent si souvent dénuées d'applications et qui chez beaucoup de savants paraissent avoir été seulement prétextes à des développements analytiques, intéressants sans doute, mais qui faisaient perdre de vue les problèmes matériels posés au début, on ne saurait trop admirer l'auteur du présent ouvrage qui s'efforce de donner sans cesse des exemples de problèmes aussi simples que possible et de les résoudre complètement de façon à faire suivre les développements analytiques de réalités concrètes. Voici l'étude du mouvement d'un liquide pesant dans un vase de révolution présentant une large ouverture à la partie inférieure, et plus loin c'est le mouvement d'un liquide qui se précipite dans un espace sphérique brusquement laissé vide en son sein. Après les théorèmes de Bernoulli et de Torricelli et l'étude générale des écoulements en régime permanent nous tombons dans la théorie des tourbillons. Ce mot, défini au début d'une façon purement analytique, nous apparaît ici sous un jour matériel qui le justifie. Si les particules d'un fluide n'ont pas une rotation nulle, elles ont des mouvements tourbillonnaires et s'arrangent en tubes de tourbillons qui ne peuvent se terminer au milieu de la masse ; ces tubes sont donc fermés sur eux-mêmes ou terminés aux parois ou aux surfaces de discontinuité. Tels sont les anneaux de fumée que les fumeurs s'amusent à lancer. A côté de ce jeu que la théorie des tourbillons nous explique, faut-il rappeler qu'elle a été

l'objet de la part de lord Kelwin, des plus hautes spéculations au point de vue cosmogonique et qu'il a émis cette hypothèse que les atomes qui constituent la matière qui tombe sous nos sens sont de minuscules tourbillons d'éther.

Dans l'exposition de la présente théorie, je signalerai comme particulièrement remarquable le problème qui consiste à déterminer la vitesse d'une particule fluide connaissant le tourbillon relatif au même point et aussi une analogie électro-dynamique des plus intéressantes. L'existence de tourbillons dans un liquide modifie évidemment les vitesses d'une particule quelconque; or, si l'on considère l'ensemble de tous les tourbillons qui forment un tube annulaire, l'effet de l'existence de ce tube sur un point P de la masse est le même que celui qu'exercerait un courant électrique parcourant un fil conducteur de même figure que le tube tourbillonnaire sur le point P considéré comme un pôle magnétique.

Le chapitre qui termine la dynamique des fluides est consacré aux mouvements parallèles à un plan fixe.

Tous les problèmes relatifs aux milieux continus semblent évidemment exiger la considération de l'espace à trois dimensions, mais on peut, par la pensée, imaginer des milieux continus n'ayant que deux dimensions. Tel serait, par exemple, le milieu constitué par des molécules assujetties à rester sur un plan.

Cette fiction devient une réalité dans des milieux continus à trois dimensions où toutes les particules ont originairement des vitesses parallèles à un plan et où il est évident, par raison de symétrie, que ce parallélisme n'a pas lieu d'être altéré. Tels sont les cas d'écoulement dans un canal constitué latéralement par des plans verticaux et dont le fond est un cylindre de génératrices perpendiculaires aux parois. C'est notamment le cas d'un liquide qui s'écoule par-dessus un déversoir horizontal formant un plan perpendiculaire aux parois latérales d'un canal. Alors les équations du mouvement se réduisent à deux.

Il faut remarquer dans ces dernières pages l'étude de la propagation des ondes à la surface d'un liquide, les ondes stationnaires et le phénomène du clapotis. Quant à l'étude des mouvements tourbillonnaires, elle est reprise dans ce cas particulier. Si par exemple nous prenons un liquide dans un vase à parois verticales et à fond horizontal, en supposant que toutes les vitesses soient parallèles au fond, les tubes de tourbillon ne pourront évidemment être que des droites verticales. Les équations du mouvement de ces tubes, quand on les suppose infiniment déliés, se mettent aisément sous la forme canonique.

Le volume se termine par la théorie de l'élasticité, terminée elle-même par l'étude de la vibration des milieux élastiques et la comparaison des vibrations transversales qu'ils peuvent transmettre avec les vibrations longitudinales que transmettent les fluides parfaits.

Je citerai encore quelques pages sur les fluides visqueux et j'aurai peut-être donné une pâle idée des nombreux sujets abordés par M. Appell; mais ce dont je renonce à donner aucune idée, c'est, d'un côté, la clarté avec laquelle tout est présenté, d'un autre, la patience de l'auteur qui a recueilli d'innombrables renseignements bibliographiques et a partout indiqué ce qui reste à faire après ce qui est fait à l'heure actuelle. Et comme les deux premiers volumes du traité ne le cèdent en rien au troisième, je crois qu'on

peut conseiller à tous ceux qui veulent acquérir une haute idée de la science et de l'art mathématiques, d'entrer dans ce magnifique monument élevé à la mécanique rationnelle.

A. Buhl (Paris).

P. Bachmann. — **Niedere Zahlentheorie,** Erster Teil. *B.-G. Teubner's Sammlung* von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Band X, 1. — Un vol. relié, gr. in-8°, 402 p. ; prix : M. 14. — ; B.-G. Teubner, Leipzig. 1902.

A côté de l'Encyclopédie des Sciences mathématiques, qui a déjà rendu de si grands services aux géomètres, la librairie Teubner a entrepris la publication d'une collection de traités séparés consacrés aux parties les plus importantes de la science mathématique. On ne saurait contester l'utilité d'une telle publication. En effet, les articles de l'Encyclopédie ne contiennent que des résumés et des aperçus dans lesquels les résultats acquis à la science sont systématiquement classés et enregistrés. C'est un guide précieux, mais ce n'est qu'un guide. Pour les développements, démonstrations, etc., on doit recourir aux sources : monographies, notes, mémoires disséminés dans les comptes rendus et les revues périodiques. Bien rares sont encore les traités spéciaux, assez complets pour pouvoir donner une idée exacte de l'état actuel de nos connaissances mathématiques, assez intelligibles en même temps pour servir de livres d'initiation.

A en juger par le premier volume qui vient de paraître, l'ouvrage de M. Bachmann remplit admirablement le but que vise la *Collection Teubner*.

Après une courte introduction historique, l'auteur examine et précise la notion du nombre entier positif et négatif en se plaçant au point de vue de M. Dedekind, mais il simplifie et complète sur quelques points l'analyse du célèbre géomètre allemand. Le second chapitre est consacré à la théorie de la divisibilité. Les lois fondamentales de cette théorie sont établies en partant de la notion moderne des modules que l'on doit à Kronecker et à M. Dedekind. M. Bachmann établit ensuite un certain nombre de propositions se rattachant à la théorie précédente, en particulier la formule d'Euler donnant la somme des diviseurs d'un nombre et quelques propriétés très curieuses de la factorielle dues à Weill, Catalan et autres.

Le troisième chapitre expose les principes de la théorie des congruences : systèmes de restes, nombre maximum de racines, etc. Parmi les applications de cette théorie on remarquera les propriétés générales de la fonction $\varphi(n)$ et celles des fonctions plus générales de Lucas et de Schemmel.

L'auteur reprend ensuite au 4e chapitre la théorie de la divisibilité. Mais cette fois-ci il en établit le théorème fondamental au moyen de l'algorithme d'Euclide (procédé de Poinsot) ce qui le conduit naturellement aux fractions continues et à la théorie des séries de Farey, théorie à laquelle se rattachent les recherches relativement récentes de M. Hurwitz et de M. Vahlen.

Le 5e chapitre traite des théorèmes de Fermat et de Wilson.

Un long chapitre est consacré à la théorie des résidus quadratiques. C'est incontestablement le plus curieux. On y remarquera une table chronologique des différentes démonstrations de la fameuse loi de réciprocité de Legendre. Ces démonstrations, dont on connaît environ une cinquantaine, sont divisées en catégories et celles d'entre elles qui appartiennent aux éléments de la théorie des nombres sont analysées avec soin.

Le dernier chapitre contient la théorie générale des congruences d'un degré quelconque. A côté des résultats dus à Schöuemann, Dedekind et J.-A. Serret on y trouve la belle théorie des imaginaires de Galois et enfin la 7[e] démonstration que Gauss a donnée de la loi de réciprocité, démonstration qui est précisément basée sur la théorie des congruences.

En résumé, le premier volume de l'ouvrage de M. Bachmann apprend beaucoup. Il peut servir de complément et de commentaire aux six premiers paragraphes (et au 8[e]) de l'article correspondant de l'encyclopédie, dû aussi à la plume de M. Bachmann, et il s'adresse aussi bien à ceux qui veulent approfondir la science des nombres qu'à ceux qui désireraient s'y initier.

D. Mirimanoff (Genève).

E. Estanave. — **Essai sur la sommation de quelques séries trigonométriques**; gr. in-8°, 112 p.; prix: 6 fr.; Paris, A. Hermann, 1903,

Les séries qu'étudie l'auteur sont d'une haute importance au point de vue des applications mécaniques ou physiques. Il s'est proposé surtout d'atteindre un but pratique, c'est-à-dire d'effectuer la sommation, plutôt que de se livrer à une étude purement théorique. Il a cependant donné, dans un grand nombre de cas, la solution du problème inverse de la formule de Fourier, ce qui peut s'énoncer ainsi : faire correspondre à une série trigonométrique donnée une fonction dont cette série est le développement. Sa méthode consiste essentiellement à profiter de l'identité qu'il établit entre une série simple et une série à double entrée contenant une fonction arbitraire, en disposant de l'indétermination qui en résulte. Les calculs auxquels cette méthode conduit exigent souvent la résolution de certaines questions auxiliaires. On peut citer parmi ces questions la détermination d'intégrales définies, ou celle d'intégrales particulières d'équations différentielles. Le résultat est obtenu par une méthode intuitive, qui revient au fond à celle des coefficients indéterminés, mais qui est beaucoup plus rapide, et ramène tout à une formule unique. En somme, il parvient à deviner la loi, et en démontre ensuite la généralité.

A signaler aussi les aperçus que M. Estanave est amené à présenter sur les nombres d'Euler, de Bernoulli, de Genocchi. En résumé, son livre, qui a dû lui coûter beaucoup de travail et de peine, est une œuvre à la fois utile et intéressante.

C. A. L.

G. Holzmüller.— **Elemente der Stereometrie** : Vierter Teil. Fortsetzung der schwierigeren Untersuchungen : Berechnung und stereometrische Darstellung von statischen, Trägheits-und Centrifugal-Momenten homogener Raumgebilde. Simpsonsche Regel, verallgemeinerte Schichtenformel, gewisse Zuordnungen und konforme Abbildungen im Dienste solcher Bestimmungen. Nachtrag über das Katenoïd, seine Krümmungsverhältnisse und sphärische Abbildung und über seinen Zusammenhang mit der Gaussschen Pseudosphäre und der Minimalschraubenregelfläche, 1 vol. in-8°. de 311 p.; prix: br. M. 9; relié M. 9.50; G. J. Goeschen, Leipzig, 1902.

Dans ce volume, M. Holzmüller continue à montrer qu'il existe, à côté de la grande route du calcul différentiel et intégral, un sentier permettant d'ar-

river plus facilement au but du premier dans l'étude de certaines propriétés des lignes et surfaces. Par des moyens quasi élémentaires, il fait obtenir au lecteur des résultats fort intéressants.

Ce quatrième et dernier volume est divisé en 3 sections : la première est consacrée à l'exposé des propriétés des moments des divers ordres et espèces d'un système de points, à leur détermination et à leur réprésentation stéréométrique.

L'application de ces théories à une extension des formules trouvées plus haut et de la règle de Simpson à des corps particuliers, puis aux paraboles d'ordre p et à leurs solides de révolution, la détermination de la longueur d'une courbe ou du contenu d'une surface, celle de leur centre de gravité, de leurs moments divers forment le sujet des divers paragraphes de ce chapitre.

De nombreux exemples illustrent le texte et leur étude complète facilite le lecteur et l'incite à en traiter d'autres qui ne sont qu'indiqués.

Signalons en particulier les curieuses suites trouvées pour les moments d'inertie et les coordonnées du centre de gravité des surfaces limitées par des paraboles de divers ordres.

Les ellipses d'inertie de Poinsot et de Clebsch-Culmann sont obtenues aussi très simplement ainsi que la lemniscate du moment centrifuge (centrifugalmoment).

Puis l'auteur montre l'emploi de deux transformations et des représentations conformes correspondantes pour la recherche des moments polaires de divers ordres pour des figures planes et obtient des relations intéressantes entre ces moments et les arcs de courbes ou les surfaces des figures transformées.

La deuxième section s'occupe spécialement des surfaces du deuxième degré : leurs surfaces, leurs volumes, moments principaux y sont déterminés et de nombreuses applications des formules trouvées à des problèmes de mécanique en montrent judicieusement l'utilité.

La troisième section comporte quelques compléments à la théorie du cathénoïde, de la pseudosphère et de la surface de vis à filet carré.

Nous ne pouvons faire mieux, pour résumer brièvement le but poursuivi et atteint par l'auteur, que de traduire la dernière phrase de son traité.

« Que l'on considère, dit-il, le tout comme une incitation à étendre tou-
« jours davantage les limites des mathématiques élémentaires, et cela non
« seulement pour la géométrie, mais aussi pour la mécanique, la cartogra-
« phie, la géodésie, la physique cosmique, la théorie du potentiel et autres
« théories mathématiques et leurs applications. »

Nous sommes persuadés qu'en suivant ces traces et en effectuant pour les différentes disciplines ce que M. Holzmüller vient de faire pour la géométrie, d'autres mathématiciens rendraient à leur tour un grand service à la science et surtout à ceux qui doivent l'étudier.

S. May (Lausanne).

Karl T. Fischer. — **Der naturwissenschaftliche Unterricht in England** insbesondere in Physik und Chemie ; mit einer Uebersicht der englischen Unterrichtslitteratur zur Physik und Chemie. Un vol. gr. in-8° ; relié, 94 p. ; prix : M. 3,60 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Au cours d'un séjour de plus de six mois en Angleterre, M. Fischer a eu le privilège de visiter un grand nombre d'établissements scolaires, secon-

daires et supérieurs, et d'y étudier l'organisation de l'enseignement, notamment celui des sciences physiques et chimiques. Il a publié les résultats de son enquête en un petit volume très documenté qui sera lu avec plaisir par tous ceux qui désirent se tenir au courant des progrès de l'enseignement scientifique dans les divers pays.

L'auteur examine la part qui est faite à l'enseignement des sciences dans les diverses catégories d'établissements secondaires et supérieurs ; il passe en revue les plans d'études, les méthodes d'enseignement, l'organisation des laboratoires, la préparation du personnel enseignant, etc. Son exposé est accompagné de plusieurs planches et de nombreux extraits de documents officiels. Comparant l'organisation anglaise à ce qui se fait en Allemagne, il conclut en faveur de la première dont il attribue la supériorité au caractere à la fois plus intuitif et plus pratique que l'on constate dans les divers degrés de l'enseignement.

Francesco Brioschi. — **Opere Matematiche**, publicate per cura del comitato per le Onoranze a Francesco Brioschi (G. Ascoli, V. Cerruti, G. Colombo, L. Cremona, G. Negri, G. Schiaparelli). *Tome second.* Un vol. gr. in-4°, VIII-456 p. ; prix ; L. 25. — Ulrico Hœpli, Milan, 1902.

Le comité de publication des *OEuvres complètes* de Brioschi poursuit sa tâche avec une rapidité et un soin dont leur sauront gré les mathématiciens de tous les pays. Il vient de publier le tome II qui contient les mémoires, au nombre de trente-cinq, publiés par Brioschi de 1858 à 1887 dans les *Annali di Matematica pura ed applicata.* Ces mémoires se rattachent à la théorie des surfaces, à la résolution des équations du cinquième degré, aux équations différentielles linéaires, aux fonctions elliptiques et hyperelliptiques. On y retrouve également quelques-unes de ses belles recherches sur la théorie des formes binaires.

H. F.

P.-H. Schoute. — **Mehrdimensionale Geometrie.** Erster Theil : Die linearen Raume (T. XXXV de la Collection Schubert). 1 vol. relié, p. in-8° de VIII-295 p. avec 55 figures et 335 exercices ; G. J. Goeschen, Leipzig, 1902.

Le savant professeur de Groningue vient d'enrichir l'importante collection Schubert d'un nouvel ouvrage d'une grande utilité pour les mathématiciens qui veulent s'initier aux théories de la géométrie à n dimensions.

Il s'agit ici, comme le dit l'auteur dans sa préface, de la géométrie exclusivement euclidienne, le cadre restreint de l'ouvrage ne permettant pas en effet de s'occuper des géométries non euclidiennes, qui devront être par la suite l'objet d'une étude séparée.

Ce livre, dont la lecture ne suppose pas même la connaissance du calcul différentiel et intégral est vraiment un livre d'enseignement, bien conçu par son plan et son développement : il s'adresse surtout aux étudiants pour qui l'étude de la géométrie à n dimensions est une nouveauté à laquelle les principes déjà acquis en planimétrie et stéréométrie, en géométrie analytique et descriptive leur servent de préparation directe. Aussi a-t-il évité les théories trop abstraites et trop longues, et s'est-il surtout attaché à bien préciser les points fondamentaux et essentiels, à mettre ceux-ci en lumière par des exemples bien choisis, afin que ses lecteurs puissent, lancés dans une direction

sûre, continuer d'eux mêmes les recherches synthétiques et analytiques de cet intéressant sujet.

M. Schoute a puisé à bonne source dans quelques auteurs italiens estimés, notamment dans les *Fundamenti di Geometria* de G. Veronese, et dans la dissertation inaugurale de M. Wythoff d'Amsterdam ; il a ajouté à son texte une chose extrêmement précieuse, et que les étudiants estimeront à sa valeur : une série de questions dont un certain nombre sont résolues dans le cours de l'ouvrage et les autres proposées à titres d'exercices.

Les chapitres successifs ont pour titres : 1° Principes fondamentaux sur les espaces à n dimensions. — 2° Parallélisme. — 3° Orthogonalité ! — 4° Distance, projection et angle. — 5° Géométrie descriptive. — 6° Géométrie analytique. — 7° Géométrie de position. — 8° Géométrie du nombre. — 9° Polygonométrie.

Quelques devoirs variés et intéressants terminent ce livre très clair, dont on ne saurait trop recommander la lecture, et qui, nous l'espérons, aura le succès qu'il mérite.

P. Barbarin (Bordeaux).

E. Pascal. — **Lezioni di Calcolo infinitesimale** ; parte I, Calcolo differenziale, VII-311 p. ; prix L. 3 : parte II, Calcolo integrale, VIII-329 p. ; prix L. 3 ; Milan, Hœpli, 1903.

Les deux nouveaux volumes que nous donne dans la collection Hœpli l'éminent professeur à l'Université de Pavie, forment un cours élémentaire de calcul infinitésimal, ne renfermant que les notions essentielles, mais les présentant avec ordre et méthode. C'est un service de plus, après tant d'autres, que M. le professeur Pascal rend à l'enseignement, car les étudiants, si souvent embarrassés par la grosseur même des livres classiques trouveront ici tout ce qui leur sera nécessaire pour une première étude.

Voici les matières principales contenues dans les deux volumes dont il s'agit :

Fonctions réelles de variables réelles. — Dérivées d'une fonction. — Développements en séries des fonctions. — Étude des variations d'une fonction au voisinage d'un point. — Quelques applications analytiques. — Applications géométriques ; principes de géométrie différentielle. — Intégrales définies et indéfinies. — Intégrabilité des fonctions. — Calcul des intégrales indéfinies et définies. — Intégrales multiples. — Formes aux différentielles totales du premier ordre et du premier degré. — Géométrie intégrale. — Équations différentielles.

Nous eussions été heureux de voir compléter cet excellent ouvrage par un certain nombre d'exercices, ce qui n'aurait pas beaucoup augmenté l'étendue.

C. A. L.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

Acta mathematica, publication rédigée par J. Mittag-Leffler, Beijer, Stockholm. Mayer et Müller, Berlin. Hermann, Paris. Année 1902. Volume 25.

Fasc. 3 et 4. — J. Hurwitz : Ueber die Reduction der binären quadratischen Formen mit complexen Coefficienten und Variabeln. — W. Burnside : On the four rotations which displace one orthogonal system of axes into another. — Ch. Riquier : Sur le degré de généralité d'un système différentiel quelconque. — I. Bendixon : Sur les racines d'une équation fondamentale. — P. Stackel : Arithmetische Eigenschaften analytischer Functionen.

Volume 26 (complet). — N.-H. Abel : Recherches sur les fonctions elliptiques. — P. Appell : Sur les fonctions abéliennes considérées comme fonctions algébriques de fonctions d'une variable. — A.-V. Backlund : Geometrischer Beweis eines algebraischen Satzes von Jacobi. — G. Darboux : Sur l'application du théorème fondamental d'Abel relatif aux intégrales algébriques à la recherche de systèmes complètement orthogonaux dans un espace à n dimensions. — J.-C. Fields : Algebraic proofs of the Riemann-Roch theorem and of the independence of the conditions of adjointness. — G. Frobenius : Ueber Gruppen der Ordnung $p_\alpha q^\beta$. — L. Fuchs : Über zwei nachgelassene Arbeiten Abel's und die sich daran anschliessenden Untersuchungen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. — J.-W.-L. Glaisher : On the relation of the Abelian to the Jacobian elliptic functions. — D. Hilbert : Ueber die Theorie der relativ Abel'schen Zahlkörper. — A. Hurwitz : Ueber Abel's Verallgemeinerung der binomischen Formel. — J.-L.-W.-V. Jensen ; Sur une identité d'Abel et sur d'autres formules analogues. — L. Königsberger : Bermerkungen zu einem Satze von Lie über ein Analogon zum Abel' schen Theorem. — H. Minkowski ; Ueber periodische Approximationen algebraischer Zahlen. — G. Mittag-Leffler : Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. — M. Nöther : Rationale Reduction der Abel'schen Integrale. — E. Picard : Sur quelques points fondamentaux dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables. — H. Poincaré : Sur les fonctions abéliennes. — G.-G. Stokes : On the discontinuity of arbitrary constants that appear as multipliers of semi-convergent series. — W. Wirtinger : Ueber einige Probleme in der Theorie der Abel'schen Functionen. — W. Wirtinger : Einige Anwendungen der Euler-Maclaurin'schen Summenformel, insbesondere auf eine Aufgabe von Abel.

The American mathematical Monthly, publication mensuelle dirigée par B.-F. FINKEL et J.-M. COLAW. Springfield (U. S. A.) — Abonnement annuel : 2 dollars. Vol. IX, 1902.

Fasc. 3. — G.-B. HALSTED : Biography of Eugenio Beltrami. — G.-A. MILLER : On the Primitive Groups of Class Four. — L.-E. DICKSON : Factors of a Certain Determinant of Order Six.

Fasc. 5. — V. SNYDER : Models of the Weierstrass Sigma Function and the Elliptic Integral of the Second Kind. — A. HUME : Meridian and Transverse Sections of Helicoïds of Uniform Pitch. — G.-B. HALSTED : Proving the False.

Fasc. 6, 7. — L.-E. DICKSON : The Order of a Certain Senary Linear Group. — E.-H. MOORE : The Betweenness Assumptions. — B.-G. HALSTED : A Non-Euclidean Gem.

Fasc. 8, 9. — G.-B. HALSTED : Biography of Cristoforo Alasia. — L.-E. Dickson : Ninth Summer Meeting of the American Mathematical Society. — J.-W. NICHOLSON : The expression of the n th power of a Number in Terms of the n th powers of other Numbers, n Being any integer : and the deduction of Some interesting properties of prime Numbers.

Fasc. 10. — H. MASCHKE : Some Modern Methods and Principles of Geometry. — Solutions et questions diverses.

Annals of Mathematics, publiées sous les auspices de la Harvard University par O. STONE, W.-E. BYERLY, H.-S. WHITE, W.-F. OSGOOD, F.-S. WOODS. Cambridge, U. S. A. Publication trimestrielle, gr. in-4°. Second Series. Vol. 3. 1901-1902.

N° 1. — E.-B. VAN VLECK : On the Convergence of the Continued Fraction of Gauss and other Continued Fractions. — M.-B. PORTER : On the Differentiation of an Infinite Series Term by Term. — J.-K. WHITTEMORE : A Note on geodesic Circles. — W.-F. OSGOOD : Note on the Functions Defined by Infinite Series whose Terms are Analytic Functions of a Complex Variable ; with Corresponding Theorems for definite Integrals. — C.-L. BOUTON : Nim a Game with a Complete Mathematical Theory. — G.-A. MILLER : On the groups Generated by Two Operators of Order Three whose Product is also of Order Three. — W.-A. GRANVILLE : On the Invariants of a Quadrangle under the Largest Subgroup, having a Fixed Point, of the general Projective group in the Plane.

N° 2. — M. BÔCHER : Some Applications of the Method of Abriged Notation. — M.-B. PORTER : On the Roots of Functions connected by a Linear Recurrent Relation of the Second Order. — S. WOODS : Space of Constant Curvature.

N° 3. — W.-H. RŒVER : Brilliant Points and Loci of Brilliant Points. — W.-F. OSGOOD : Problems in Infinite Series and definite Integrals with a Statement of certain Sufficient Conditions which are Fundamental in the Theory of definite Integrals. — H.-B. NEWSON : Note on the Product of Linear Substitutions

N° 4. — H.-S. WHITE : Note on a Twisted Curve connected with an Involution of Pairs of Points in a Plane. — R.-E. ALLARDICE : On some Curves connected with a System of Similar Conics. — J. WESTLUND : Note on Multiply Perfect Numbers. — W.-R. RANSOM : A Mechanical Construction of Confocal Conics. — F. SMITH : On Sophus Lie's Representation of Imagina-

ries in Plane Geometry. — G.-A. Miller : Note on the Group Isomorphisms of a group of Order p^m. — L.-D. Ames : Evaluation of Slowly Convergent Series.

Vol. 4. N° 1. — G.-A.-Bliss : The Geodesic Lines on the Anchor Ring. H.-F. Blichfeldt : Proof of a Theorem Concerning Isosceles Triangles. — L.-E. Dickson : An Elementary Exposition of Frobenius's Theory of Group-Characters and Group-Determinants. — E.-V. Huntington : Communication concerning Mr. Ransom's Mechanical Construction of Conics.

Archiv der Mathematik und Physik, gegründet 1841, durch J.-A. Grünert. Dritte Reihe, Herausgegeben von E. Lampe, W. Franz Meyer, E. Jahnke. Band IV, 1902; B.-G. Teubner, Leipzig und Berlin.

Hefte 1, 2. — A. Pringsheim : Ueber Konvergenz-Kriterien für Reihen mit Komplexen Gliedern. — P. Appell : Sur le degré de réalité d'une courbe algébrique à coefficients réels. — E. Weinnoldt : Ueber die Konstruction von Isophengen auf Flächen 2. Ordnung. — B. Oster : Ueber die Herleitung der Formeln für Lebensversicherungsprämien. — W. Thienemann : Ein bemerkenswertes Pentagonikositetraeder. — E. Haentzschel : Rotationszykiiden und Lamésche Produkte. — E. Netto : Notiz über die Kreisteilungs-Polynome. — P. Stackel : Eine Eigenschaft der geodätischen Linien. — H. Züge : Zur Lehre von der Teilbarkeit dekadischer Zahlen. — G. Majcen : Ueber gewisse Scharen homothetischer Kegelschnitte in der Dreiecksgeometrie. — S. Jolles : Synthetische Theorie der Zentrifugal- und Trägheitsmomente eines Raumstückes. — E. Wölffing : Über eine besondere Klasse transcendenter Kurven. — L. Saalschütz : Unabhängige Darstellung der Mac Mahonschen symmetrischen Funktionen. — H. Schoeler : Angenäherte n-Teilung eines beliebigen Winkels mit Zirkel und Lineal. — E. Lampe : Bemerkungen über einige angenäherte n-Teilungen von Winkeln. — Rezensionen. — Vermischte Mitteilungen.

Atti de la Reale Accademia dei Lincei. Comptes rendus publiés par l'Académie des Lincei, Année 299, 5e série, 1902. E. Loescher et Cie, Rome. Abonnement annuel : 10 L.

6 juillet. — Daniele : Intorno ad alcuni particolari movimenti di un punto sopra una superficie. — Viola : Le deviazioni minime della luce mediante prismi birifrangenti.

20 juillet. — Bortolotti : Contributo alla teoria degli insiemi. — Fubini : Sugli spazî a quattro dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti.

3 août. — Levi-Civita : La theorie elettrodinamica di Hertz di fronte ai fenomeni di induzione.

17 août. — Pascal : Sulla teoria invariantiva delle espressioni ai differenziali totali di second' ordine, e sudi una estensione dei simboli di Christoffel. — Bortolotti : Alcuni teoremi che possono tener luogo di quello della media, per funzioni le cui derivate non sono atte alla integrazione definita. — Niccoletti : Su una classe di equazion a radici reali.

4-21 septembre. — Pascal : Trasformazioni infinitesime e forme ai differenziali di second'ordine.

5 octobre. — Bindoni : Sui numeri infiniti ed infinitessimi attuali.

19 octobre. — Amaldi : Determinazione delle superficie algebriche su cui

esistono piu di due fasci di curve algebriche unisecantisi. — Picciati : La teoria di Hertz applicata alla determinazione del campo elettromagnetico generato della traslazione uniforme d'una carica elettrica parallelamente ad un piano conduttore indefinito.

2 novembre. — Millosewich : Osservazioni e calcol d'orbita del pianetino JL 1902 (Venetia). — Osservazioni della cometa Perrine *b* 1902. — Capelli : Sulle relazioni algebriche fra le funzioni Θ di una variabile e sul teorema di addizione.

Bolletino di Matematica (IL) rédigé par A. Conti, publication mensuelle in-8°. Année 1902, t. I. Bologne, G. Cenerelli.

Fasc. 3. — Bettazzi : Figure finite e figure infinite. — Ciamberlini : Sul concetto di Luogo nell'inseguamento della Geometria elementare. — Pagliano: La disfida matematica tra N. Tartaglia e L. Ferrari e la risoluzione dei problemi della geom. elem. mediante la riga e il compassa di opertura fissa. — Predella-Longhi : Intorno alla risoluzione dei problemi aritmetici.

Fasc. 4. — Bassi : Sezioni circolari del cilindro e del cono obliqui ; assi del cono. — Stasi : Sull' ordinamento razionale delle varie parti dell' Aritmetica. — Ciamberlini : Ipercritica (?).

Fasc. 5. — Cavalli-Lanfredi : Risoluzione di problemi geometrici elementari in un foglio limitato. — Ciamberlini : Osservazioni pel Dizionario di Matematica. — Monti : Sulle equazioni di quarto grado. — Bassi : Voir numéro précédent — Ducci : Come svolgerei nell' Istituto Tecnico il Capitolo : Diseguaglianze di 1° e 2° grado. — Problemi di massimo e minimo.

Fasc. 6 — Pagliano : Sull'uso del compasso di apertura fissa nella risolazione dei problemi della geometria elementare e sulla sostituzione di un disco al predetto compasso. — Stasi : Sull' ordinamento razionale delle varie parti dell' Aritmetica. — Fontebasso : Una risoluzione elementare di un problema geometrico. — Trevisan : I sistemi metrici non decimali nell' aritmetica pratica.

Bulletin of the American Mathematical Society publié par F.-N. Cole, A. Ziwet, F. Morley, D.-E. Smith. 2e série, 1902. Vol IX. Macmillan Company, Lancaster, Pa., and New-York. — Abonnement au volume annuel : 5 dollars.

Octobre. — O. Bolza : Some Instructive Examples in the Calculus of Variations. — E.-R. Hedrick : On the Sufficient Conditions in the Calculus of Variations. — E.-B. Wilson : Some Recent Books, on Mechanics. — E.-V. Huntington : On a New Edition of Stolz's Allegemeine Arithmetik, with an Account of Peano's Definition of Number. — E.-J. Wilczynski : Lazarus Fuchs.

Novembre. — Ed. Kasner : The Ninth Summer Meeting of the American Mathematical Society. — E.-S. Crawley . The Meeting of section A of the American Association for the Advancement of Science. — G.-A. Miller : Second Report on Recent Progress in the Theory of Groups of Finite Order

Décembre. — W.-B. Fite : Concerning the Commutator Subgroups of Groups whose Orders are Powers of Primes. — L.-I. Hewes . Note on Irregular Determinants. — G.-O. James : Note on the Projections of the Absolute Acceleration in Relative Motion. — L.-P. Eisenhart : Infinitesimal Deformation of the Skew Helicoid. — S. Epsteen : On Integrability by Qua-

dratures. — E.-B. Wilson : The Centenary of the Birth of Abel. — E.-R. Hedrick : The English and French Translations of Hilbert's Grundlagen der Geometrie. — G.-A. Miller : Dickson's Linear Groups.

Il Nuovo Cimento. — Organe de la société italienne de Physique publié par A. Batelli, V. Volterra, A. Righi et P. Cardani. Publication mensuelle, gr. in-8°. Pise, Pieraccini. Série V, tomes III et IV. 1902.

Mai. — A. Maresca : Sulla eugia svolta della scarica oscillante di un condeusatore nei tubi a vuoto. — G. Ercolini : Influenza della durata di carica sulla deformazione dei coudensatori. — A. Garbasso : Sopra una quistione di elettrodinamica. — G. Morera : Intorne alle oscillazioni elettriche. — E. Salvioni : Misura di masse comprese fra gr. 10^{-1} e gr. 10^{-6}. — E. Salvioni : Sulla volatilizzazione del muschio. — E. Salvioni : Un' esperienza per dimostrare il decrescere della pressione atmosferica con l'altezza.

Juin. — D. Mazzotto : Effetto di lunghi rinvenimenti a varie temperature sulle costanti magnetiche del ferro. — T. Levi-Civita : Influenza di une schermo conduttore sul campo elettromagnetico di una corrente alternativa parallela allo schermo. — A. Masini : Di una disposizione opportuna per aumentare l'effetto delle onde elettromagnetiche sovra un circuito.

Juillet. — P. Pizetti : Sopra alcune recenti determinazioni della gravita nell' oceano atlantico. — G. Giorgi : Sul sistema di unita di misure elettromagnetiche con Osservazioni delle Prof. L. Donati. — A. Righi : Sulla produzione di Suoni per mezzo del scariche nei tubi a gas rarefatto e nelle flamme. — Q. Majorana : Nuovi fenomeni magneto-ottici presentati da speciali soluzioni magnetiche. — W. Voigt : Sul fenomeno Majorana.

Août. — Mort de Riccardo Felici. — E. Almansi : Sopra un problema di elettrostatica. — G. de Rossi et A. Sella : Sul comportamento elettrico delle flamme in un campo elettrostatico alternato. — A. Sella : Ricerche di radio attivita indotta.

Septembre. — Allegretti : Sul fenomeno Edison. — A. Garbasso : Su la polarizzazione rotatoria dei raggi di forza elettrica. — A. Varali-Thevenet : Calore di soluzione. — V.-E. Boccara : Sulle variazioni diurne della rifrazione atmosferica. — A. Pochettino e A. Sella : Conduttivita elettrica acquistata dall' aria proveniente da una soffieria ad acqua.

Octobre. — A. Battelli : Necrologia del Prof. Riccardo Felici. — G. Piaggesi : Magnetizzazione dei liquidi col cambiare della temperatura. — G. Ercolini : Influenza del campo elettrico sull'elasticità del vetro. — E. Almansi : Sopra un problema di elettrostatica.

Annuaire du bureau des Longitudes pour 1903. — Ce petit volume contient, comme toujours, une foule de renseignements indispensables à l'ingénieur et à l'homme de science. Parmi les notices de cette année, signalons tout spécialement celle de M. R. Radau, sur *les Etoiles filantes et Comètes*, celle de M. J. Janssen, *Science et Poésies* et enfin les Discours prononcés aux obsèques de MM. *Faye* et *Cornu*. Paris, Gauthier-Villars. In-16 de près de 850 pages avec figures : 1 fr. 50 (franco, 1 fr. 85).

Annual Report of the Smithsonian Institution showing the operations, expenditures, and condition of the Institution for the year ending June 30. 1901. — Washington : Government printing Office, 1902.

Ce magnifique volume de LXVII — 782 pages, gr. in-8°, contient des

articles des plus intéressants sur l'état actuel des grandes questions scientifiques. Nous citerons particulièrement :

C. G. Abbot : Some Recent Astronomical Events. — C. Farrington : A Century of the Study of Meteorites. — J.-H. Poynting : Recent Studies in gravitation. — Lord Kelvin : On Ether and Gravitational Matter through Infinite Space. — J.-J. Thomson : On Bodies Smaller than Atoms.

Outre ces questions particulièrement mathématiques, le volume contient des mémoires non moins savants sur la Physique, la Chimie, les Sciences naturelles, etc...

F. Enriques et Ugo Amaldi. — **Elementi di Geometria** ad uso delle scuole secondarie superiori : 1 vol., in-12, XXII,-655 p. : prix : L. 4,50 ; Bologne, N. Zanichelli, 1903.

Sophus Lie. — **Ueber Integralinvarianten und Differentialgleichungen** Mémoire posthume. 1903. 1 brochure in-4° de 73 pages. In Kommission bei J. Dybwad Christiania.

G. Maupin. — **Opinions et curiosités touchant la Mathématique**, xvi, xvii, xviii^es^ siècles. Deuxième série, 1 vol. in-8° de 332 pages. Prix : 5 fr. Paris, C. Naud.

E. Pascal. — **I Gruppi continui di trasformazioni** (Parte generale della Teoria). N^os^ 327-328 de la *Collection Hoepli*. Un vol. relié in-16, 358 p., prix : 3 L. ; U. Hoepli, Milan, 1903.

H. Poincaré. — **La Science et l'hypothèse**. 1 vol., petit in-8° de 284 pages. Prix : 3 fr. 50. Paris, E. Flammarion.

H. Poincaré. — **Figures d'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation**. Leçons professées à la Sorbonne en 1900, rédigées par L. Dreyfus. 1 vol. in-8° de 210 pages avec figures. Prix : 7 fr. Paris, C. Naud.

E. Study. — **Geometrie der Dynamen** (Die Zusammensetzung von Kräften und Verwandte Gegenstände der Geometrie. Zweite Lieferung (p. 241 à 603). Un vol. gr. in-8°, prix : Mk. 13, 40 ; B. G. Teubner, Leipzig, 1903.

Bern. Riemann's gesammelte mathematische Werke. — Nachträge Herausgegeben von M. Noether u. W. Wirtinger. Un vol. in-8°, 116 p. ; prix : Mk 6 ; B. G. Teubner, Leipzig, 1902.

G. Vivanti. — **Complementi di Matematica** ad uso dei Chimici e dei Naturalisti. N^os^ 329-330 de la *Collection Hoepli*. Un vol. relié, in-16, 382 p. ; prix : 3 L. ; U. Hoepli, Milan, 1903.

V. Williot. — **Etudes sur les nombres premiers**. Première partie : La voie de Riemann. 1 broch. gr. in-8° de 40 pages ; Hermann, Paris 1903. prix : 3 francs.

Zindler (Konrad). — **Liniengeometrie mit Anwendungen**. Erster Teil. (t. XXXIV de la *Collection Schubert*) 1 vol. in-12° 380 p. ; prix : Mk. 12 ; G.-J. Goschen, Leipzig, 1902.

Le Gérant : C. NAUD.

EVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY

L'ESPACE EST-IL EUCLIDIEN?

La question des Géométries, où se rencontrent à titre égal la Mathématique et la Psychologie ou plutôt la science appelée par les Allemands la *Théorie de la connaissance*, partage avec les questions métaphysiques cette particularité, que la difficulté consiste surtout à en déterminer la signification précise.

Nous nous proposons de faire un exposé d'ensemble de la question, en nous attachant à l'examen de certains points, dont l'obscurité, exploitée par l'ignorance mathématique, a permis la production d'un flot abondant de sophismes.

I

Aperçu historique.

Le meilleur moyen d'aborder une question obscure ou obscurcie consiste à en faire un exposé historique.

C'est ce que nous allons faire brièvement, en nous efforçant surtout de dégager l'unité de l'œuvre accomplie par les illustres Géomètres dont nous rencontrerons les noms.

Principes de la géométrie. — Si l'on examine avec quelque attention les démonstrations des théorèmes fondamentaux de la Géométrie, on découvre bientôt qu'elles sont essentiellement basées sur les propriétés des déplacements sans déformation, fait fondamental que les traités élémentaires ont peut-être le tort de ne pas mettre nettement en lumière.

Les propriétés primordiales de ces déplacements constituent donc les vrais axiomes de la Géométrie, et les éléments mis en œuvre dans cette science sont ceux dont la notion est intimement

liée à celle de ces déplacements ou, d'une manière plus précise, est invariante dans ces déplacements : un point reste un point, une ligne reste une ligne, une surface reste une surface ; l'égalité, la perpendicularité se conservent, etc.

Ce fait capital s'exprime en disant que *la Géométrie est la théorie des propriétés invariantes dans les déplacements sans déformation*.

Enonçons les propriétés fondamentales des déplacements sans déformation sans trop nous préoccuper des doubles emplois possibles.

L'égalité des figures étant définie par leur superposabilité, c'est-à-dire par la coïncidence au moyen de déplacements sans déformation, la proposition : *deux figures égales à une troisième sont égales entre elles*, exprime que le résultat de deux déplacements opérés successivement peut être obtenu par un seul déplacement, autrement dit que les déplacements constituent un *groupe* d'opérations.

On peut toujours déplacer une figure de manière à amener un de ses points en un point quelconque de l'espace (*transitivité* du groupe).

Si l'on fixe deux points A et B d'une figure, un déplacement continu est encore possible, dans lequel demeurent fixes tous les points d'une ligne passant par les points A et B. On définit ainsi une catégorie de lignes (lignes droites), dans laquelle chacune est déterminée par la connaissance de deux de ses points.

Qu'entend-on par Géométrie non-euclidienne ?

On sait qu'un des axiomes de la Géométrie occupe une place à part dans cette science, c'est le postulat des parallèles, connu aussi sous la désignation, plus ou moins légitime, de XI[e] axiome d'Euclide et ainsi énoncé par Euclide :

« Lorsque deux droites sont rencontrées par une troisième, de manière que la somme des angles internes situés d'un même côté de cette dernière soit inférieure à deux angles droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se coupent du côté où se trouvent ces deux angles [1]. »

---

[1] « Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες. »

Il résulte de là que, si par un point O extérieur à une droite D, on lui mène une perpendiculaire et à celle-ci également une perpendiculaire, cette dernière est la seule droite menée par le point O qui puisse ne pas rencontrer la droite D, et elle ne la rencontrera pas en effet, si l'on ajoute l'hypothèse que par un point *quelconque*, on ne peut mener qu'une perpendiculaire à une ligne droite.

Travaux divers. — De nombreux efforts ont été faits et sont faits encore pour *démontrer* le postulat des parallèles. Ce qui va suivre montrera clairement la vanité de ces recherches.

Encouragés et sans doute guidés par Gauss, le Russe Lobatchewski (1829) et le Hongrois Bolyai (1832) parvinrent, chacun de son côté, à édifier synthétiquement une Géométrie parfaitement conséquente avec elle-même en laissant de côté cet axiome et en admettant au contraire que l'on peut, par un point extérieur à une droite, lui mener une infinité de parallèles comprises dans un certain angle.

Il semble que Gauss fût déjà parvenu à des résultats analogues dans des recherches qui ne furent publiées que beaucoup plus tard.

Riemann (1854), traitant la question analytiquement, fonda la Géométrie sur la notion de distance généralisée, ou plutôt sur l'expression de l'élément linéaire.

Il parvint ainsi, non seulement à la Géométrie de Lobatchewski-Bolyai, dans laquelle la ligne droite a un segment à l'infini, mais encore à une Géométrie dans laquelle la ligne droite n'a pas de points à l'infini.

Cayley (1859) généralisa également l'idée de distance, d'une manière moins abstraite, en la fondant sur des propriétés projectives.

Nous désignerons, avec Beltrami et Helmoltz, sous le nom de *Géométrie sphérique*, celle de Riemann, et sous le nom de *Géométrie pseudo-sphérique*, celle de Lobatchewski-Bolyai. On distingue aussi ces diverses Géométries au moyen des qualificatifs d'*hyperbolique* (Lobatchewski), *elliptique* (Riemann) et *parabolique* (euclidienne).

On doit aussi citer, dans le même ordre de recherches, les

remarquables travaux de Beltrami sur les surfaces à courbure constante.

Les recherches de Riemann étant basées sur les propriétés d'une expression différentielle, ne se prêtaient pas à l'établissement d'un système d'axiomes pouvant servir de base à la Géométrie.

Helmoltz (1868) [1] s'efforça d'énoncer nettement les axiomes communs à la Géométrie euclidienne et aux Géométries non-euclidiennes, c'est-à-dire les propriétés des déplacements d'où peuvent être déduites toutes les propriétés indépendantes du postulat des parallèles.

Axiomes de Sophus Lie. — Sophus Lie (1890) [2], utilisant ses admirables travaux sur les groupes de transformations, montra que les déductions d'Helmoltz se trouvaient, en certains points, erronées, que son système d'axiomes présentait à la fois des insuffisances et des superfluités, et enfin établit, d'une manière qui paraît cette fois définitive, les propriétés des déplacements pouvant donner lieu indifféremment aux Géométries euclidienne et non-euclidienne, et pas à d'autres.

Les principes posés par Lie, pas plus que ceux d'Helmoltz, ne s'expriment pas avec toute la simplicité désirable dans le langage de la Géométrie constructive.

Lie a énoncé deux systèmes équivalents de principes, présentant deux propositions communes, savoir :

I. *L'espace est une variété à trois dimensions.* — La première partie de cette proposition constitue moins l'énoncé d'une propriété qu'une définition donnant au mot *espace* une signification précise : l'ensemble des points.

II. *Les déplacements sans déformation forment un groupe réel et continu.* — Dire que les déplacements forment un groupe, c'est dire que deux figures égales, c'est-à-dire superposables à une troisieme, sont égales entre elles.

---

(1) Helmoltz, Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen ; Gottinger Nachrichten, 1868, Wissenschaftliche Abhandlungen, 2e Bd. S. 618 ; Barth, Leipzig. Traduit en français par Houel, Hermann, Paris.

(2) Sophus Lie, Leipziger Berichte, 1890 ; *Theorie der Transformationsgruppen* 3er Abschnitt, S. 393, Teubner, Leipzig

Dans un premier système d'axiomes, Lie complète ces deux propositions par la suivante :

III. *Le groupe des déplacements présente la propriété de la libre mobilité (freie Beweglichkeit) dans l'infinitésimal*, en entendant par là que, un point étant maintenu fixe, ainsi qu'un élément linéaire passant par ce point, un déplacement continu est encore possible, mais que tout déplacement devient impossible, si l'on fixe en outre un élément superficiel contenant cet élément linéaire.

Cette proposition pourrait, me semble-t-il, être remplacée par la suivante, qui a une signification constructive :

On peut toujours fixer un point quelconque, ainsi qu'un autre suffisamment voisin du premier, de manière qu'un déplacement continu soit encore possible ; mais on rend tout déplacement impossible en fixant un nouveau point convenablement choisi sur une surface quelconque passant par les deux premiers points.

Dans un second système d'axiomes donné par Lie, l'axiome de la *libre mobilité* est remplacé par deux autres, que nous traduirons, dans le langage de la Géométrie constructive, de la manière suivante :

1° *Si l'on maintient fixe un point quelconque, tous les points susceptibles d'être atteints par un autre point quelconque sont situés sur une surface contenant le second point et ne contenant pas le premier;*

2° *Autour du point fixe il existe un domaine triplement étendu et de dimensions finies, dans lequel tout point peut atteindre, par un déplacement continu, tout autre point situé sur la surface correspondante, définie ci-dessus.*

Chacun des deux systèmes d'axiomes de Lie exprime des propriétés appartenant à tout groupe continu de transformations projectives conservant une quadrique, ordinaire ou dégénérée en une courbe plane, à condition toutefois de se limiter à un domaine convenablement choisi.

Bien plus, il s'applique à tout groupe semblable à un de ces groupes, c'est-à-dire à tout groupe obtenu par une transformation générale opérée sur les variables, et il ne s'applique qu'à de tels groupes.

Telle est la proposition démontrée par Sophus Lie en se basant sur les propriétés, découvertes par lui-même, des groupes de transformations.

Il résulte de là que, si l'on appelle « point » l'ensemble de trois coordonnées, et « déplacements sans déformation », les transformations de l'un des groupes ainsi définis, on pourra établir, par rapport à ce groupe, des définitions et des propriétés correspondantes à celles de la Géométrie où n'intervient pas le postulat des parallèles.

Quant à ce postulat, il devra être remplacé par d'autres propositions convenablement choisies suivant le groupe pris pour base.

Enfin nous citerons les ouvrages de M. Klein [1] (1889-90) sur la Géométrie non-euclidienne, où l'on trouvera, en plus d'un bel exposé des travaux indiqués ci-dessus (sauf ceux de Lie), des résultats personnels du plus haut intérêt, notamment sur les diverses formes d'espace susceptibles de correspondre à une même détermination métrique.

Des travaux illustres que nous venons d'énumérer résulte sans conteste la possibilité d'établir, en écartant le postulat des parallèles, des Géométries conséquentes avec elles-mêmes et, par suite, l'impossibilité de démontrer ce postulat en s'appuyant sur les autres axiomes.

D'ailleurs, un simple regard jeté sur une surface sphérique montre qu'on y peut réaliser une Géométrie satisfaisant, à l'intérieur d'un domaine convenablement limité, aux axiomes d'Euclide, à l'exception du postulat des parallèles.

II

Les Géométries et leurs relations.

Différentes Géométries. — Nous allons étudier d'un peu plus près les différentes Géométries et les relations que l'on peut établir entre elles.

---

[1] Klein. *Nicht Euclidische Geometrie Vorlesungen*, ausgearbeitet von Fr. Schilling. Göttingen, 1893.

Y aurait-il autant de Géométries qu'il y a de groupes de transformations du type indiqué par Sophus Lie ?

Nullement, pourvu que l'on n'envisage que l'enchaînement logique des propositions, en faisant abstraction de la diversité des figures susceptibles de leur correspondre.

La Géométrie correspondante à un groupe ne dépend que des propriétés que présentent, par rapport à ce groupe, les notions fondamentales relatives à ce groupe : lignes jouant le rôle des lignes droites, fonction jouant le rôle de la distance, etc., de sorte qu'une seule Géométrie correspond à tous les groupes susceptibles de se transformer l'un dans l'autre par un changement quelconque, toutefois réel, de variables.

On peut donc se borner à considérer les groupes dans lesquels les lignes jouant le rôle des lignes droites sont effectivement les lignes droites de la Géométrie vulgaire, c'est-à-dire les groupes projectifs conservant les quadriques de cette dernière Géométrie, et, parmi ceux-ci, ne distinguer que trois cas (certains cas étant éliminés par les conditions auxquelles doit satisfaire la mesure des angles), donnant lieu à trois Géométries, savoir :

Quadrique réelle (domaine intérieur), Géométrie pseudo-sphérique ;

Quadrique imaginaire à équation réelle, Géométrie sphérique ;

Quadrique dégénérée en une conique imaginaire, Géométrie euclidienne ;

On est toutefois conduit, comme on le verra plus loin, à introduire dans les Géométries non-euclidiennes un paramètre, qui semblerait indiquer que ces Géométries forment une série simplement infinie.

Nous verrons qu'en fait ce paramètre est arbitraire, quand on ne considère que la Géométrie où il figure et qu'il ne caractérise une propriété de celle-ci que lorsqu'on la compare à une autre présentant avec la première certaines relations.

Distance généralisée suivant Cayley. — Nous pouvons évidemment nous servir de la Géométrie vulgaire comme système d'analyse pour étudier, au point de vue qui nous occupe, un groupe conservant une quadrique. Soit l'équation de la quadrique

$$\Omega_{xx} = 0,$$

le premier membre représentant une fonction du second degré des coordonnées x, y, z.

Le groupe admet un invariant simultané relatif à deux points quelconques x, y, z ; x', y', z', savoir le rapport anharmonique formé par ce couple de points avec les points d'intersection de la quadrique et de la droite qui les joint.

En posant

$$\Omega_{xx'} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Omega}{\partial x} x' + \frac{\partial \Omega}{\partial y} y' + \frac{\partial \Omega}{\partial z} z'\right]$$

ce rapport anharmonique a pour expression

$$F(x, x') = \frac{\Omega_{xx'} + \sqrt{\Omega^2_{xx'} - \Omega_{xx}\,\Omega_{x'x'}}}{\Omega_{xx'} - \sqrt{\Omega^2_{xx'} - \Omega_{xx}\,\Omega_{x'x'}}},$$

et l'on peut choisir pour l'invariant une fonction quelconque de cette quantité.

Pour trois points, x, y, z ; x', y', z' ; x'', y'', z'', en ligne droite et se succédant dans l'ordre où ils sont écrits, l'on a

$$F(x, x'') = F(x, x') \times F(x', x''),$$

formule que l'on vérifiera en remplaçant dans le second membre les coordonnées du second point par les expressions

$$x' = tx + \theta x''$$
$$y' = ty + \theta y''$$
$$z' = tz + \theta z'',$$

où t et θ sont des nombres compris entre zéro et l'unité et ayant leur somme égale à l'unité.

Si l'on veut que la distance soit une fonction satisfaisant, dans les conditions ci-dessus, à la relation

$$f(x, x'') = f(x, x') + f(x', x''),$$

son expression générale devra être évidemment

$$(1) \qquad f(x, x') = c \log \frac{\Omega_{xx'} + \sqrt{\Omega^2_{xx'} - \Omega_{xx}\,\Omega_{x'x'}}}{\Omega_{xx'} - \sqrt{\Omega^2_{xx'} - \Omega_{xx}\,\Omega_{x'x'}}}.$$

ou encore

$$(2)\qquad f(x, x') = 2\,ic \text{ arc } \cos \frac{\Omega_{xx'}}{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{x\,x'}}} = 2 \text{ arc tang} \frac{\sqrt{\Omega^2_{xx} + \Omega_{xx}\,\Omega_{xx}}}{\Omega_{xx'}},$$

où c est une constante arbitraire.

L'expression (1) conviendra au cas de la quadrique réelle, et l'on devra alors choisir pour c une valeur réelle et positive; l'expression (2) conviendra au cas de la quadrique imaginaire, et l'on devra alors donner à c une valeur imaginaire pure

$$c = c'i.$$

On voit qu'en Géométrie sphérique (ou riemannienne) la mesure des distances sur une ligne droite présente les mêmes caractères que la mesure des angles autour d'un point dans la Géométrie plane ordinaire.

Paramètre des Géométries non-euclidiennes. — Le paramètre c (paramètre k de Gauss et de Lobatchewski) représente une longueur déterminée, savoir la distance de deux points dont le rapport anharmonique relativement à la quadrique fondamentale est égale à e.

Donner une valeur déterminée à c revient à fixer l'unité de longueur.

L'introduction du paramètre c présente l'avantage de rendre arbitraire l'unité de longueur et par suite homogènes les formules des Géométries non-euclidiennes; mais la propriété consistant dans l'homogénéité des formules n'aura pas le même caractère que dans la Géométrie euclidienne. Dans cette dernière, la multiplication par un même nombre de toutes les longueurs figurant dans une formule peut être interprétée soit comme un changement d'unité, soit comme une modification par similitude des figures; dans les Géométries non-euclidiennes, cette dernière interprétation n'est pas possible, car la longueur représentée par le paramètre c est liée à la Géométrie même et ne peut être modifiée par une transformation ponctuelle.

Déterminations métriques présentant un contact en un point. — Nous avons vu qu'il n'existait, à proprement parler, que trois Géométries différentes, en désignant par le mot Géométrie un

ensemble de propositions, susceptibles d'ailleurs de correspondre à des images géométriques diverses. Dans cet ordre d'idées, on ne distingue pas, par exemple, la Géométrie riemannienne sur le plan de la Géométrie sur la sphère, quoique les propositions de l'une et de l'autre ne deviennent identiques qu'en remplaçant dans cette dernière les mots grand cercle par ligne droite.

Une même Géométrie peut être obtenue en choisissant des opérations différentes pour définir l'égalité, c'est-à-dire la superposabilité ; l'égalité aura les mêmes propriétés, mais les figures égales ne seront pas les mêmes dans les deux cas.

Mais rien n'empêche d'envisager à la fois dans l'espace, conçu simplement comme l'ensemble des points, les différents groupes de transformations susceptibles, suivant le théorème de Lie, de donner lieu à des systèmes de détermination métrique.

Les groupes dans lesquels les lignes jouant le rôle des droites sont les mêmes, donneront lieu aux mêmes propriétés projectives des figures. Ces groupes sont compris dans un même groupe, savoir le groupe projectif général.

Il peut exister entre deux de ces groupes une relation consistant en ce que les déterminations métriques correspondantes donnent lieu, en un point déterminé de l'espace, aux mêmes propriétés, aux infiniment petits près d'ordre supérieur.

M. Kleïn [1] exprime cette relation en disant que les deux déterminations métriques (*Maassbestimmungen*) présentent un contact en un point.

Considérons une détermination euclidienne et une détermination non-euclidienne présentant un contact en un point O.

En ce point, le cône isotrope euclidien doit se confondre avec le cône tangent à la quadrique fondamentale non-euclidienne, c'est-à-dire que le plan de l'infini et le cercle imaginaire de l'infini euclidiens se confondent respectivement avec le plan polaire du point O par rapport à cette quadrique fondamentale et avec l'intersection de ce plan et de cette quadrique.

Autrement dit, la quadrique fondamentale du système non-euclidien considéré est, dans le système euclidien considéré, une

[1] KLEIN. *Math. Annalen*, Bd. IV, S. 573 ; traduit en français par Laugel, Paris.

sphère ayant pour centre le point O, et par suite de la forme :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4c^2 = 0,$$

c étant réel ou purement imaginaire et de la forme $i\,c'$.

On est conduit, d'après les idées de Riemann et de Beltrami, à donner le nom de courbure à l'expression

$$\frac{1}{4c^2},$$

la courbure étant positive pour une géométrie sphérique (quadrique fondamentale imaginaire) et négative pour une géométrie pseudo-sphérique (quadrique fondamentale réelle).

Il reste bien entendu qu'il ne faut associer à ce mot de courbure aucune des images géométriques qu'il éveille dans la théorie ordinaire des surfaces et des courbes.

Formons, d'après la formule (1) ou (1 *bis*), l'expression de l'élément linéaire ds relatif à la détermination non-euclidienne correspondante à la quadrique ci-dessus.

Cette expression contient un paramètre arbitraire c, mais la condition de retrouver, pour $x = y = z = o$, l'expression euclidienne de l'élément linéaire, conduit à l'égalité des deux paramètres que nous avons désignés par la même lettre c en prévision de ce résultat, et l'on a finalement :

$$ds^2 = 4c^2\,\frac{4c^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (ydx - xdy)^2 - (zdy - ydz)^2 - (xdz - zdx)^2}{(4c^2 - x^2 - y^2 - z^2)^2}.$$

On voit que cette expression se confond avec l'expression habituelle de l'élément linéaire, non-seulement pour $x = y = z = o$, mais encore, x, y et z étant quelconques, pour $c^2 = \infty$.

Par la condition que les deux géométries considérées donnent lieu à la même détermination métrique au point O, la longueur non euclidienne c a pris une signification par rapport à la géométrie euclidienne, et devient caractéristique de la géométrie non-euclidienne considérée parmi celles qui ont un contact en O avec cette géométrie euclidienne.

On remarque que, tandis qu'il existe une série simplement infinie de géométries non-euclidiennes ayant un contact en un point donné avec une géométrie eucidienne, il n'existe qu'une

géométrie euclidienne jouissant de cette propriété par rapport à une géométrie non-euclidienne donnée.

Pour comparer les déterminations métriques sur une ligne droite, faisons dans la formule donnant l'expression de l'élément linéaire :

$$y = z = 0.$$

On a alors, x désignant la distance au point O suivant la détermination euclidienne et s la même distance suivant la détermination non-euclidienne :

$$ds = \frac{4c^2 dx}{4c^2 - x^2}.$$

En géométrie pseudo-sphérique (lobatchewskienne) :

$$s = 2c \log \frac{(2c + x)^2}{(2c - x)^2}.$$

En géométrie sphérique (riemannienne), l'on a pour $c' = i\,c''$,

$$ds = \frac{4c'^2 dx}{4c'^2 + x^2}, \quad s = 2c' \text{ arc tang } \frac{x}{2c'}.$$

Nous venons de voir comment se présentent les déterminations métriques non euclidiennes, dans l'analyse euclidienne.

Pour varier les points de vue, supposons, au contraire, que, tout en employant des instruments de mesure non-euclidiens, l'on continue à tenir pour exactes les formules et les raisonnements euclidiens.

Dans ces conditions, l'on remplace en chaque point de l'espace la détermination métrique non-euclidienne par la détermination euclidienne présentant avec la première un contact en ce point, de même que l'on emploie souvent, à la place d'une petite portion sphérique une représentation plane obtenue en projetant cette portion superficielle sur son plan tangent.

Toute détermination métrique directe (d'angle ou de distance) se confondra ainsi en chaque point avec la vraie, et la longueur d'une ligne obtenue par la mensuration successive de ses segments élémentaires sera concordante avec la longueur qui résulterait de la determination non-euclidienne considérée.

Mais la détermination euclidienne employée différera d'un point à un autre, de sorte que les résultats ainsi obtenus par des mesures directes ne seront pas concordants avec les résultats *calculés* au moyen des formules euclidiennes. C'est ainsi que l'on constatera, par exemple, que la somme des angles d'un triangle est différente de deux angles droits.

Géométrie euclidienne sur la sphère. — Pour associer quelques images géométriques aux considérations analytiques exposées dans ce paraphe, appliquons celles-ci à la Géométrie sur une sphère, c'est-à-dire à l'ensemble des propriétés invariantes dans les déplacements sans déformation conservant cette surface, déplacements qui sont les rotations autour du centre.

Parmi les notions primordiales, l'on trouve le point et le grand cercle.

On peut toujours, par un déplacement, amener un point en un autre point quelconque de la sphère.

Un point de la surface étant fixe, on peut encore opérer un déplacement de manière à amener un autre point quelconque sur un grand cercle passant par le point fixe.

Par un point on peut mener un grand cercle, et généralement un seul, perpendiculaire à un grand cercle donné.

On déduit de ces propriétés tout un ensemble de propositions, qui deviendraient identiques aux propositions de la géométrie plane indépendantes du postulat des parallèles, moyennant le remplacement des mots *grand cercle* par *ligne droite*.

Il y a lieu d'observer toutefois qu'on doit, pour cette équivalence, se limiter sur la sphère, à un certain domaine, en raison du fait suivant :

Tous les grands cercles passant par un point passent par son opposé et sont perpendiculaires au grand cercle dont ces points sont les pôles.

Nous reviendrons plus loin sur cette particularité.

Pour comparer deux déterminations métriques au moyen d'images sphériques, comme nous l'avons fait au moyen d'images planes, prenons sur la sphère, pour système de référence, deux grands cercles rectangulaires se coupant en un point O, pris pour origine.

Les coordonnées d'un point M seront les longueurs X et Y des arcs de ces grands cercles compris entre le point O et les grands cercles menés par M perpendiculairement aux premiers.

Les trois coordonnées du point M par rapport à un système trirectangulaire ayant pour origine le centre de la sphère, un des axes passant par le point O, ont pour expression :

$$R\frac{\operatorname{Cos}\frac{X}{R}\operatorname{Sin}\frac{Y}{R}}{\sqrt{\operatorname{Cos}^2\frac{X}{R}+\operatorname{Cos}^2\frac{Y}{R}-\operatorname{Cos}^2\frac{X}{R}\operatorname{Cos}^2\frac{Y}{R}}},$$

$$R\frac{\operatorname{Cos}\frac{X}{R}\operatorname{Cos}\frac{Y}{R}}{\sqrt{\operatorname{Cos}^2\frac{X}{R}+\operatorname{Cos}^2\frac{Y}{R}-\operatorname{Cos}^2\frac{X}{R}\operatorname{Cos}^2\frac{Y}{R}}},$$

$$R\frac{\operatorname{Cos}\frac{Y}{R}\operatorname{Sin}\frac{X}{R}}{\sqrt{\operatorname{Cos}^2\frac{X}{R}+\operatorname{Cos}^2\frac{Y}{R}-\operatorname{Cos}^2\frac{X}{R}\operatorname{Cos}^2\frac{Y}{R}}}.$$

On vérifiera que tout déplacement sans déformation de la sphère, savoir une rotation autour de son centre, laisse invariante l'équation

$$\operatorname{Cos}^2\frac{X}{R}+\operatorname{Cos}^2\frac{Y}{R}-\operatorname{Cos}^2\frac{X}{R}\operatorname{Cos}^2\frac{Y}{R}=0.$$

ou

$$\operatorname{tg}^2\frac{X}{R}+\operatorname{tg}^2\frac{Y}{R}+1=0.$$

Posons

$$x=R\operatorname{tg}\frac{X}{R},\qquad y=R\operatorname{tg}\frac{Y}{R}.$$

Tout déplacement sans déformation de la sphère sera représenté par une transformation projective en x et y conservant l'équation quadratique :

$$x^2+y^2+R^2=0.$$

Un grand cercle de la sphère a une équation de la forme

$$a\operatorname{Cos}\frac{X}{R}\operatorname{Sin}\frac{Y}{R}+b\operatorname{Cos}\frac{X}{R}\operatorname{Sin}\frac{Y}{R}+c\operatorname{Cos}\frac{X}{R}\operatorname{Cos}\frac{Y}{R}=0.$$

ou

$$ax+by+c=0.$$

La position d'un point sur la sphère est une fonction périodi-

que des coordonnées X et Y, de sorte que les systèmes de valeurs X, Y et $X + 2\pi R$, $Y + 2\pi R$, représentent le même point.

Les coordonnées x et y sont également des fonctions périodiques de X et Y, mais de période πR, de sorte qu'aux deux points X, Y et $X + \pi R$, $Y + \pi R$ correspond le même système de valeurs x, y.

En laissant de côté un des deux points correspondants à x et y, on ne considère, en faisant varier x et y de $-\infty$ à $+\infty$, que la demi-sphère limitée par un grand cercle ayant pour pôle le point O. Le groupe euclidien ayant un contact en O avec le groupe des déplacements sphériques est représenté par le groupe projectif continu en x, y, conservant l'équation

$$x^2 + y^2 = 0.$$

La courbe de l'infini relatif à ce système euclidien est le grand cercle ayant pour pôle le point O.

Par un de ces déplacements euclidiens, un point quelconque de la demi-spère ne pourra jamais atteindre ce grand cercle.

Les rotations euclidiennes autour du point O se confondent avec les rotations sphériques.

Une translation euclidienne sera une transformation dans laquelle tous les points décrivent des grands cercles perpendiculaires à un même grand cercle passant par le point O. On voit que ces grands cercles rencontrent le grand cercle de l'infini au même point. Ils jouent le rôle des parallèles de la géométrie plane ordinaire.

Ainsi se trouvent réalisées, sur la sphère, deux géométries : l'une non-euclidienne, qui est relative aux déplacements vulgaires de la sphère ; l'autre euclidienne, qui comprend un ensemble de de propriétés susceptibles d'être exprimées par les mêmes propositions que les propriétés de la géométrie plane ordinaire.

III

L'Infini géométrique.

Diverses conceptions de la ligne droite et du plan. — Nous nous sommes efforcés, dans les pages précédentes, en variant les figures que l'on peut faire correspondre à une même relation

logique, de détruire certaines associations d'idées, et de montrer notamment que la détermination métrique des longueurs et des angles constitue une idée indépendante de la conception même des figures.

La conclusion qui s'en dégage est celle-ci :

On peut, tout en maintenant les concepts vulgaires du point, de la droite et du plan, obtenir des géométries conséquentes avec elles-mêmes en modifiant d'une certaine manière l'idée de la détermination métrique, de sorte que les propriétés où intervient l'idée de mesure peuvent être très différentes de celles de la géométrie ordinaire.

On comprend que la somme des angles d'un triangle ne soit plus égale à deux angles droits, si la mesure des angles est tout autre qu'en géométrie euclidienne et si les angles droits eux-mêmes ne sont pas ceux de cette géométrie.

Il semble, dans ces conditions, qu'on ne doive rencontrer aucune difficulté à admettre les conceptions nouvelles à côté des conceptions ordinaires.

C'est pourtant dans les difficultés que l'esprit éprouve à créer des images géométriques correspondantes aux concepts des géométries non-euclidiennes que l'on doit voir l'origine de la répugnance qu'ils inspirent à certains esprits.

C'est que, contrairement à nos prévisions, ce ne sont pas seulement nos conceptions de la mesure qui exigent des modifications, mais encore nos conceptions de la droite et du plan et surtout de l'infini. Il y a là un fait inattendu qui doit être examiné.

Nous pouvons nous borner au cas de la géométrie sphérique (ou riemannienne).

Considérons d'abord la géométrie sur la ligne droite.

On a vu que la détermination riemannienne s de la distance à un point O est liée à la détermination euclidienne x ayant un contact avec la premiàre en O par la formule

$$x = 2c' \operatorname{tang} \frac{s}{2c'}.$$

La présence d'une fonction trigonométrique suggère l'assimilation de la droite au cercle, c'est-à-dire l'hypothèse que deux

valeurs de $\frac{s}{2c'}$ ne représentent un même point de la droite que lorsque ces valeurs différent d'un multiple de 2π, de sorte qu'on doit, à chaque point de la conception euclidienne déterminée par une valeur de $\frac{s}{2c'}$ comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, associer un point étranger à cette conception et correspondant à la valeur $\frac{s}{2c'} + \pi$.

Les points de la droite vers lesquels on tend par les déplacements euclidiens effectués dans les deux sens et qui, dans la conception ordinaire, se confondent, seraient séparés par un segment correspondant point par point au segment de cette dernière conception.

Cette nouvelle conception de la ligne droite est tout aussi légitime que la conception ordinaire comportant un point à l'infini, vers lequel on tend en se déplaçant dans un sens ou dans l'autre.

Mais on peut tout aussi légitimement admettre que les deux points correspondants à une valeur de x, que nous avons séparés, soient de nouveau réunis et que les angles $\frac{s}{2c'}$ et $\frac{s}{2c'} + \pi$ représentent le même point de la droite.

A chacune de ces conceptions correspond une conception du plan et une conception de l'espace ; d'où deux sortes de géométries correspondantes à la même détermination métrique.

Dans l'une de ces géométries, à laquelle M. Klein réserve la dénomination de *Géométrie sphérique* en raison de sa plus grande analogie avec la géométrie sur la sphère, l'on admet que l'espace comprend des points situés au-delà de l'infini euclidien.

Dans l'autre Géométrie, appelée par M. Klein *Géométrie elliptique*, l'espace ne comprend que les points de la conception vulgaire.

Degré de connexité du plan. — La question relative au nombre de points de l'espace qui correspondent à un même système de valeurs des coordonnées nous paraît être indépendante de celle des parallèles, quoique ce soit l'étude de cette dernière qui nous y ait conduits.

La question se pose, non seulement indépendamment de toute

particularisation de la détermination métrique, mais encore en l'absence de toute idée de détermination métrique.

Nous nous en rendrons compte au moyen de la Géométrie projective sur la ligne droite.

On sait que l'on peut déterminer la position d'un point sur la ligne droite, sans l'intervention de l'idée de distance, au moyen d'un système général de coordonnées projectives, le système étant caractérisé par le choix des points correspondants à trois valeurs de la coordonnée, par exemple 0, 1 et ∞.

Chacun des points de la droite est déterminé univoquement par un nombre compris entre $-\infty$ et $+\infty$, les nombres $-\infty$ et $+\infty$ correspondant au même point, et le point de l'infini sur la droite correspondant à une valeur quelconque.

On peut d'ailleurs, par des transformations projectives, amener le point de l'infini en un point quelconque en lui faisant parcourir la droite dans un sens ou dans l'autre, et amener un point quelconque en un autre point quelconque en passant par le point de l'infini.

Il résulte de là que les propriétés projectives d'une ligne droite sont celles d'une ligne *fermée* (certains disent *illimitée*).

Pour des raisons analogues, le plan doit être considéré comme une surface fermée.

Mais alors nous nous trouvons en présence de ce fait : Étant donnée une droite D (ligne fermée) sur un plan (surface fermée), un point peut, en suivant une ligne droite, passer d'un côté à l'autre de la droite D sans traverser cette ligne, propriété qui indique que le plan est une surface à double connexité.

En outre, on peut obtenir le résultat indiqué au moyen d'une trajectoire différant aussi peu que l'on voudra de la droite D, ce qui exige que le plan soit une surface *double*. On peut former par exemple une surface double en réunissant les petits côtés d'une bande de papier, de manière à séparer les angles qui seraient réunis si l'on voulait obtenir une surface cylindrique.

Du fait que le plan est une surface double résulte la propriété suivante :

Si l'extrémité d'un stylet décrit une ligne droite du plan dans toute son étendue, le stylet, revenu au point de départ, sera du côté du plan opposé à celui où il se trouvait au départ.

Mais on peut interpréter autrement les propriétés projectives. Rien n'empêche de concevoir, comme nous l'avons déjà mentionné, que chaque système de valeurs des coordonnées projectives représente deux points de l'espace, savoir celui de la conception habituelle, et un autre situé au delà de l'infini euclidien.

Dans cette dernière conception de l'espace, le plan serait une surface fermée simple et à simple connexité, et deux lignes droites situées dans un même plan se couperaient en deux points, dont l'un situé au delà de l'infini euclidien.

On voit que des conceptions diverses de l'espace peuvent correspondre à la même forme analytique.

Dissociation des idées d'espace et d'infini. — Les propriétés projectives des figures doivent être les mêmes pour toutes les Géométries métriques que nous avons étudiées, puisque les lignes droites et les plans de ces Géométries sont les mêmes lignes de l'espace ; les considérations que nous venons de développer sont donc communes à ces Géométries.

En se bornant aux deux formes d'espace envisagées ci-dessus, la ligne droite est une ligne fermée et le plan, une surface fermée. Ces conceptions de la droite et du plan, quoique d'origine projective, doivent évidemment s'accorder avec la conception euclidienne et par suite, en dépit de l'intuition vulgaire, l'idée de l'infini doit être compatible avec celle d'une ligne et d'une surface fermées. Il faut donc franchement nier cette incompatibilité qui n'est qu'apparente.

La difficulté d'obtenir une représentation visuelle d'un fait ne nous paraît pas être une objection contre la réalité de ce fait.

Quand nous nous représentons la sphéricité de la terre, ce n'est pas avec des images de faits terrestres, telles que les impressions d'un voyageur qui parcourrait un méridien, mais bien avec l'image d'une boule de petites dimensions.

Nous interprétons un fait nouveau pour nous au moyen des images antérieurement acquises par notre esprit, et cela n'est pas toujours possible.

D'ailleurs quelles images visuelles correspondent à l'idée de l'infini euclidien ?

Ce point à l'infini sur une droite, qui coïncide avec celui vers

lequel on tend en s'éloignant dans l'autre sens ; ce plan de l'infini, que l'on rencontre en prenant n'importe quelle direction, ne sont pas plus concevables en somme qu'une idée de l'espace privée de celle de l'infini en tant que propriété intrinsèque.

Résultant uniquement de la nature du mouvement au moyen duquel on suppose l'espace parcouru, l'idée de l'infini doit être séparée non seulement de l'idée d'espace, mais encore de celle des lignes que nous qualifions d'infinies ; on peut même la faire disparaître totalement moyennant une modification de la notion de distance.

N'est-il pas naturel d'ailleurs que l'idée de l'infini, qui n'est autre que celle d'une opération indéfiniment répétée ou continuée, soit liée à la nature de cette opération elle-même ?

D'ailleurs cette idée, ainsi que l'idée parente d'infiniment petit, constituent-t-elles, dans la science mathématique, autre chose que des procédés analytiques, remarquablement féconds, permettant de déduire de certaines propriétés particulières, tenues pour exactes dans un domaine déterminé, d'autres propriétés valables seulement pour ce domaine, mais procédés impuissants, comme l'analyse mathématique elle-même, à fournir des idées légitimes sur les propriétés particulières d'un autre domaine, auquel peuvent ne pas être applicables les idées que cette analyse a prises comme point de départ ?

C'est ainsi qu'il serait vain de vouloir, au moyen de l'analyse infinitésimale et sans autres expériences que celles qui s'appliquent aux corps de dimensions ordinaires, se faire des idées sur la constitution intime de ces corps et sur les propriétés des particules présentant des dimensions d'un autre ordre de grandeur.

A plus forte raison, les idées de l'infini et de l'infiniment petit, qui sont d'origine mathématique, ne sauraient répondre à aucune propriété intrinsèque d'un concept figuré.

L'idée de l'infini n'est donc pas inhérente à celle d'espace ; cette dernière peut être en effet séparée de celle de détermination métrique, et par suite de celle de l'infini, qui peut en résulter. En particulier, celle-ci peut être exclue de la Geométrie projective et à plus forte raison de l'*Analysis situs*.

Ce n'est pas seulement relativement à l'infini que l'on a doté l'idée d'espace de propriétés intrinsèques qu'elle ne comporte pas.

Que penser des idées illusoires de *forme*, *nature*, *structure* de l'espace, notions inconsistantes, qu'il convient d'abandonner aux métaphysiciens, lesquels semblent se complaire, en mauvais architectes, à construire des édifices d'autant plus élevés que les fondements en sont plus précaires ?

Le mot *espace* doit perdre sa prétentieuse importance pour devenir l'expression vague de la faculté que nous avons de localiser les objets ou, ce qui revient au même, de la propriété qu'ont les objets d'être localisés.

(*A suivre.*) G. Combebiac (Limoges).

ÉQUIVALENCE DU MOUVEMENT

D'UN SYSTÈME INVARIABLE A TROIS DIMENSIONS Σ QUI PASSE D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE D'UNE POSITION DONNÉE Σ_1 A UNE AUTRE POSITION DONNÉE Σ_2

§ 1. — Soient ABCU, $A_1B_1C_1U_1$ et $A_2B_2C_2U_2$ des pyramides homologues appartenant respectivement aux systèmes Σ, Σ_1 et Σ_2 ; ce sont, en raison de l'invariabilité du système Σ, des pyramides congruentes.

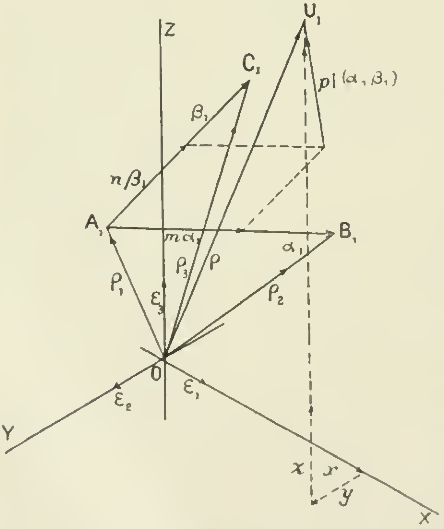


Fig. 1.

Prenons un point fixe O de l'espace pour origine des rayons vecteurs des points des systèmes Σ, Σ_1 et Σ_2. Soient donnés dans les systèmes Σ, Σ_1 et Σ_2 les points respectivement homologues A, B, C ; A_1, B_1, C_1 et A_2, B_2, C_2, avec (ABC) $\neq$ o. Soit U un point arbitraire, variable, de Σ, de manière que U_1 et U_2 soient respectivement les points correspondants de Σ_1 et Σ_2, avec la condition

$$(ABCU) \neq 0.$$

Si nous posons (fig. 1) $\overline{A_1B_1} = \alpha_1$, $\overline{A_1C_1} = \beta_1$, $A_1 = O + \rho_1$, $B_1 = O + \rho_2$, $C_1 = O + \rho_3$, $U_1 = O + \rho$, l'équation du système ponctuel Σ_1 ou U_1 sera

$$\rho = \rho_1 + m\alpha_1 + n\beta_1 + p \,|\, \alpha_1\beta_1$$

ou encore

$$\rho = \rho_1 + m(\rho_2 - \rho_1) + n(\rho_3 - \rho_1) + p \mid [(\rho_2 - \rho_1)(\rho_3 - \rho_1)],$$

où m, n et p sont des variables numériques, indépendantes l'une de l'autre.

Si le système Σ passe de la position Σ_1 à la position Σ_2, les points A, B, C et U subissent les déplacements totaux

$$\overline{A_1A_2} = \delta_1,\ \overline{B_1B_2} = \delta_2,\ \overline{C_1C_2} = \delta_3,\ \overline{U_1U_2} = \delta,$$

de manière qu'il existe pour le système ponctuel Σ_2, si l'on pose $U_2 = O + \psi$, la relation

$$\psi = \rho + \delta = \rho_1 + \delta_1 + m(\rho_2 + \delta_2 - \rho_1 - \delta_1) + n(\rho_3 + \delta_3 - \rho_1 - \delta_1)$$
$$+ p \mid [(\rho_2 + \delta_2 - \rho_1 - \delta_1)(\rho_3 + \delta_3 - \rho_1 - \delta_1)],$$

ou

$$\psi = \rho_1 + m(\rho_2 - \rho_1) + n(\rho_3 - \rho_1) + p \mid [(\rho_2 - \rho_1)(\rho_3 - \rho_1)]$$
$$+ \delta_1 + m(\delta_2 - \delta_1) + n(\delta_3 - \delta_1) + p \mid [(\rho_2 - \rho_1)(\delta_3 - \delta_1)$$
$$- (\rho_3 - \rho_1)(\delta_2 - \delta_1) + (\delta_2 - \delta_1)(\delta_3 - \delta_1)],$$

ou, moyennant $(\delta_2 - \delta_1) = \delta_\alpha$, $(\delta_3 - \delta_1) = \delta_\beta$,

$$\psi = \rho + \delta = \rho_1 + m\alpha_1 + n\beta_1 + p \mid (\alpha_1\beta_1)$$
$$+ \delta_1 + m\delta_\alpha + n\delta_\beta + p \mid [\alpha_1\delta_\beta - \beta_1\delta_\alpha + \delta_\alpha\delta_\beta],$$

et, si nous posons

$$[(\rho_2 + \delta_2) - (\rho_1 + \delta_1)] = \overline{A_2B_2} = \alpha_2,\ [(\rho_3 + \delta_3) - (\rho_1 + \delta_1)] = \overline{A_2C_2} = \beta_2,$$

l'équation polaire du système ponctuel Σ_2 est encore

$$\psi = \rho + \delta_1 + m\alpha_2 + n\beta_2 + p \mid (\alpha_2\beta_2).$$

On en déduit pour le déplacement total du point variable U du système Σ

$$\delta = (\psi - \rho) = \delta_1 + m\delta_\alpha + n\delta_\beta + p \mid [\alpha_1\delta_\beta - \beta_1\delta_\alpha + \delta_\alpha\delta_\beta].$$

« Les déplacements totaux de quatre points et plus du système Σ ne sont pas indépendants. Les déplacements totaux de tous les points U du système Σ sont déterminés, lorsque ceux de trois points du système non situé en ligne droite sont connus. le système Σ est passé de la position Σ_1 à la position Σ_2, lorsque trois points de Σ non situés en ligne droite, qui coïncidant

auparavant avec les points correspondants de Σ_1, coïncident avec les points homologues de Σ_2 ».

En prenant ∂ comme radius vector, la dernière équation est celle de l'hodographe des déplacements totaux des points du système Σ.

La multiplication de cette équation par $(\partial_\alpha \partial_\beta)$ donne

$$(\partial - \partial_1)(\partial_\alpha \partial_\beta) = p \mid [\alpha_1 \partial_\beta - \beta_1 \partial_\alpha + \partial_\alpha \partial_\beta](\partial_\alpha \partial_\beta).$$

Présentement nous avons

$$\begin{aligned}
&[\alpha_1 \partial_\beta - \beta_1 \partial_\alpha + \partial_\alpha \partial_\beta] \mid (\partial_\alpha \partial_\beta) = (\alpha_1 \partial_\beta) \mid (\partial_\alpha \partial_\beta) - (\beta_1 \partial_\alpha) \mid (\partial_\alpha \partial_\beta) + (\partial_\alpha \partial_\beta)^2 \\
&= \begin{vmatrix} \alpha_1 \mid \partial_\alpha & \partial_\beta \mid \partial_\alpha \\ \alpha_1 \mid \partial_\beta & \partial_\beta \mid \partial_\beta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \beta_1 \mid \partial_\alpha & \partial_\alpha \mid \partial_\alpha \\ \beta_1 \mid \partial_\beta & \partial_\alpha \mid \partial_\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \partial_\alpha \mid \partial_\alpha & \partial_\beta \mid \partial_\alpha \\ \partial_\alpha \mid \partial_\beta & \partial_\beta \mid \partial_\beta \end{vmatrix} \\
&= (\alpha_1 \mid \partial_\alpha)\partial_\beta^2 - (\alpha_1 \mid \partial_\beta)(\partial_\alpha \mid \partial_\beta) - (\beta_1 \mid \partial_\alpha)(\partial_\alpha \mid \partial_\beta) + (\beta_1 \mid \partial_\beta)\partial_\alpha^2 + \partial_\alpha^2 \partial_\beta^2 - (\partial_\alpha \mid \partial_\beta)^2 \\
&= \{(\alpha_1 \mid \partial_\alpha)\partial_\beta^2 + (\beta_1 \mid \partial_\beta)\partial_\alpha^2 + \partial_\alpha^2 \partial_\beta^2\} - (\partial_\alpha \mid \partial_\beta)\{\alpha_1 \mid \partial_\beta + \beta_1 \mid \partial_\alpha + \partial_\alpha \mid \partial_\beta\} \\
&= -(\partial_\alpha \mid \partial_\beta)\{\alpha_1 \mid \partial_\beta + (\beta_2 - \partial_\beta) \mid \partial_\alpha + \partial_\alpha \mid \partial_\beta\} \\
&= -(\partial_\alpha \mid \partial_\beta)\{\alpha_1 \mid \partial_\beta + \beta_2 \mid \partial_\alpha - \partial_\alpha \mid \partial_\beta + \partial_\alpha \mid \partial_\beta\} \\
&= -(\partial_\alpha \mid \partial_\beta)\{\alpha_1 \mid \partial_\beta + \beta_2 \mid \partial_\alpha\} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

par suite

$$\mid [\alpha_1 \partial_\beta - \beta_1 \partial_\alpha + \partial_\alpha \partial_\beta](\partial_\alpha \partial_\beta) = 0.$$

Nous obtenons ainsi

$$[(\partial - \partial_1)(\partial_\alpha \partial_\beta)] = 0.$$

« L'hodographe des déplacements totaux des points du système Σ est un plan parallèle aux différences des déplacements totaux des extrémités des segments α et β ».

Déduisant de la première équation de cet hodographe les déplacements totaux de trois autres points coplanaires du système et développant avec ces déplacements l'équation de l'hodographe, nous obtenons de nouveau le même hodographe.

« L'hodographe des déplacements totaux des points d'un système indéformable Σ, lorsque celui-ci passe, de toutes les manières possibles, d'une position Σ_1 à une autre position Σ_2, est constamment un plan ».

Nous pouvons encore écrire

$$\partial(\partial_2 \partial_3 + \partial_3 \partial_1 + \partial_1 \partial_2) = \partial_1 \partial_2 \partial_3.$$

En prenant δ_1, δ_2 et δ_3 comme vecteurs de l'hodographe, le plan de cet hodographe passe par les extrémités de ces vecteurs.

Si nous transportons les déplacements δ_1, δ_2, δ_3 des points A, B, C en l'espace de manière que leurs origines coïncident avec le même point O_1 de l'espace, le plan déterminé par leurs extrémités D_1, D_2, D_3 (fig. 2) est le plan de l'hodographe du système des déplacements, O_1 étant le pôle de l'hodographe, car on a $(D_2 - D_1) = \delta_\alpha$, $(D_3 - D_1) = \delta_\beta$, et l'équation de ce plan est

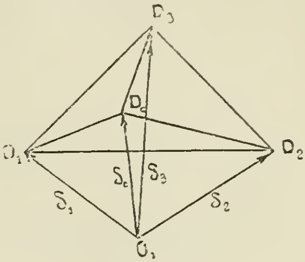


Fig. 2.

$$(\delta - \delta_1)(\delta_\alpha\delta_\beta) = 0.$$

Le vecteur

$$\mu = |[\alpha_1\delta_\beta - \beta_1\delta_\alpha + \delta_\alpha\delta_\beta]$$

est, parce que $(\mu\delta_\alpha\delta_\beta) = 0$, parallèle au plan de l'hodographe et est une somme de multiples de δ_α et δ_β, de sorte que nous pouvons poser

$$\mu = x\delta_\alpha + y\delta_\beta = |[\alpha_1\delta_\beta - \beta_1\delta_\alpha + \delta_\alpha\delta_\beta].$$

Si ε désigne le vecteur déterminant la position du plan de l'hodographe, on a

$$\varepsilon = [|(\delta_\alpha\delta_\beta)] : \sqrt{(\delta_\alpha\delta_\beta)^2},$$

et la multiplication de l'équation précédente par ε donne

$$x(\varepsilon\delta_\alpha) + y(\varepsilon\delta_\beta) = \varepsilon|[\alpha_1\delta_\beta - \beta_1\delta_\alpha].$$

De cette équation résultent, par les valeurs des coëfficients x et y,

$$x(\delta_\beta\varepsilon\delta_\alpha) = (\delta_\beta\varepsilon)|[\alpha_1\delta_\beta - \beta_1\delta_\alpha],$$
$$y(\delta_\alpha\varepsilon\delta_\beta) = (\delta_\alpha\varepsilon)|[\alpha_1\delta_\beta - \beta_1\delta_\alpha],$$

de sorte que moyennant ces valeurs de x et y, on a

$$\mu = \frac{(\delta_\beta\varepsilon)|[\alpha_1\delta_\beta - \beta_1\delta_\alpha]}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta}\delta_\alpha + \frac{(\varepsilon\delta_\alpha)|[\alpha_1\delta_\beta - \beta_1\delta_\alpha]}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta}\delta_\beta.$$

Mais nous avons

$$
\begin{aligned}
(\delta_\beta \varepsilon) \mid [\alpha_1 \delta_\beta - \beta_1 \delta_\alpha] &= (\delta_\beta \varepsilon) \mid (\alpha_1 \delta_\beta) - (\delta_\beta \varepsilon) \mid (\beta_1 \delta_\alpha) \\
&= \begin{vmatrix} \delta_\beta \mid \alpha_1 & \varepsilon \mid \alpha_1 \\ \delta_\beta \mid \delta_\beta & \varepsilon \mid \delta_\beta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_\beta \mid \beta_1 & \varepsilon \mid \beta_1 \\ \delta_\beta \mid \delta_\alpha & \varepsilon \mid \delta_\alpha \end{vmatrix} \\
&= (\varepsilon \mid \beta_1)(\delta_\alpha \mid \delta_\beta) - (\varepsilon \mid \alpha_1) \delta_\beta^2. \\
(\varepsilon \delta_\alpha) \mid [\alpha_1 \delta_\beta - \beta_1 \delta_\alpha] &= (\varepsilon \delta_\alpha) \mid (\alpha_1 \delta_\beta) - (\varepsilon \delta_\alpha) \mid (\beta_1 \delta_\alpha) \\
&= \begin{vmatrix} \varepsilon \mid \alpha_1 & \delta_\alpha \mid \alpha_1 \\ \varepsilon \mid \delta_\beta & \delta_\alpha \mid \delta_\beta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varepsilon \mid \beta_1 & \delta_\alpha \mid \beta_1 \\ \varepsilon \mid \delta_\alpha & \delta_\alpha \mid \delta_\alpha \end{vmatrix} \\
&= (\varepsilon \mid \alpha_1)(\delta_\alpha \mid \delta_\beta) - (\varepsilon \mid \beta_1) \delta_\alpha^2.
\end{aligned}
$$

car δ_α et δ_β sont rectangulaires avec ε, de sorte que nous obtenons encore

$$
\mu = \frac{1}{\varepsilon \delta_\alpha \delta_\beta} \left\{ [(\varepsilon \mid \beta_1)(\delta_\alpha \mid \delta_\beta) - (\varepsilon \mid \alpha_1) \delta_\beta^2] \delta_\alpha + [(\varepsilon \mid \alpha_1)(\delta_\alpha \mid \delta_\beta) - (\varepsilon \mid \beta_1) \delta_\alpha^2] \delta_\beta \right\}
$$

Avec cette valeur de μ, l'équation de l'hodographe du système des déplacements peut maintenant s'écrire

$$
\begin{aligned}
\delta = \delta_1 &+ \left\{ m + \frac{p}{\varepsilon \delta_\alpha \delta_\beta} [(\varepsilon \mid \beta_1)(\delta_\alpha \mid \delta_\beta) - (\varepsilon \mid \alpha_1) \delta_\beta^2] \right\} \delta_\alpha \\
&+ \left\{ n + \frac{p}{\varepsilon \delta_\alpha \delta_\beta} [(\varepsilon \mid \alpha_1)(\delta_\alpha \mid \delta_\beta) - (\varepsilon \mid \beta_1) \delta_\alpha^2] \right\} \delta_\beta ,
\end{aligned}
$$

formule au moyen de laquelle le déplacement δ d'un point quelconque du système Σ est représenté comme somme de multiples de trois déplacements donnés.

Moyennant la valeur de ε, l'équation de l'hodographe, en forme d'un produit, nous conduit à l'importante relation

$$
(\delta - \delta_1) \mid \varepsilon = 0
$$

ou

$$
(\delta \mid \varepsilon) = (\delta_1 \mid \varepsilon).
$$

« Les projections des déplacements totaux des points du système Σ sur la direction du vecteur de position du plan de l'hodographe sont égales entre elles ».

§ 17. — Si les déplacements des points du système Σ sont infiniment petits, si $\delta_1 = d\rho_1$, alors les équations de l'hodographe du système des déplacements sont

$$
d\rho = d\rho_1 + m d\alpha + n d\beta + p[\alpha d\beta - \beta d\alpha]
$$

car $(d\alpha d\beta)$ peut ici être négligé vis-à-vis des autres quantités

comme infiniment petit d'ordre supérieur et si les déplacements sont infiniment petits en posant $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$, $\alpha_2 = \alpha + d\alpha$, $\beta_2 = \beta + d\beta$; de plus

$$d\rho = d\rho_1 + \left\{ m + \frac{p}{\varepsilon d\alpha d\beta} [(\varepsilon \mid \beta) (d\alpha \mid d\beta) - (\varepsilon \mid \alpha)(d\beta)^2] \right\} d\alpha$$

$$+ \left\{ n + \frac{p}{\varepsilon d\alpha d\beta} [(\varepsilon \mid \alpha) (d\alpha \mid d\beta) - (\varepsilon \mid \beta)(d\alpha)^2] \right\} d\beta :$$

$$(d\rho - d\rho_1) (d\alpha d\beta) = 0;$$

$$(d\rho - d\rho_1) \mid \varepsilon = 0, \quad d\rho \mid \varepsilon = d\rho_1 \mid \varepsilon, \quad \varepsilon = [\mid (d\alpha d\beta)] : \sqrt{(d\alpha d\beta)^2}.$$

Nous obtenons ainsi, pour vitesses des points du système Σ,

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + m(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) + n(\bar{v}_3 - \bar{v}_1) + p \mid [\alpha(\bar{v}_3 - \bar{v}_1) - \beta(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)] ;$$

$$(\bar{v} - \bar{v}_1) \mid \varepsilon = 0, \quad \varepsilon = \mid [(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)(\bar{v}_3 - \bar{v}_1)] : \sqrt{[(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)(\bar{v}_3 - \bar{v}_1)]^2},$$

et la formule donnant la vitesse $\bar{v}$, déduite de l'équation encore inutilisée des déplacements totaux infiniment petits, peut aussi être écrite directement.

Les dernières équations, en y prenant $\bar{v}$ comme radius vector, sont celles de l'hodographe des vitesses des points du système Σ, c'est un plan parallèle au plan de l'hodographe des déplacements.

§ 2. — Parmi les déplacements totaux des points du système Σ il en existe un qui est le plus petit il est égal à la perpendiculaire abaissée du pôle de l'hodographe, égal à la projection du déplacement total d'un point quelconque du système Σ sur la direction du vecteur ε.

Pour ce déplacement, que nous désignons par δ_0, existe la condition

$$\delta_0 = \delta_1 + m\delta_\alpha + n\delta_\beta + p \mid [\alpha_1\delta_\alpha - \beta_1\delta_\alpha + \delta_\alpha\delta_\beta]$$
$$= x \mid (\delta_\alpha\delta_\beta) = y\varepsilon = (\delta_1 \mid \varepsilon)\varepsilon.$$

Nous obtenons ainsi

$$\delta_1\delta_\alpha\delta_\beta = x(\delta_\alpha\delta_\beta)^2.$$

de sorte que

$$\delta_0 = \frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{(\delta_\alpha\delta_\beta)^2} \mid (\delta_\alpha\delta_\beta) = \frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{\sqrt{(\delta_\alpha\delta_\beta)^2}} \varepsilon.$$

En multipliant l'équation de condition par ε, on obtient

$$(\varepsilon\delta_1) + m(\varepsilon\delta_\alpha) + n(\varepsilon\delta_\beta) + p\varepsilon \mid [\alpha_1\delta_\beta - \beta_1\delta_\alpha] = 0.$$

si nous multiplions cette équation d'abord par δ_β, ensuite par δ_α, il vient

$$(\delta_\beta\varepsilon\delta_1) + m(\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta) + p(\delta_\beta\varepsilon)\,|\,[\alpha_1\delta_\beta - \beta_1\delta_\alpha] = 0,$$
$$(\delta_\alpha\varepsilon\delta_1) + n(\delta_\alpha\varepsilon\delta_\beta) + p(\delta_\alpha\varepsilon)\,|\,[\alpha_1\delta_\beta - \beta_1\delta_\alpha] = 0,$$

d'où

$$m = \frac{\varepsilon\delta_3\delta_1}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta} + p\,\frac{(\varepsilon\delta_\beta)\,|\,[\alpha_1\delta_\beta - \beta_1\delta_\alpha]}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta},$$
$$n = \frac{\varepsilon\delta_1\delta_2}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta} - p\,\frac{(\varepsilon\delta_\alpha)\,|\,[\alpha_1\delta_\beta - \beta_1\delta_\alpha]}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta}.$$

Si nous substituons ces valeurs de m et de n dans l'équation qui donne δ en fonction des déplacements donnés, nous obtenons

$$\delta_0 = \delta_1 + \frac{\varepsilon\delta_3\delta_1}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta}\,\delta_\alpha + \frac{\varepsilon\delta_1\delta_2}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta}\,\delta_\beta,$$

ou

$$\delta_0 = \frac{1}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta}\left\{(\varepsilon\delta_2\delta_3)\delta_1 + (\varepsilon\delta_3\delta_1)\delta_2 + (\varepsilon\delta_1\delta_2)\delta_3\right\},$$

équation par laquelle le déplacement minimum est déterminé en fonction des trois déplacements donnés.

§ 2'. — Si les déplacements totaux des points du système Σ sont infiniment petits, le déplacement minimum est évidemment

$$d\rho_0 = \frac{d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3}{\sqrt{(d\alpha\, d\beta)^2}}\,\varepsilon,$$

ou encore

$$d\rho_0 = \frac{1}{\varepsilon\, d\alpha\, d\beta}\left\{(\varepsilon\, d\rho_2 d\rho_3)d\rho_1 + (\varepsilon\, d\rho_3\, d\rho_1)d\rho_2 + (\varepsilon\, d\rho_1\, d\rho_2)d\rho_3\right\},$$

de sorte que la plus petite vitesse est

$$\bar{v}_0 = \frac{\bar{v}_1\bar{v}_2\bar{v}_3}{\sqrt{[(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)(\bar{v}_3 - \bar{v}_1)]^2}}\,\varepsilon,$$

ou

$$\bar{v}_0 = \frac{1}{\varepsilon(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)(\bar{v}_3 - \bar{v}_1)}\left\{(\varepsilon\bar{v}_2\bar{v}_3)\bar{v}_1 + (\varepsilon\bar{v}_3\bar{v}_1)\bar{v}_2 + (\varepsilon\bar{v}_1\bar{v}_2)\bar{v}_3\right\}.$$

§ 3. — Il s'agit maintenant de déterminer à quels points du système correspond le déplacement δ_0.

L'équation des radii vectores des points auxquels appartient le moindre déplacement s'obtiendra en substituant dans l'équa-

tion des radii vectores des points du système ponctuel Σ les valeurs de m et n trouvées dans le § 2, ce qui donne, en désignant par ρ_s le radius vector de ce lieu.

$$\rho_s = \rho_1 + \frac{1}{\varepsilon\partial_\alpha\partial_\beta}\left\{(\varepsilon\partial_3\partial_1)\alpha_1 + (\varepsilon\partial_1\partial_2)\beta_1\right\}$$
$$+ \frac{p}{\varepsilon\partial_\alpha\partial_\beta}\left\{[(\varepsilon\partial_\beta)\,|\,(\alpha_1\partial_\beta - \beta_1\partial_\alpha)]\alpha_1 + [(\partial_\alpha\varepsilon)\,|\,(\alpha_1\partial_\beta - \beta_1\partial_\alpha)]\beta_1 + (\varepsilon\partial_\alpha\partial_\beta)\,|\,(\alpha_1\beta_1)\right\}.$$

Ce lieu est donc une ligne droite, qui est parallèle au vecteur

$$v = [(\varepsilon\partial_\beta)\,|\,(\alpha_1\partial_\beta - \beta_1\partial_\alpha)]\alpha_1 + [(\partial_\alpha\varepsilon)\,|\,(\alpha_1\partial_\beta - \beta_1\partial_\alpha)]\beta_1 + (\varepsilon\partial_\alpha\partial_\beta)\,|\,(\alpha_1\beta_1).$$

Si a désigne l'angle que cette droite fait avec la direction du vecteur de position ε du plan de l'hodographe, on a

$$\operatorname{tang} a = \sqrt{(\varepsilon v)^2} : (\varepsilon\,|\,v).$$

Quand nous usons d'abréviations, nous pouvons écrire

$$v = a\alpha_1 + b\beta_1 + c\,|\,(\alpha_1\beta_1),$$

d'où nous obtenons

$$(\varepsilon v) = a(\varepsilon\alpha_1) + b(\varepsilon\beta_1) + c[\varepsilon\,|\,(\alpha_1\beta_1)].$$

On a donc aussi

$$|\,(\varepsilon v) \equiv a[(\partial_\alpha\partial_\beta)\,|\,\alpha_1] + b[(\partial_\alpha\partial_\beta)\,|\,\beta_1] + c[(\partial_\alpha\partial_\beta)\,(\alpha_1\beta_1)],$$
$$|\,(\varepsilon v) \equiv a[(\partial_\alpha\,|\,\alpha_1)\,\partial_\beta - (\partial_\beta\,|\,\alpha_1)\partial_\alpha] + b[(\partial_\alpha\,|\,\beta_1)\partial_\beta - (\partial_\beta\,|\,\beta_1)\partial_\alpha]$$
$$+ c[(\partial_\alpha\alpha_1\beta_1)\partial_\beta - (\partial_\beta\alpha_1\beta_1)\partial_\alpha],$$
$$|\,(\varepsilon v) \equiv [a(\partial_\alpha\,|\,\alpha_1) + b(\partial_\alpha\,|\,\beta_1) + c(\partial_\alpha\alpha_1\beta_1)]\partial_\beta$$
$$- [a(\partial_\beta\,|\,\alpha_1) + b(\partial_\beta\,|\,\beta_1) + c(\partial_\beta\alpha_1\beta_1)]\partial_\alpha,$$

ou en abrégé

$$|\,(\varepsilon v) \equiv r\partial_\beta + s\partial_\alpha.$$

Mais nous avons

$$a = (\varepsilon\,|\,\alpha_1)\partial_\beta^2 - (\varepsilon\,|\,\beta_1)(\partial_\alpha\,|\,\partial_\beta), \quad b = (\varepsilon\,|\,\beta_1)\partial_\alpha^2 - (\varepsilon\,|\,\alpha_1)(\partial_\alpha\,|\,\partial_\beta),$$
$$c(\partial_\alpha\alpha_1\beta_1) = (\varepsilon\partial_\alpha\partial_\beta)\,(\partial_\alpha\alpha_1\beta_1)$$
$$= \begin{vmatrix} \varepsilon\,|\,\partial_\alpha & \partial_\alpha\,|\,\partial_\alpha & \partial_\beta\,|\,\partial_\alpha \\ \varepsilon\,|\,\alpha_1 & \partial_\alpha\,|\,\alpha_1 & \partial_\beta\,|\,\alpha_1 \\ \varepsilon\,|\,\beta_1 & \partial_\alpha\,|\,\beta_1 & \partial_\beta\,|\,\beta_1 \end{vmatrix},$$
$$c(\partial_\alpha\alpha_1\beta_1) = \partial_\alpha^2(\alpha_1\,|\,\partial_\beta)(\varepsilon\,|\,\beta_1) + (\varepsilon\,|\,\alpha_1)(\partial_\alpha\,|\,\partial_\beta)(\partial_\alpha\,|\,\beta_1)$$
$$- (\varepsilon\,|\,\beta_1)(\alpha_1\,|\,\partial_\alpha)(\partial_\alpha\,|\,\partial_\beta) - (\varepsilon\,|\,\alpha_1)(\beta_1\,|\,\partial_\beta)\partial_\alpha^2;$$
$$c(\partial_\beta\alpha_1\beta_1) = (\varepsilon\partial_\alpha\partial_\beta)\,(\partial_\beta\alpha_1\beta_1)$$
$$= \begin{vmatrix} \varepsilon\,|\,\partial_\beta & \partial_\alpha\,|\,\partial_\beta & \partial_\beta\,|\,\partial_\beta \\ \varepsilon\,|\,\alpha_1 & \partial_\alpha\,|\,\alpha_1 & \partial_\beta\,|\,\alpha_1 \\ \varepsilon\,|\,\beta_1 & \partial_\alpha\,|\,\beta_1 & \partial_\beta\,|\,\beta_1 \end{vmatrix},$$
$$c(\partial_\beta\alpha_1\beta_1) = (\varepsilon\,|\,\beta_1)(\alpha_1\,|\,\partial_\beta)(\partial_\alpha\,|\,\partial_\beta) + (\varepsilon\,|\,\alpha_1)(\beta_1\,|\,\partial_\alpha)\partial_\beta^2$$
$$- (\varepsilon\,|\,\beta_1)(\alpha_1\,|\,\partial_\alpha)\partial_\beta^2 - (\varepsilon\,|\,\alpha_1)(\beta_1\,|\,\partial_\beta)(\partial_\alpha\,|\,\partial_\beta):$$

et c'est pourquoi

$$r = \{ (\varepsilon|\alpha_1)\partial_\beta^2 - (\varepsilon|\beta_1)(\partial_\alpha|\partial_\beta) \} (\alpha_1|\partial_\alpha) + \{ (\varepsilon|\beta_1)\partial_\alpha^2 - (\varepsilon|\alpha_1)(\partial_\alpha|\partial_\beta) \} (\beta_1|\partial_\alpha)$$
$$+ (\varepsilon|\beta_1)(\alpha_1|\partial_\beta)\partial_\alpha^2 + (\varepsilon|\alpha_1)(\beta_1|\partial_\alpha)(\partial_\alpha|\partial_\beta) - (\varepsilon|\beta_1)(\alpha_1|\partial_\alpha)(\partial_\alpha|\partial_\beta)$$
$$- (\varepsilon|\alpha_1)(\beta_1|\partial_\beta)\partial_\alpha^2.$$

$$r = \{ (\varepsilon|\alpha_1)(\alpha_1|\partial_\alpha)\partial_\beta^2 - (\varepsilon|\alpha_1)(\beta_1|\partial_\beta)\partial_\alpha^2 \} + (\varepsilon|\beta_1)\partial_\alpha^2(\beta_1|\partial_\alpha - \alpha_1|\partial_\beta)$$
$$- 2(\varepsilon|\beta_1)(\alpha_1|\partial_\alpha)(\partial_\alpha|\partial_\beta).$$

$$r = (\varepsilon|\beta_1)\partial_\alpha^2 \{ \beta_1|\partial_\alpha + \alpha_1|\partial_\beta \} - 2(\varepsilon|\beta_1)(\alpha_1|\partial_\alpha)(\partial_\alpha|\partial_\beta).$$

$$r = (\varepsilon|\beta_1)\partial_\alpha^2 \{ \beta_1|\partial_\alpha + \alpha_2|\partial_\beta - \partial_\alpha|\partial_\beta \} - 2(\varepsilon|\beta_1)(\alpha_1|\partial_\alpha)(\partial_\alpha|\partial_\beta),$$

$$r = -(\varepsilon|\beta_1)(\partial_\alpha|\partial_\beta)[(\alpha_2 - \alpha_1)|\partial_\alpha] - 2(\varepsilon|\beta_1)(\alpha_1|\partial_\alpha)(\partial_\alpha|\partial_\beta).$$

$$r = -(\varepsilon|\beta_1)(\partial_\alpha|\partial_\beta) \{ \alpha_2|\partial_\alpha + \alpha_1|\partial_\alpha \},$$

$$r = -(\varepsilon|\beta_1)(\partial_\alpha|\partial_\beta) \{ (\alpha_1 + \alpha_2)|\partial_\alpha \}.$$

$$r = 0;$$

de plus nous obtenons

$$-s = \{ (\varepsilon|\alpha_1)\partial_\beta^2 - (\varepsilon|\beta_1)(\partial_\alpha|\partial_\beta) \} (\alpha_1|\partial_\beta) + \{ (\varepsilon|\beta_1)\partial_\alpha^2 - (\varepsilon|\alpha_1)(\partial_\alpha|\partial_\beta) \} (\beta_1|\partial_\beta)$$
$$+ (\varepsilon|\beta_1)(\alpha_1|\partial_\beta)(\partial_\alpha|\partial_\beta) + (\varepsilon|\alpha_1)(\beta_1|\partial_\alpha)\partial_\beta^2 - (\varepsilon|\beta_1)(\alpha_1|\partial_\alpha)\partial_\beta^2$$
$$- (\varepsilon|\alpha_1)(\beta_1|\partial_\beta)(\partial_\alpha|\partial_\beta),$$

le second membre de cette équation peut être traité exactement de la même manière que le second membre de l'équation en r, ce qui donne

$$s = 0.$$

Nous obtenons ainsi

$$|(\varepsilon\nu) = 0. \qquad (\varepsilon\nu) = 0.$$

c'est-à-dire que le lieu des points dont le déplacement est ∂_α est une ligne droite parallèle à ce déplacement ainsi qu'au vecteur déterminant la position du plan de l'hodographe.

Pour $p = 0$, le radius vector de cette droite est égal à

$$\rho_1 + \frac{1}{\varepsilon\partial_\alpha\partial_\beta} \{ (\varepsilon\partial_\beta\partial_1)\alpha_1 + (\varepsilon\partial_1\partial_2)\beta_1 \}.$$

de sorte que l'équation du radius vector du lieu en question s'écrit dans la forme la plus simple

$$\rho_x = \rho_1 + \frac{1}{\varepsilon\partial_\alpha\partial_\beta} \{ (\varepsilon\partial_\beta\partial_1)\alpha_1 + (\varepsilon\partial_1\partial_2)\beta_1 \} + m$$

Dans le changement de position du système Σ, cette ligne,

envisagée comme appartenant à ce système, se déplace sur elle-même, chacun de ses points subissant le déplacement δ_0. Deux droites homologues de Σ_1 et Σ_2 coïncident avec cette droite considérée comme ligne de l'espace absolu, elles constituent ainsi une ligne double de Σ_1 et Σ_2 sans points doubles, et lorsque $\delta_0 = 0$ une ligne de points doubles.

« Lorsque le système Σ passe de la position Σ_1 à la position Σ_2, Σ_1 et Σ_2 ont toujours une ligne double, qui n'a généralement pas de points doubles, les points de Σ situés sur cette droite subissent le plus petit déplacement qui est possible dans le changement de position de Σ ».

§ 3'. — Si les déplacements des points de Σ sont infiniment petits, l'équation du lieu des points de déplacement minimum est évidemment

$$\rho_s = \rho_1 + \frac{1}{\varepsilon d\alpha d\beta}\left\{(\varepsilon d\rho_3 d\rho_1)\alpha + (\varepsilon d\rho_1 d\rho_2)\beta\right\} + u\varepsilon$$

ou encore

$$\rho_s = \rho_1 + \frac{1}{\varepsilon(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)(\bar{v}_3 - \bar{v}_1)}\left\{(\varepsilon\bar{v}_3\bar{v}_1)\alpha + (\varepsilon\bar{v}_1\bar{v}_2)\beta\right\} + u\varepsilon.$$

§ 4. — Vraisemblablement, les déplacements des points des droites du système Σ qui sont parallèles à la ligne double de Σ_1 et Σ_2, présentent des propriétés particulières.

L'équation d'une telle droite, parallèle à ε, s'écrit

$$\rho = \rho_1 + m_1\alpha_1 + n_1\beta_1 + u\varepsilon.$$

mais on a $\varepsilon \equiv (\delta_\alpha\delta_\beta)$, δ_α et δ_β sont des quantités invariables, donc $\delta\varepsilon = 0$, de sorte que

$$\delta = \delta_1 + m_1\delta_\alpha + n_1\delta_\beta;$$

comme le second membre de cette équation est une quantité constante, les déplacements des points de cette droite sont égaux entre eux.

« Les déplacements des points d'une droite du système Σ, parallèle au vecteur déterminant la position du plan de l'hodographe, de son système des déplacements (parallèle à la ligne double de Σ_1 et Σ_2) sont égaux entre eux et en général également inclinés sur cette droite ».

Cherchons, s'il existe des droites du système Σ qui soient parallèles au vecteur déterminant la position du plan de l'hodographe et dont les points soient déplacés parallèlement à ce vecteur.

L'équation d'une telle droite est

$$\rho = \rho_1 + m\alpha_1 + n\beta_1 + u\varepsilon,$$

le déplacement de ses points doit être donné par l'équation

$$\delta = \delta_1 + m\delta\alpha + n\delta_\beta = x\varepsilon$$

d'où résulte

$$\varepsilon\delta_\beta\delta_1 + m(\varepsilon\delta_\beta\delta_\alpha) = 0, \qquad \varepsilon\delta_\alpha\delta_1 + n(\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta) = 0.$$

Ces équations donnent pour m et n des valeurs réelles, qui n'ont qu'une seule signification, en les portant dans les équations donnant ρ et δ, nous obtenons

$$\rho = \rho_1 + \frac{1}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta} \left\{ (\varepsilon\delta_3\delta_1)\alpha_1 + (\varepsilon\delta_1\delta_2)\beta_1 \right\} + u\varepsilon,$$

$$\delta = \delta_1 + \frac{1}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta} \left\{ (\varepsilon\delta_3\delta_1)\delta_\alpha + (\varepsilon\delta_1\delta_2)\delta_\beta \right\} = \delta_0.$$

Il n'y a donc qu'une telle droite, les déplacements de ses points sont égaux au déplacement minimum possible, et cette droite coïncide avec la ligne double de Σ_1 et Σ_2.

Nous sommes ainsi parvenus indirectement à l'équation de la ligne double de Σ_1 et Σ_2 sans nous être engagés dans un calcul plus long que pour la détermination de sa direction.

« Les points d'une droite $\bar{\mu}$ de Σ parallèle à la ligne double $\bar{\mu}^0$ de Σ_1 et Σ_2 subissent le même déplacement, la projection de ce déplacement sur la direction de la droite est égale au déplacement δ_0, lorsque Σ passe de la position Σ_1 à la position Σ_2. Si nous déterminons dans le système Σ des sections planes, normales à $\bar{\mu}_0$ c'est-à-dire à ε, ces sections planes constituent des systèmes partiels congruents de Σ, les points correspondants de ces sections c'est-à-dire les points situés sur la même droite $\bar{\mu}$, ont le même déplacement ; il en résulte que les déplacements de ses sections planes, lorsque Σ passe de la position Σ_1 à la position Σ_2, sont égaux entre eux ».

§ 4'. — Lorsque les déplacements des points de Σ sont infiniment petits, le déplacement des points d'une droite $\overline{\mu}$ est

$$d\rho = d\rho_1 + m_1 d\alpha + n_1 d\beta.$$

leur vitesse

$$\overline{v} = \overline{v}_1 + m_1 (\overline{v}_2 - \overline{v}_1) + n_1 (\overline{v}_3 - \overline{v}_1),$$

et l'équation de la droite du système Σ ayant le déplacement $d\rho_0$ est la même qu'au § 3'.

§ 5. — Nous allons maintenant nous appliquer à la recherche des mouvements simples, par lesquels le système invariable Σ peut parvenir d'une position donnée Σ_1 à une autre position Σ_2 et à la détermination la plus simple de ces mouvements. Pour cela partons des cas spéciaux, que nous résoudrons directement. Le cas où l'on a $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$, ne donne lieu à aucune considération, puisque l'on a alors $\delta = 0$, le système Σ n'a alors aucun déplacement.

Soit premièrement $\delta_1 = \delta_2 = 0$, de sorte que les points A et B de Σ ne soient pas déplacés.

Alors $A_1 = A_2$ et $B_1 = B_2$ sont des points doubles de Σ_1 et Σ_2 la droite $A_1B_1 = A_2B_2$ est une ligne double de Σ_1 et Σ_2 n'ayant que des points doubles.

L'equation de l'hodographe des déplacements des points de Σ est maintenant

$$\delta = n\,\delta_3 + p \mid (\alpha_1 \delta_3).$$

Pour d'autres points qui n'auraient pas de déplacements on a la condition

$$\delta = n\delta_3 + p \mid (\alpha_1 \delta_3) = 0,$$

d'où il résulte, δ_3 et $\mid (\alpha_1 \delta_3)$ étant des vecteurs non parallèles,

$$n = 0, \qquad p = 0.$$

valeurs qui, substituées dans l'équation du système ponctuel Σ, donnent

$$\rho = \rho_1 + m\alpha_1.$$

qui est l'équation de la ligne double de Σ_1 et Σ_2, laquelle aurait pu être écrite directement en raison de $A_1 = A_2$ et $B_1 = B_2$. Il n'existe pas d'autres points sans déplacement.

Comme l'on a, dans le cas général

$$\alpha_1 | \delta_\beta + \beta_2 | \delta_\alpha = 0.$$

on a maintenant

$$\alpha_1 | \delta_3 = 0.$$

d'où on déduit, en multipliant par α_1 l'équation de l'hodographe,

$$\alpha_1 | \delta = 0.$$

de sorte que les déplacements des points de Σ sont rectangulaires avec la ligne double.

Pour le déplacement minimum on a

$$\delta_0 = (\delta_1 | \varepsilon) \varepsilon = 0, \qquad \varepsilon = (\alpha_1 : \sqrt{\alpha_1^2}).$$

mais, si l'on a $\delta = 0$, on a $n = p = 0$ et il en résulte que le lieu des points sans déplacement est la droite $AB = A_1B_1$ du système Σ.

L'équation d'une droite du système, dans Σ_1, parallèle à α_1 s'écrit

$$\rho = \rho_1 + c_1 \alpha_1 + c_2 \beta_1 + u \alpha_1.$$

les déplacements des points de cette ligne sont

$$\delta = (c_1 + c_2) \delta_3 ;$$

ils sont égaux entre eux.

« S'il existe deux points du système Σ sans deplacement, la droite qui réunit ces points est sans déplacement. Les déplacements de tous les points du système sont normaux à cette ligne et directement proportionnels aux distances des points à la droite sans déplacement. Les déplacements des points qui appartiennent à une droite parallèle au lieu des points sans déplacement sont égaux entre eux ».

Comme $A_1B_1 = A_2B_2$ est une ligne double de Σ_1 et Σ_2 n'ayant que des points doubles, les points homologues de Σ_1 et Σ_2 sont également eloignés de chaque élément de cette ligne. Il en résulte, en tenant compte de la proposition précédente, que le système passe de la position Σ_1 à la position Σ_2 de la manière la plus simple par une rotation autour de la double ligne, l'ampli-

tude de la rotation étant égale à l'angle de deux plans homologues de Σ_1 et Σ_2 se coupant sur la double ligne, ou encore égale à l'angle des perpendiculaires abaissées des points C_1 et C_2 sur la double ligne, où elles se rencontrent d'ailleurs.

Pour le déplacement du point C. nous obtenons ainsi

$$\beta_2 = (\varepsilon|\beta_1)\varepsilon + \cos w(\varepsilon\beta_1)|\varepsilon + \sin w|(\varepsilon\beta_1).$$
$$\delta_3 = \beta_2 - \beta_1 = (1 - \cos w)[(\beta_1|\varepsilon)\varepsilon - \beta_1] + \sin w|(\varepsilon\beta_1).$$

Si nous posons

$$\beta_1 = b\varepsilon + \chi_1', \quad \beta_2 = b\varepsilon + \chi_2', \quad \varepsilon|\chi_1' = \varepsilon|\chi_2' = 0, \quad \chi_1'^2 = \chi_2'^2 = h_1'^2,$$

il vient

$$\chi_2' = \cos w\chi_1' + \sin w|(\varepsilon\chi_1'),$$
$$\delta_3 = (\cos w - 1)\chi_1' + \sin w|(\varepsilon\chi_1'),$$
$$2\sin\frac{1}{2}w = (\sqrt{\delta_3^2} : h_1').$$

Nous obtenons maintenant pour un point quelconque U du système Σ, si χ_1 et χ_2 désignent les distances normales des points U_1 et U_2 à l'axe de rotation,

$$\chi_2 = \cos w\chi_1 + \sin w|(\varepsilon\chi_1).$$
$$\delta = \chi_2 - \chi_1 = (\cos w - 1)\chi_1 + \sin w|(\varepsilon\chi_1),$$

valeurs, par lesquelles le mouvement du système Σ est pleinement déterminé. Chaque point de Σ décrit, dans le passage de la position Σ_1 à la position Σ_2 par rotation autour de la ligne double de Σ_1 et Σ_2, un arc de cercle dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, dont le centre est situé sur cet axe.

« Lorsqu'un système invariable Σ possède deux points sans déplacement, il a également une droite sans déplacement, savoir celle qui réunit les deux points ; le système Σ parvient de la position Σ_1 à la position Σ_2 de la manière la plus simple par une rotation autour de cette ligne comme axe, en prenant l'amplitude de la rotation égale à l'angle de deux plans homologues quelconques de Σ_1 et Σ_2 ».

§ 5'. — Si les déplacements des points de Σ sont infiniment petits, l'équation de l'hodographe des déplacements des points du système Σ est, en conséquence du § 5, si $d\rho_1 = 0$, $d\rho_2 = 0$,

$$d\rho = u\,d\rho_3 + p|(\alpha\,d\rho_3),$$

et, par suite, les vitesses de ses points sont

$$\bar{v} = n\bar{v}_3 + p|(\alpha\bar{v}_3):$$

le lieu des points sans déplacement, c'est-à-dire sans vitesse, est donné par

$$\rho = \rho_1 + m\alpha.$$

L'angle de la rotation autour de la ligne double de Σ_1 et Σ_2 est

$$d\omega = \left(\sqrt{d\rho_3^2} : h_1'\right) = \left(ds_3 : h_1'\right),$$

et la vitesse angulaire du système Σ est alors

$$w = \left(v_3 : h_1'\right).$$

Pour un point quelconque U du système Σ nous avons

$$\chi_2 = \chi_1 + d\omega|(\varepsilon\chi_1),$$
$$d\rho = d\omega|(\varepsilon\chi_1), \quad \bar{v} = w|(\varepsilon\chi_1).$$

§ 6. — Nous considérons maintenant le cas où l'on a $\bar{\delta}_1 = 0$, $\bar{\delta}_2 = \bar{\delta}_3$.

Alors le point A de Σ est sans déplacement, $A_1 = A_2$ est un point double de Σ_1 et Σ_2, et les déplacements des points B et C sont égaux entre eux.

L'équation de l'hodographe des déplacements des points de Σ s'écrit

$$\bar{\delta} = (m+n)\bar{\delta}_2 + p|[(\alpha_1 - \beta_1)\bar{\delta}_2].$$

Pour le lieu des autres points pour lesquels on pouvait avoir $\bar{\delta} = 0$, on doit avoir

$$m + n = 0, \qquad p = 0,$$

d'où il résulte, en vertu de l'équation du système ponctuel $\Sigma = \Sigma_1$,

$$\rho = \rho_1 + m(\alpha_1 - \beta_1).$$

Donc le lieu des points sans déplacement est une droite passant par le point $A_1 = A_2 = A$ et parallèle à la droite joignant les points B_1 et C_1 ; c'est une ligne double de Σ_1 et Σ_2 composée uniquement de points doubles.

Les déplacements des points B et C étant égaux, les déplace-

ments des points de la droite AB sont à cause de cela égaux entre eux. Donc la double-ligne de Σ_1 et Σ_2 est parallèle à la droite B_1C_1 et le déplacement du point A étant égal à zéro, elle passe par le point $A_1 = A_2$ et est entièrement composée de points doubles, comme celà résulte directement de son équation.

D'une manière générale, on a

$$(\alpha_1|\delta_\alpha)\delta_{\beta_2}^2 - (\beta_1|\delta_\beta)\delta_{\alpha_2}^2 = 0,$$

d'où il résulte, pour notre cas spécial,

$$(\alpha_1 - \beta_1)|\delta_2 = 0,$$

qui donne, avec l'équation de l'hodographe,

$$(\alpha_1 - \beta_1)|\delta = 0,$$

c'est-à-dire que les déplacements de points de Σ sont normaux à la ligne double de Σ_1 et Σ_2.

L'équation d'une ligne droite de Σ_1 parallèle au vecteur $(\alpha_1 - \beta_1)$ peut être écrite

$$\rho = \rho_1 + m_1\alpha_1 + n_1\beta_1 + p_1|(\alpha_1\beta_1) + u(\alpha_1 - \beta_1).$$

d'où nous obtenons, pour les déplacements des points de cette ligne,

$$\delta = (m_1 + n_1)\delta_2 + p_1|[(\alpha_1 - \beta_1)\delta_2],$$

de sorte que les déplacements des points d'une telle droite sont égaux entre eux.

« Lorsque le système Σ possède un point sans déplacement et que les déplacements de deux autres points du système sont égaux, il présente une droite sans déplacement, qui passe par le premier point et est parallèle au vecteur déterminé par les deux autres points. Les déplacements des points d'une droite du système parallèle à la ligne sans déplacement sont égaux entre eux. Les déplacements de tous les points de Σ sont normaux à la droite fixe du système et sont, en grandeur, directement proportionnels aux distances des points à la droite fixe. »

Si nous remplaçons la ligne double du cas déjà traité par la ligne double actuelle des systèmes Σ_1 et Σ_2, nous reconnaissons que le système Σ peut être transporté de la manière la plus simple

de la position Σ_1 à la position Σ_2 par une rotation autour de cette ligne, mouvement pour lequel sont valables, avec

$$\varepsilon = (\alpha_1 - \beta_1) : \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2},$$

les formules correspondantes du § 5, l'amplitude de la rotation doit être déterminée par l'équation

$$2 \sin \frac{1}{2} w = (\sqrt{\delta_2^2} : h_1).$$

§ 6'. — Si les déplacements des points de Σ sont infiniment petits, et si $d\rho_1 = 0$, $d\rho_2 = d\rho_3$, l'équation de l'hodographe du système des déplacements est

$$d\rho = (m + n) d\rho_2 + p \,[(\alpha - \beta) d\rho_2].$$

et, par suite, l'équation de l'hodographe du système des vitesses de Σ est

$$\bar{v} = (m + n) \bar{v}_2 + p [(\alpha - \beta) \bar{v}_2],$$

le lieu des points sans déplacement, c'est-à-dire sans vitesse, est donné par

$$\rho = \rho_1 + m(\alpha - \beta) ;$$

on a encore

$$(\alpha - \beta) \,d\rho = 0, \qquad (\alpha - \beta) \,\bar{v} = 0,$$
$$dw = (\sqrt{d\rho_2^2} : h_1) = (ds_2 : h_1'), \quad w = (v_2 : h_1).$$

§ 7. — Supposons que le déplacement du système invariable Σ soit tel, que l'on ait seulement $\delta_1 = 0$.

Alors les systèmes Σ_1 et Σ_2 possèdent un point double $A_1 = A_2$, qui est donné.

L'équation de l'hodographe des déplacements des points de Σ s'écrit maintenant

$$\delta = m\delta_2 + n\delta_3 + p\,(\alpha_1\delta_3 - \beta_1\delta_2 + \delta_2\delta_3)$$

ou

$$\delta = \left\{ m + p \frac{(\delta_3 \varepsilon)\,[(\alpha_1\delta_3 - \beta_1\delta_2)]}{\varepsilon\delta_2\delta_3} \right\} \delta_2 + \left\{ n + p \frac{(\varepsilon\delta_2)\,[(\alpha_1\delta_3 - \beta_1\delta_2)]}{\varepsilon\delta_2\delta_3} \right\} \delta_3.$$

Pour le plus petit déplacement nous obtenons

$$\delta_0 = 0,$$

les points du sytème ayant ce déplacement sont situés sur la droite

$$\rho_s = \rho_1 + u\varepsilon, \quad \varepsilon = [\,|\,\delta_2\delta_3\,] : \sqrt{(\delta_2\delta_3)^2}.$$

équation que l'on obtient en faisant $\delta_1 = 0$ dans l'équation de la ligne double, qui a été développée dans le § 3, cette ligne passe par le point double $A_1 = A_2$ de Σ_1 et Σ_2 ; c'est aussi l'équation de la ligne double qui est composée uniquement de points doubles.

On a maintenant

$$\delta \,|\, \varepsilon = \delta_1 \,|\, \varepsilon = 0.$$

L'équation d'une droite quelconque de $\Sigma = \Sigma_1$ parallèle au vecteur ε qui détermine la position du plan de l'hodographe du système des déplacements peut être écrite

$$\rho = \rho_1 + m_1\alpha_1 + n_1\beta_1 + u\varepsilon,$$

il en résulte, pour les déplacements de ses points,

$$\delta = m_1\delta_2 + n_1\delta_3\,;$$

ils son égaux entre eux.

« Lorsqu'un point du système invariable Σ reste en repos dans le passage de ce système de la position Σ_1 à la position Σ_2, celui-ci possède toujours une droite en repos, elle passe par le point fixe donné, est perpendiculaire au plan de l'hodographe du système des déplacements des points de Σ, plan qui passe par le pôle de l'hodographe, avec chaque point de cette ligne coïncide une paire de points homologues de Σ_1 et Σ_2, elle coïncide avec la ligne double de Σ_1 et Σ_2 composée uniquement de points doubles. Les déplacements des points de Σ sont normaux à cette ligne, aucun point de Σ ne se déplace dans sa direction, les déplacements des points sont, quand à leurs grandeurs, directement proportionnels aux distances de points à cette ligne. Les points homologues de Σ_1 et Σ_2 sont à égale distance de la ligne double. »

Le système Σ peut donc être transporté de la position Σ_1 à la position Σ_2 par une rotation autour de la ligne double de Σ_1 et Σ_2.

Les distances en grandeur de deux points quelconques homologues de Σ_1 et Σ_2 à un point quelconque de la ligne double sont égales entr'elles puisque l'on a $\Sigma_1 \backsim \Sigma_2$. Les projections de

Σ_1 et Σ_2 sur un plan perpendiculaire à leur ligne double forment deux systèmes plans congruents ayant un point double à l'intersection du plan et de la ligne double. Chaque plan perpendiculaire à la ligne double de Σ_1 et Σ_2 coupe ces systèmes en des systèmes plans Σ'_1 et Σ'_2 congruents, dont le point double coïncide avec le point d'intersection de ce plan et de la ligne double ; les systèmes Σ'_1 et aussi les systèmes Σ'_2 dans des plans perpendiculaires à la ligne double sont congruents entr'eux. Le déplacement d'un point du système $\Sigma = \Sigma_1$ est égal au déplacement de sa projection sur un plan perpendiculaire à la ligne double. Lorsque Σ passe de la position Σ_1 à la position Σ_2, Σ' va de la position Σ'_1 à la position Σ'_2, ce qui a lieu de la manière la plus simple par rotation autour du point double de Σ'_1 et Σ'_2 situé sur la ligne double. Si ce passage s'exécute en une section plane, il s'exécute aussi dans toutes sections planes et, par suite, le système Σ passe de la manière la plus simple de la position Σ_1 à la position Σ_2 par sa rotation autour de la ligne double de Σ_1 et Σ_2.

La grandeur de l'angle de la rotation résulte directement, en maintenant les relations déjà posées et en considérant les déplacements des points B et C, de la formule

$$2 \sin \frac{1}{2} w = \frac{\sqrt{\delta_2^2}}{h_1} = \frac{\sqrt{\delta_3^2}}{h''_1} \cdot$$

« Le mouvement d'un système invariable Σ qui possède un point fixe en passant, d'une manière quelconque d'une position Σ_1 à une autre position Σ_2, est équivalent à une rotation autour de l'axe passant par ce point et perpendiculaire au plan de l'hodographe de son système des déplacements, et c'est la manière la plus simple de réaliser son déplacement. »

§ 7'. — Si les déplacements des points du système Σ sont infiniments petits et que l'on ait $d\rho_1 = 0$, le point A étant ainsi en repos, l'équation de l'hodographe du système des déplacements est

$$d\rho = m d\rho_2 + n d\rho_3 + p(\alpha d\rho_3 - \beta d\rho_2),$$

ou encore

$$d\rho = \left\{ m - p \frac{(\varepsilon|\alpha) d\rho_3^2 - (\varepsilon|\beta)(d\rho_2|d\rho_3)}{\varepsilon d\rho_2 d\rho_3} \right\} d\rho_2$$
$$+ \left\{ n + p \frac{(\varepsilon|\alpha)(d\rho_2|d\rho_3) - (\varepsilon|\beta) d\rho_2^2}{\varepsilon d\rho_2 d\rho_3} \right\} d\rho_3.$$

Les équations de l'hodographe de son système des vitesses sont donc

$$\bar{v} = m\bar{v}_2 + n\bar{v}_3 + p|[\alpha\bar{v}_3 - \beta\bar{v}_2],$$

$$\bar{v} = \left\{ m - p\,\frac{(\varepsilon|\alpha)\bar{v}_3^2 - (\varepsilon|\beta)(\bar{v}_2|\bar{v}_3)}{\varepsilon\bar{v}_2\bar{v}_3} \right\}\bar{v}_2 + \left\{ n + p\,\frac{(\varepsilon|\alpha)(\bar{v}_2|\bar{v}_3) - (\varepsilon|\beta)\bar{v}_2^2}{\varepsilon\bar{v}_2\bar{v}_3} \right\}\bar{v}_3.$$

On a maintenant $d\rho_0 = 0$, $\bar{v}_0 = 0$, et

$$\rho_0 = \rho_1 + u\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{|(d\rho_2 d\rho_3)}{\sqrt{(d\rho_2 d\rho_3)^2}} = \frac{|(\bar{v}_2\bar{v}_3)}{\sqrt{(\bar{v}_2\bar{v}_3)^2}},$$

est l'équation de la ligne double de Σ_1 et Σ_2.

Pour le passage de Σ de la position Σ_1 à la position Σ_2 par une rotation autour de la ligne double comme axe, le déplacement angulaire et la vitesse angulaire sont

$$dw = \frac{\sqrt{d\rho_2^2}}{h_1'} = \frac{\sqrt{d\rho_3^2}}{h_1''}, \quad w = \frac{v_2}{h_1'} = \frac{v_3}{h_1''}.$$

Si U est un point quelconque du système Σ, $\overline{A_1U_1} = \rho$, on a, comme le point A est en repos, $\alpha|d\alpha = 0$, $\beta|d\beta = 0$, ainsi $\rho|d\rho = 0$, et, comme $d\rho$ est en outre perpendiculaire à ε, nous pouvons poser

$$d\rho = x|(\varepsilon\rho).$$

de plus le déplacement d'un autre point X du système Σ est, d'après cela, en posant $\overline{A_1X_1} = \psi$,

$$d\psi = x_1|(\varepsilon\psi).$$

Mais on a aussi

$$\rho|d\psi + \psi|d\rho = 0,$$

de manière que l'on a aussi, en combinant les trois dernières équations

$$\rho|[x_1|(\varepsilon\psi)] + \psi|[x|(\varepsilon\rho)] = 0,$$

ou

$$x_1(\rho\varepsilon\psi) + x(\psi\varepsilon\rho) = 0,$$

d'où il résulte

$$x_1 = x = \frac{d\rho}{|(\varepsilon\rho)} = \frac{d\psi}{|(\varepsilon\psi)}.$$

En posant

$$\rho = y\varepsilon + \chi, \quad \psi = y_1\varepsilon + \chi_1, \quad (\varepsilon\chi) = (\varepsilon\chi_1) = 0,$$

il suit

$$d\rho = x|(\varepsilon\chi), \quad d\psi = x|(\varepsilon\chi_1),$$

les déplacements des points U de Σ sont, quant à leurs grandeurs, directement proportionnels à leurs distances à l'axe $\overline{\varepsilon}$ passant par le point $A_1 = A_2$.

D'après tout ce qui précède, les déplacements des points de Σ forment un système de déplacements qui peut être obtenu par une rotation autour de cet axe, de sorte que, parce que x est infiniment petit, l'amplitude de cette rotation est

$$dw = x = \frac{d\rho}{|(\varepsilon\chi)} = \frac{d\psi}{|(\varepsilon\chi_1)}.$$

Nous obtenons ainsi les équations valables pour tous les points du système Σ

$$d\rho = dw\,|(\varepsilon\rho) = dw\,|(\varepsilon\chi),$$
$$\overline{v} = w\,|(\varepsilon\rho) = w\,|(\varepsilon\chi).$$

Les déplacements infiniment petits $d\rho_2$ et $d\rho_3$ des points B et C sont donnés, on a donc

$$dw = \frac{d\rho_2}{|(\varepsilon\alpha)} = \frac{d\rho_3}{|(\varepsilon\beta)}, \quad w = \frac{\overline{v}_2}{|(\varepsilon\alpha)} = \frac{\overline{v}_3}{|(\varepsilon\beta)}.$$

Nous obtenons maintenant, pour le radius vector $\psi = \overline{A_1U_2}$ du point U après la rotation

$$\psi = \rho + dw\,|(\varepsilon\rho).$$

§ 8.— Appliquons-nous maintenant au cas général, savoir celui où, dans le passage du système Σ d'une position donnée Σ_1 à une autre position donnée Σ_2, aucun point du système ne demeure en repos.

L'équation de l'hodographe du système des déplacements des points de Σ s'écrit

$$\delta = \delta_1 + \{ m\delta_\alpha + n\delta_\beta + p\,|[\alpha_1\delta_\beta - \beta_1\delta_\alpha + \delta_\alpha\delta_\beta] \}.$$

Le déplacement de tout point de Σ se compose d'après cela de

deux parties ou composantes, d'une translation commune à tous les points du système

$$\grave{\delta}_1 = \grave{\delta}_1,$$

égale au déplacement $\overline{A_1A_2}$ du point A et du déplacement

$$\grave{\delta}_r = m\grave{\delta}_\alpha + n\grave{\delta}_\beta + p\,|\,[\alpha_1\grave{\delta}_\beta - \beta_1\grave{\delta}_\alpha + \grave{\delta}_\alpha\grave{\delta}_\beta].$$

qui est parallèle au plan de l'hodographe, de sorte que le système des déplacements $\grave{\delta}_r$ est réalisable au moyen d'une rotation.

Les déplacements des éléments d'une droite du système Σ parallèle à ε sont égaux entr'eux, il existe dans Σ une droite dont les points sont déplacés dans sa propre direction d'un vecteur

$$\grave{\delta}_0 = \frac{\grave{\delta}_1\grave{\delta}_2\grave{\delta}_3}{\sqrt{(\grave{\delta}_\alpha\grave{\delta}_\beta)^2}}\,\varepsilon.$$

elle se conjoint avec la ligne double sans points doubles de Σ_1 et Σ_2, leur équation est de la forme

$$\rho_s = \rho_1 + \frac{\varepsilon\grave{\delta}_3\grave{\delta}_1}{\varepsilon\grave{\delta}_\alpha\grave{\delta}_\beta}\,\alpha_1 + \frac{\varepsilon\grave{\delta}_1\grave{\delta}_2}{\varepsilon\grave{\delta}_\alpha\grave{\delta}_\beta}\,\beta_1 + u\,|\,(\grave{\delta}_\alpha\grave{\delta}_\beta).$$

Les projections des déplacements des points du système Σ sur les droites du faisceau parallèle à ε sont égales au déplacement minimum $\grave{\delta}_0$, de sorte que, dans le passage du système Σ de la position Σ_1 à la position Σ_2 chaque point du système Σ est déplacé dans la direction de ε du vecteur $\grave{\delta}_0$.

Comme l'on a

$$\grave{\delta} = \grave{\delta}_1 + \grave{\delta}_r = \grave{\delta}_r + \grave{\delta}_1,$$

le système Σ peut être conduit de la position Σ_1 à la position Σ_2 par une translation et une rotation, ou par une rotation et une translation. Tous les points du système Σ ont une translation commune, qui est égale au déplacement total $\grave{\delta}_1$ du point A, la rotation doit avoir lieu autour de l'axe $\overline{\varepsilon}$ passant par le point $A = A_1$, l'équation de cet axe est

$$\rho = \rho_1 + u\varepsilon.$$

Si nous considérons les déplacements de B et C dans ce

mouvement, nous obtenons pour l'amplitude de la rotation

$$2 \sin \frac{1}{2} w = \sqrt{\frac{(\delta_2 - \delta_1)^2}{(\varepsilon\alpha_1)^2}} = \sqrt{\frac{(\delta_3 - \delta_1)^2}{(\varepsilon\beta_1)^2}} \cdot$$

Si un système invariable Σ possède une rotation autour d'un axe et une translation inclinée sur cet axe, son mouvement est équivalent à une rotation de la même amplitude autour d'un autre axe parallèle au premier et à une translation parallèle à cet axe, translation qui est égale au déplacement total d'un point quelconque du système dans la direction de cet axe.

Maintenant si δ_0 est la translation du cas précédent et si nous choisissons l'axe en question comme axe de rotation, comme les points du système situés sur cet axe se déplacent seulement du vecteur δ_0 dans le passage de Σ_1 à Σ_2, le nouvel axe coïncide avec la ligne double de Σ_1 et Σ_2, son équation est donc

$$\rho_s = \rho_1 + \frac{\delta_3\delta_1\varepsilon}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta}\,\alpha_1 + \frac{\delta_1\delta_2\varepsilon}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta}\,\beta_1 + u\varepsilon.$$

« Lorsqu'un système invariable Σ passe d'une manière quelconque d'une position donnée Σ_1 à une autre position donnée Σ_2, son mouvement est toujours équivalent à un mouvement hélicoïdal et c'est le mouvement le plus simple possible réalisant le déplacement donné. »

Si nous partons de la réduction du système des déplacements des points du système Σ au point $A = A_1$, respectivement pour la direction $\bar{\varepsilon}$ passant par le point $A = A_1$, les déplacements des points d'une droite du système Σ parallèles à ε étant égaux entr'eux, si λ désigne la distance de l'axe du mouvement hélicoïdal au point $A = A_1$, l'on a

$$2\lambda = (\varepsilon\delta_1)\,|\,\varepsilon + \text{cotang}\,\frac{1}{2}\,w\,|\,(\varepsilon\delta_1)$$

et, par conséquent, l'équation de cet axe

$$\rho_s = \rho_1 + \frac{1}{2}\left\{(\varepsilon\delta_1)\,|\,\varepsilon + \text{cotang}\,\frac{1}{2}\,w\,|\,(\varepsilon\delta_1)\right\} + u\varepsilon.$$

L'équation du radius vector du plan contenant les points A_1, B_1 et C_1 est

$$\lambda = \rho_1 + x\alpha_1 + y\beta_1.$$

Pour le point d'intersection de l'axe du mouvement hélicoïdal et de ce plan, on doit donc avoir

$$x\alpha_1 + y\beta_1 = \frac{1}{2}\left\{ (\varepsilon\delta_1)|\varepsilon + \text{cotang}\,\frac{1}{2}w|(\varepsilon\delta_1) \right\},$$

ou, en multipliant cette équation par ε,

$$x(\alpha_1\varepsilon) + y(\beta_1\varepsilon) = \frac{1}{2}\left\{ [\delta_1 - (\varepsilon|\delta_1)\varepsilon]\varepsilon + \text{cotg}\,\frac{1}{2}w|[(\varepsilon\delta_1)|\varepsilon] \right\},$$

$$x(\alpha_1\varepsilon) + y(\beta_1\varepsilon) = \frac{1}{2}\left\{ (\delta_1\varepsilon) + \text{cotg}\,\frac{1}{2}w|[\delta_1 - (\varepsilon|\delta_1)\varepsilon] \right\}.$$

Il en résulte, en multipliant successivement cette relation par β_1 et α_1,

$$x(\alpha_1\varepsilon\beta_1) = \frac{1}{2}\left\{ (\delta_1\varepsilon\beta_1) + \text{cotg}\,\frac{1}{2}w[(\beta_1|\delta_1) - (\varepsilon|\delta_1)(\varepsilon|\beta_1)] \right\},$$

$$y(\beta_1\varepsilon\alpha_1) = \frac{1}{2}\left\{ (\delta_1\varepsilon\alpha_1) + \text{cotg}\,\frac{1}{2}w[(\alpha_1|\delta_1) - (\varepsilon|\delta_1)(\varepsilon|\alpha_1)] \right\},$$

formules qui donnent les valeurs des coefficients x et y pour le point d'intersection de l'axe du mouvement hélicoïdal et du plan contenant les points A_1, B_1 et C_1.

Par ce moyen on a aussi une équation de cet axe

$$\rho_s = \rho_1 + \frac{1}{2(\alpha_1\beta_1\varepsilon)}\left\{ (\delta_1\beta_1\varepsilon) + \text{cotg}\,\frac{1}{2}w[(\varepsilon|\delta_1)(\varepsilon|\beta_1) - (\beta_1|\delta_1)] \right\}\alpha_1$$
$$+ \frac{1}{2(\alpha_1\beta_1\varepsilon)}\left\{ (\delta_1\alpha_1\varepsilon) + \text{cotg}\,\frac{1}{2}w[(\varepsilon|\delta_1)(\varepsilon|\alpha_1) - (\alpha_1|\delta_1)] \right\}\beta_1 + u\varepsilon.$$

De deux équations relatives à la ligne double de Σ_1 et Σ_2 résultant les relations numériques

$$\frac{\delta_3\delta_1\varepsilon}{\delta_\alpha\delta_\beta\varepsilon} = \frac{1}{2(\alpha_1\beta_1\varepsilon)}\left\{ (\delta_1\beta_1\varepsilon) + \text{cotg}\,\frac{1}{2}w[(\varepsilon|\delta_1)(\varepsilon|\beta_1) - (\beta_1|\delta_1)] \right\},$$

$$\frac{\delta_1\delta_2\varepsilon}{\delta_\alpha\delta_\beta\varepsilon} = \frac{1}{2(\alpha_1\beta_1\varepsilon)}\left\{ (\delta_1\alpha_1\varepsilon) + \text{cotg}\,\frac{1}{2}w[(\varepsilon|\delta_1)(\varepsilon|\alpha_1) - (\alpha_1|\delta_1)] \right\}.$$

On détermine encore la distance de l'axe du mouvement hélicoïdal au point A, au moyen de sa première équation.

On doit avoir

$$\lambda = \frac{\delta_3\delta_1\varepsilon}{\delta_\alpha\delta_\beta\varepsilon}\alpha_1 + \frac{\delta_1\delta_2\varepsilon}{\delta_\alpha\delta_\beta\varepsilon}\beta_1 + x\varepsilon, \quad (\varepsilon|\lambda) = 0.$$

de sorte que l'on a aussi

$$o = (\delta_3\delta_1\varepsilon)(\alpha_1|\varepsilon) + (\delta_1\delta_2\varepsilon)(\beta_1|\varepsilon) + x\sqrt{(\delta_\alpha\delta_\beta)^2}$$

d'où nous obtenons

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(\delta_\alpha\delta_3)^2}}\left\{(\delta_3\delta_1\varepsilon)\alpha_1 + (\delta_1\delta_2\varepsilon)\beta_1 - [(\delta_3\delta_1\varepsilon)(\alpha_1|\varepsilon) + (\delta_1\delta_2\varepsilon)(\beta_1|\varepsilon)]\varepsilon\right\}.$$

et l'équation de l'axe est de nouveau

$$\rho_s = \rho_1 + \lambda + u\varepsilon.$$

L'équation de l'hodographe du système des déplacements des points de Σ s'écrit

$$\delta = \delta_1 + m\delta_\alpha + n\delta_\beta + p|\{\alpha_1\delta_\beta - \beta_1\delta_\alpha + \delta_\alpha\delta_\beta\}.$$

Le déplacement total d'un point quelconque X de Σ se déduit de là comme composé de deux parties, dont l'une est égale au déplacement total d'un autre point quelconque U du système et dont l'autre est parallèle au plan de l'hodographe.

Si nous posons

$$\delta = \delta_1 + m\delta_\alpha + n\delta_\beta + p\mu.$$

on a

$$\delta_x = \delta_1 + m_x\delta_\alpha + n_x\delta_\beta + p_x\mu.$$

De cette équation résulte, par l'élimination de δ_1,

$$\delta_x = \delta + (m_x - m)\delta_\alpha + (n_x - n)\delta_\beta + (p_x - p)\mu$$

ou

$$\delta_x = \delta + \delta_{r.x} = \delta_{r.x} + \delta.$$

On en déduit, en posant $x = 1, 2, 3\ldots$

$$\delta_1 = \delta + \delta_{r.1} = \delta - \{m\delta_\alpha + n\delta_\beta + p\mu\}.$$

$$\delta_2 = \delta + \delta_{r.2} = \delta - \{(m-1)\delta_\alpha + n\delta_\beta + p\mu\}.$$

$$\delta_3 = \delta + \delta_{r.3} = \delta - \{m\delta_\alpha + (n-1)\delta_\beta + p\mu\}.$$

$$\delta_4 = \delta + \delta_{r.4} = \delta - \{(m - m_4)\delta_\alpha + (n - n_4)\delta_\beta + (p - p_4)\mu\}.$$

$$\vdots$$

Les composantes $\delta_{r,1}, \delta_{r,2}, \delta_{r,3}\ldots$ des déplacements $\delta_1, \delta_2, \delta_3\ldots$, c'est-à-dire $\delta_{r,x}$, $x = 1, 2, 3\ldots$ forment, puisqu'elles sont paral-

lèles au plan de l'hodographe, dans leur ensemble, un déplacement résultant d'une rotation, elles sont égales à la différence entre le déplacement total δ_r du point du système Σ et le déplacement total d'un point du système arbitrairement choisi U, commun par conséquent à tous les points du système et perpendiculaire au vecteur déterminant la position du plan de l'hodographe.

De là et en se reportant au cours de notre développement, on déduit directement la proposition :

« Lorsqu'un système invariable Σ passe d'une position donnée Σ_1 d'une manière quelconque à une autre position donnée Σ_2, son mouvement est équivalent à une translation du système, qui est égale au déplacement total d'un point quelconque du système Σ et à une rotation de Σ autour de l'axe passant par ce point du système et parallèle au vecteur qui détermine la position du plan de l'hodographe du système des déplacements des points de Σ. Comme par la translation Σ reste parallèle à lui-même, quelque soit le point dont le déplacement ait été choisi comme déplacement total, et que l'hodographe reste la même pour chaque point de réduction, l'amplitude de la rotation et la direction de l'axe de rotation restent les mêmes pour toute réduction du système de déplacement. L'ordre suivant, par lequel sont opérées la translation et la rotation est indifférent, et elles peuvent être simultanées ».

Si nous choisissons le moindre déplacement δ_0 comme vecteur de translation du système on a

$$\delta_r = \delta_0 + \delta_{r,x} = \delta_{r,x} + \delta_0.$$

l'axe de rotation coïncide alors avec la ligne double des systèmes Σ_1 et Σ_2, tous les points de Σ possèdent alors en commun, quand Σ passe de Σ_1 à Σ_2, la moindre translation, et si la rotation et la translation s'effectuent uniformément, les points du système Σ décrivent des arcs d'hélices de même pas autour de la ligne double comme axe.

« Le mouvement d'un système invariable Σ passant d'une manière quelconque d'une position Σ_1 à une autre position Σ_2 est équivalent à un mouvement hélicoïdal, qui est son mouvement le plus simple. »

Si nous prenons un point quelconque O de l'axe des hélices comme pôle des coordonnées, l'on a pour le déplacement d'un point quelconque U du système Σ, en posant $U_1 = O + \rho$, $U_2 = O + \psi$,

$$\psi = (\varepsilon \mid \rho)\varepsilon + \cos \omega [(\varepsilon\rho) \mid \varepsilon] + \sin \omega \mid (\varepsilon\rho) + \delta_0,$$

et le déplacement total de ce point du système est

$$\delta = \psi - \rho = (1 - \cos \omega)[(\rho\varepsilon) \mid \varepsilon] + \sin \omega \mid (\varepsilon\rho) + \delta_0.$$

Les formules correspondantes, quand on prend un autre axe quelconque pour faire passer le système Σ de la position Σ_1 à la position Σ_2 sont les mêmes moyennant le remplacement de δ_0 par le déplacement de cette droite considéré comme droite du système Σ.

§ 8'. — Si les déplacements des points du système Σ sont infiniment petits, l'équation de l'hodographe des déplacements des points du système est

$$d\rho = d\rho_1 + m d\alpha + n d\beta + p \mid [\alpha d\beta - \beta d\alpha],$$

le système des déplacements infiniment petits se décompose en les deux systèmes partiels

$$d\rho_1 = d\rho_1$$
$$d\rho_r = m d\alpha + n d\beta + p \mid [\alpha d\beta - \beta d\alpha],$$

de sorte que l'on a

$$d\rho = d\rho_1 + d\rho_r = d\rho_r + d\rho_1.$$

L'hodographe des vitesses des points du système Σ a evidemment l'équation

$$\overline{v} = \overline{v_1} + m(\overline{v_2} - \overline{v_1}) + n(\overline{v_3} - \overline{v_1}) + p \mid [\alpha(\overline{v_3} - \overline{v_1}) - \beta(\overline{v_2} - \overline{v_1})],$$

le système des vitesses se décompose dans les deux systèmes partiels

$$\overline{v_1} = \overline{v_1}$$
$$\overline{v_r} = m\alpha' + n\beta' + p \mid [\alpha\beta' - \beta\alpha'].$$

Le déplacement du système Σ est équivalent à une translation

infiniment petite $d\rho_1$ de ses points et à une rotation infiniment petite autour de l'axe passant par le point $A = A_1$ et ayant pour équation

$$\rho = \rho_1 + u\varepsilon, \quad \varepsilon = [|(d\alpha d\beta)] : \sqrt{(d\alpha d\beta)^2} = [|(\alpha'\beta')] : \sqrt{(\alpha'\beta')^2},$$

l'angle de la rotation est

$$dw = \frac{\sqrt{(d\rho_2 - d\rho_1)^2}}{\sqrt{(\varepsilon\alpha)^2}} = \frac{\sqrt{(d\rho_3 - d\rho_1)^2}}{\sqrt{(\varepsilon\beta)^2}},$$

et la vitesse angulaire

$$w = \frac{\sqrt{(\overline{v}_2 - \overline{v}_1)^2}}{\sqrt{(\varepsilon\alpha)^2}} = \frac{\sqrt{(\overline{v}_3 - \overline{v}_1)^2}}{\sqrt{(\varepsilon\beta)^2}}.$$

Si nous choisissons comme axe de rotation la droite qui coïncide avec la ligne double de Σ_1 et Σ_2, l'équation de cette dernière est

$$\rho_s = \rho_1 + \frac{1}{\varepsilon\delta_\alpha\delta_\beta}\left\{(\varepsilon d\rho_3 d\rho_1)\alpha + (\varepsilon d\rho_1 d\rho_2)\beta\right\} + u\varepsilon,$$

ou encore

$$\rho_s = \rho_1 + \frac{1}{\sqrt{(\alpha'\beta')^2}}\left\{(\varepsilon\overline{v}_3\overline{v}_1)\alpha + (\varepsilon\overline{v}_1\overline{v}_2)\beta\right\} + u\varepsilon,$$

le système Σ se déplace alors parallèlement à lui-même suivant le vecteur

$$d\rho_0 = \frac{d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3}{\sqrt{(d\alpha d\beta)^2}}\,\varepsilon$$

avec la vitesse

$$\overline{v}_0 = \frac{\overline{v}_1\overline{v}_2\overline{v}_3}{\sqrt{(\alpha'\beta')^2}}\,\varepsilon,$$

et le même déplacement angulaire et la même vitesse angulaire que précédemment, son mouvement consiste donc dans un mouvement hélicoïdal infiniment petit.

En prenant le pôle des coordonnées sur l'axe des hélices, on a pour le point U du système Σ

$$\psi = \rho + dw|(\varepsilon\rho) + d\rho_0,$$
$$d\rho = dw|(\varepsilon\rho) + d\rho_0, \quad \overline{v} = w|(\varepsilon\rho) + \overline{v}_0.$$

§ 9. — Les cas généraux développés dans les paragraphes 8 et 8′ comprennent tous les cas particuliers. Nous allons pourtant examiner différentes acceptions relatives à des déplacements δ_1, δ_2 et δ_3 ou $d\rho_1$, $d\rho_2$ et $d\rho_3$ déjà traitées comme cas particuliers.

§ 10. — Il nous reste d'abord à exprimer les résultats généraux habituels en coordonnées rectangulaires, il s'agit notamment de l'équation de l'hodographe du système des déplacements, de l'axe hélicoïdal, de l'amplitude et de la translation du mouvement de torsion.

Soit

$$\begin{aligned} A_1 &= O + \rho_1 = O + x_1\varepsilon_1 + y_1\varepsilon_2 + z_1\varepsilon_3, & \delta_1 &= d_1'\varepsilon_1 + d_1''\varepsilon_2 + d_1'''\varepsilon_3, \\ B_1 &= O + \rho_2 = O + x_2\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + z_2\varepsilon_3, & \delta_2 &= d_2'\varepsilon_1 + d_2''\varepsilon_2 + d_2'''\varepsilon_3, \\ C_1 &= O + \rho_3 = O + x_3\varepsilon_1 + y_3\varepsilon_2 + z_3\varepsilon_3, & \delta_3 &= d_3'\varepsilon_1 + d_3''\varepsilon_2 + d_3'''\varepsilon_3, \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (x_2 - x_1)\varepsilon_1 + (y_2 - y_1)\varepsilon_2 + (z_2 - z_1)\varepsilon_3 = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3, \\ \beta_1 &= (x_3 - x_1)\varepsilon_1 + (y_3 - y_1)\varepsilon_2 + (z_3 - z_1)\varepsilon_3 = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_3, \\ \delta_\alpha &= (d_2' - d_1')\varepsilon_1 + (d_2'' - d_1'')\varepsilon_2 + (d_2''' - d_1''')\varepsilon_3 = a_1'\varepsilon_1 + a_2'\varepsilon_2 + a_3'\varepsilon_3, \\ \delta_\beta &= (d_3' - d_1')\varepsilon_1 + (d_3'' - d_1'')\varepsilon_2 + (d_3''' - d_1''')\varepsilon_3 = b'_1\varepsilon_1 + b_2'\varepsilon_2 + b_3'\varepsilon_3. \end{aligned}$$

Le radius vector d'un point quelconque U de $\Sigma = \Sigma_1$, ou l'équation du système ponctuel $\Sigma = \Sigma_1$, est maintenant

$$\begin{aligned} \rho &= x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3 \\ &= x_1\varepsilon_1 + y_1\varepsilon_2 + z_1\varepsilon_3 + m(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3) + n(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_3) \\ &\quad + p\{(a_1b_2 - a_2b_1)\varepsilon_1\varepsilon_2 + (a_2b_3 - a_3b_2)\varepsilon_2\varepsilon_3 + (a_3b_1 - a_1b_3)\varepsilon_3\varepsilon_1\}. \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \rho &= x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3 \\ &= [x_1 + ma_1 + nb_1 + p(a_2b_3 - a_3b_2)]\varepsilon_1 + [y_1 + ma_2 + nb_2 + p(a_3b_1 - a_1b_3)]\varepsilon_2 \\ &\quad + [z_1 + ma_3 + nb_3 + p(a_1b_2 - a_2b_1)]\varepsilon_3. \end{aligned}$$

Les coordonnées de ce point sont donc

$$\begin{aligned} x &= x_1 + ma_1 + nb_1 + p(a_2b_3 - a_3b_2) = x_1 + ma_1 + nb_1 + pc_1, \\ y &= y_1 + ma_2 + nb_2 + p(a_3b_1 - a_1b_3) = y_1 + ma_2 + nb_2 + pc_2, \\ z &= z_1 + ma_3 + nb_3 + p(a_1b_2 - a_2b_1) = z_1 + ma_3 + nb_3 + pc_3. \end{aligned}$$

On déduit de là les valeurs des coefficients m, n, p. exprimé en fonction de x, y, z et des quantités données.

Nous écrivons, pour résoudre ces équations par rapport à m, n et p,

$$\begin{aligned}
& m a_1 e_1 + n b_1 e_1 + p c_1 e_1 = (x - x_1) e_1, \\
& m a_2 e_2 + n b_2 e_2 + p c_2 e_2 = (y - y_1) e_2, \qquad (e_1 e_2 e_3) = 1, \\
& m a_3 e_3 + n b_3 e_3 + p c_3 e_3 = (z - z_1) e_3,
\end{aligned}$$

l'addition de ces équations donne

$$\begin{aligned}
& m(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) + n(b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) + p(c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3) \\
& = (x - x_1) e_1 + (y - y_1) e_2 + (z - z_1) e_3,
\end{aligned}$$

et nous en déduisons, par la multiplication extérieure, pour m, n et p les relations

$$m \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_1, & y - y_1, & z - z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$n \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_1, & y - y_1, & z - z_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$p \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_1, & y - y_1, & z - z_1 \\ \alpha_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Ces équations donnent directement les valeurs de m, n et p. Pour le développement ultérieur il faudra toujours prendre les valeurs précédentes pour m, n et p.

Nous obtenons maintenant pour le déplacement du point $U \equiv U_1$ du système Σ de coordonnées x, y et z :

$$\begin{aligned}
\delta &= d'\varepsilon_1 + d''\varepsilon_2 + d'''\varepsilon_3 \\
&= d_1'\varepsilon_1 + d''_1\varepsilon_2 + d_1'''\varepsilon_3 + m\{a_1'\varepsilon_1 + a_2'\varepsilon_2 + a_3'\varepsilon_3\} + n(b_1'\varepsilon_1 + b_2'\varepsilon_2 + b_3'\varepsilon_3) \\
&+ p\{(a_2 b_3' - a_3 b_2')\varepsilon_1 + (a_3 b_1' - a_1 b_3')\varepsilon_2 + (a_1 b_2' - a_2 b_1')\varepsilon_3 \\
&\quad - (b_2 a_3' - a_3 b_2')\varepsilon_1 - (b_3 a_1' - b_1 a_3')\varepsilon_2 - (b_1 a_2' - b_2 a_1')\varepsilon_3 \\
&\quad + (a_2' b_3' - a_3' b_2')\varepsilon_1 + (a_3' b_1' - a_1' b_3')\varepsilon_2 + (a_1' b_2' - a_2' b_1')\varepsilon_3\},
\end{aligned}$$

ou, en ordonnant par rapport à ε_1, ε_2, ε_3,

$$\begin{aligned}
\delta &= d'\varepsilon_1 + d''\varepsilon_2 + d'''\varepsilon_3 \\
&= \{d_1' + m a_1' + n b_1' + p[a_2 b_3' - a_3 b_2' - b_2 a_3' + b_3 a_2' + a_2' b_3' - a_3' b_2']\}\varepsilon_1 \\
&+ \{d_1'' + m a_2' + n b_2' + p[a_3 b_1' - a_1 b_3' - b_3 a_1' + b_1 a_3' + a_3' b_1' - a_1' b_3']\}\varepsilon_2 \\
&+ \{d_1''' + m a_3' + n b_3' + p[a_1 b_2' - a_2 b_1' - b_1 a_2' + b_2 a_1' + a_1' b_2' - a_2' b_1']\}\varepsilon_3.
\end{aligned}$$

Cette équation donne directement les composantes du déplacement total d'un point quelconque du système Σ parallèles aux axes des coordonnées.

Avec δ comme rayon vecteur, d', d'' et d''' sont les coordonnées courantes du plan de l'hodographe du système des déplacements des points de Σ.

La seconde des équations de l'hodographe nous donne

$$\left\{(d'-d'_1)\,\varepsilon_1 + (d''-d_1'')\,\varepsilon_2 + (d'''-d_1''')\,\varepsilon_3\right\}$$
$$\times \left\{(a_1'\varepsilon_1 + a_2'\varepsilon_2 + a_3'\varepsilon_3)\,(b_1'\varepsilon_1 + b_2'\varepsilon_2 + b_3'\varepsilon_3)\right\} = 0,$$

l'équation de l'hodographe est donc, avec les coordonnées d', d'' et d''',

$$\begin{vmatrix} d'-d_1', & d''-d_1'', & d'''-d_1''' \\ a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \end{vmatrix} = 0.$$

Pour le déplacement minimum, nous obtenons au moyen de la première formule, qui donne δ_0,

$$\delta_0 = d_0'\varepsilon_1 + d_0''\varepsilon_2 + d_0'''\varepsilon_3$$
$$= \begin{vmatrix} d_1' & d_1'' & d_1''' \\ d_2' & d_2'' & d_2''' \\ d_3' & d_3'' & d_3''' \end{vmatrix} :$$
$$\frac{(a_2'b_3' - a_3'b_2')\,\varepsilon_1 + (a_3'b_1' - a_1'b_3')\,\varepsilon_2 + (a_1'b_2' - a_2'b_1')\,\varepsilon_3}{(a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2)(b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2) - (a_1'b_1' + a_2'b_2' + a_3'b_3')^2},$$

équation dont nous pouvons tirer directement les composantes de δ_0 parallèles aux axes de coordonnées, la grandeur de ce déplacement est

$$\sqrt{\delta_0^2} = \begin{vmatrix} d_1' & d_1'' & d_1''' \\ d_2' & d_2'' & d_2''' \\ d_3' & d_3'' & d_3''' \end{vmatrix} :$$
$$\left\{(a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2)(b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2) - (a_1'b_1' + a_2'b_2' + a_3'b_3')^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

L'équation du radius vector de l'axe de rotation, quand on prend le point $A = A_1$ comme point de réduction du système des déplacements, est

$$\rho = \rho_1 + u\,|\,\delta_\alpha\delta_\beta.$$

ou

$$(\rho - \rho_1)\,|\,(\delta_\alpha\delta_\beta) = 0.$$

d'où l'on a encore

$$\begin{aligned}&\{(x-x_1)\varepsilon_1+(y-y_1)\varepsilon_2+(z-z_1)\varepsilon_3\}\\ \times&\{(a_2'b_3'-a_3'b_2')\varepsilon_1+(a_3'b_1'-a_1'b_3')\varepsilon_2+(a_1'b_2'-a_2'b_1')\varepsilon_3\}=0,\end{aligned}$$

d'où résultent directement, comme équations de cet axe en coordonnées habituelles

$$\frac{x-x_1}{a_2'b_3'-a_3'b_2'}=\frac{y-y_1}{a_3'b_1'-a_1'b_3'}=\frac{z-z_1}{a_1'b_2'-a_2'b_1'}.$$

L'équation du radius vector de l'axe pour le mouvement hélicoïdal du système Σ s'écrit

$$\rho_s=\rho_1+\frac{(\partial_3\partial_1)\,|\,(\partial_\alpha\partial_\beta)}{(\partial_\alpha\partial_\beta)^2}\,\alpha_1+\frac{(\partial_1\partial_2)\,|\,(\partial_\alpha\partial_\beta)}{(\partial_\alpha\partial_\beta)^2}\,\beta_1+u\,|\,(\partial_\alpha\partial_\beta).$$

Nous posons pour abréger,

$$\begin{aligned}|\,(\partial_\alpha\partial_\beta)&=(a_2'b_3'-a_3'b_2')\varepsilon_1+(a_3'b'_1-a_1'b_3')\varepsilon_2+(a_1'b_2'-a_2'b_1')\varepsilon_3\\ &=c_1'\varepsilon_1+c_2'\varepsilon_2+c_3'\varepsilon_3,\end{aligned}$$

moyennant quoi, le vecteur fixant la position du plan de l'hodographe est

$$\varepsilon=(c_1'\varepsilon_1+c_2'\varepsilon_2+c_3'\varepsilon_3):\sqrt{c_1'^2+c_2'^2+c_3'^2},$$

ou

$$\varepsilon=(c_1'\varepsilon_1+c_2'\varepsilon_2+c_3'\varepsilon_3):c',\quad c'^2=c_1'^2+c_2'^2+c_3'^2.$$

Nous en déduisons d'abord

$$(\partial_3\partial_1)\,|\,(\partial_\alpha\partial_\beta)=\begin{vmatrix}d_3' & d_3'' & d_3'''\\ d_1' & d_1'' & d_1'''\\ c_1' & c_2'' & c_3'''\end{vmatrix}=\Delta_1,$$

$$(\partial_1\partial_2)\,|\,(\partial_\alpha\partial_\beta)=\begin{vmatrix}d_1' & d_1'' & d_1'''\\ d_2' & d_2'' & d_2'''\\ c_1' & c_2' & c_3'\end{vmatrix}=\Delta_2.$$

Maintenant il résulte de l'équation du radius vector de l'axe hélicoïdal

$$\begin{aligned}(x-x_1)\varepsilon_1+(y-y_1)\varepsilon_2+(z-z_1)\varepsilon_3&=\frac{\Delta_1}{c'^2}(a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+a_3\varepsilon_3)\\ &+\frac{\Delta_2}{c'^2}(b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2+b_3\varepsilon_3)+u(c_1'\varepsilon_1+c_2'\varepsilon_2+c_3'\varepsilon_3),\end{aligned}$$

d'où

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{x-x_1}{c_1'} - \frac{a_1\Delta_1}{c_1'c'^2} - \frac{b_1\Delta_2}{c_1'c'^2} \\
&= \frac{y-y_1}{c_2'} - \frac{a_2\Delta_1}{c_2'c'^2} - \frac{b_2\Delta_2}{c_2'c'^2} \\
&= \frac{z-z_1}{c_3'} - \frac{a_3\Delta_1}{c_3'c'^2} - \frac{b_3\Delta_2}{c_3'c'^2}\ .
\end{aligned}
$$

en multipliant cette relation par $(c_1'c_2'c_3'c'^2)$ il vient

$$
\begin{aligned}
&\{c'^2(x-x_1) - a_1\Delta_1 - b_1\Delta_2\}\, c_2'c_3' \\
=&\{c'^2(y-y_1) - a_2\Delta_1 - b_2\Delta_2\}\, c_3'c_1' \\
=&\{c'^2(z-z_1) - a_3\Delta_1 - b_3\Delta_2\}\, c_1'c_2',
\end{aligned}
$$

et, en exprimant encore a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 en fonction de quantités données, on obtient comme équations en coordonnées habituelles de l'axe du mouvement hélicoïdal de Σ

$$
\begin{aligned}
&\{c'^2(x-x_1) - \Delta_1(x_2-x_1) - \Delta_2(x_3-x_1)\}\, c_2'c_3' \\
=&\{c'^2(y-y_1) - \Delta_1(y_2-y_1) - \Delta_2(y_3-y_1)\}\, c_3'c_1' \\
=&\{c'^2(z-z_1) - \Delta_1(z_2-z_1) - \Delta_2(z_3-z_1)\}\, c_1'c_2'.
\end{aligned}
$$

Il reste encore à déterminer l'angle de rotation ω.

Pour cela nous possédons l'équation

$$
4\sin^2\frac{1}{2}\omega = \frac{(\delta_2-\delta_1)^2}{(\varepsilon\alpha_1)^2} = \frac{\delta_\alpha^2}{\alpha_1^2-(\alpha_1|\varepsilon)^2}
$$

ce qui donne

$$
4\sin^2\frac{1}{2}\omega = \frac{(a_1'^2+a_2'^2+a_3'^2)c'^2}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)c'^2-(a_1c_1'+a_2c_2'+a_3c_3')^2}\ .
$$

et cette équation détermine l'amplitude de la rotation.

Faisons maintenant passer le système Σ de Σ_1 à Σ_2 au moyen d'une rotation autour de l'axe de torsion et de la translation δ_0.

En choisissant un point de cet axe comme origine des coordonnées, les axes du nouveau système de coordonnées étant parallèles à ceux du système primitif, on a, si $\rho = x_1\,\varepsilon_1 + y_1\,\varepsilon_2 + z_1\,\varepsilon_3$ est le rayon vecteur d'un point quelconque $U = U_1$ de $\Sigma = \Sigma_1$ et $\psi = x\,\varepsilon_1 + y\,\varepsilon_2 + z\,\varepsilon_3$ le rayon vecteur du point correspondant dans $\Sigma = \Sigma_2$, après le déplacement de Σ,

$$
\psi = \varepsilon|\rho\varepsilon + \cos\omega\,(\varepsilon\rho)|\varepsilon + \sin\omega\,|\varepsilon\rho + \delta_0.
$$

d'où, en posant

$$\varepsilon = \frac{1}{c'}(c_1'\varepsilon_1 + c_2'\varepsilon_2 + c_3'\varepsilon_3) = e_1\varepsilon_1 + e_2\varepsilon_2 + e_3\varepsilon_3,$$

$$\begin{aligned} x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3 = (1 - \cos w)(e_1x_1 + e_2y_1 + e_3z_1)(e_1\varepsilon_1 + e_2\varepsilon_2 + e_3\varepsilon_3) \\ + \cos w(x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3) \\ + \sin w \{(e_2z_1 - e_3y_1)\varepsilon_1 + (e_3x_1 - e_1z_1)\varepsilon_2 + (e_1y_1 - e_2x_1)\varepsilon_3\} \\ + d_0'\varepsilon_1 + d_0''\varepsilon_2 + d_0'''\varepsilon_3, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3 = \{(1 - \cos w)(e_1^2x_1 + e_1e_2y_1 + e_3e_1z_1) + \cos w x_1 \\ + \sin w(e_2z_1 - e_3y_1) + d_0'\}\varepsilon_1 \\ + \{(1 - \cos w)(e_1e_2x_1 + e_2^2y_1 + e_2e_3z_1) + \cos w y_1 \\ + \sin w(e_3x_1 - e_1z_1) + d_0''\}\varepsilon_2 \\ + \{(1 - \cos w)(e_3e_1x_1 + e_2e_3y_1 + e_3^2z_1) + \cos w z_1 + \sin w(e_1y_1 - e_2x_1) + d_0'''\}\varepsilon_3. \end{aligned}$$

De cette équation on déduit directement les coordonnées du point U (x, y, z) du système Σ après le déplacement.

Si l'on fait coïncider l'axe de z du deuxième système de coordonnées avec l'axe de torsion, l'on a $\varepsilon = \varepsilon_3$, $e_1 = e_2 = 0$, $e_3 = 1$, $d_0' = d_0'' = 0$, $d_0''' = d_0$, ce qui entraîne

$$x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3 = \{\cos w x_1 - \sin w y_1\}\varepsilon_1 + \{\cos w y_1 + \sin w x_1\}\varepsilon_2 + \{z_1 + d_0\}\varepsilon_3,$$

d'où

$$x = \cos w x_1 - \sin w y_1 \quad y = \cos w y_1 + \sin w x_1, \quad z = z_1 + d_0.$$

§ 11. — Par ce moyen est résolu le problème du déplacement d'un système invariable Σ, qui passe d'une manière quelconque d'une position donnée Σ_1 dans une autre position donnée Σ_2, en ce qui concerne son mouvement le plus simple et son système de vitesses.

On peut aussi effectuer la solution de ce problème au moyen de la multiplication algébrique du facteur de déplacement. La publication de cette dernière solution est réservée pour une autre époque.

Ferdinand Kraft (Zurich).

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires (*suite*).

Semestre d'été 1903

ALLEMAGNE

Berlin. (*Universität*). — Schwarz : Integralrechn, 4 ; Ueb. hierzu ; Anw. d. Ellipt. Funktionen ; Variationsrechn., 4 ; Kolloquien ; Seminar. — Schur : Einl. in d. Th. der gew. Diff. gleichgn, 2. — Landau : Zahlentheorie, 4 ; Einl. i. d. Funktionenth., 4 ; Th. der Riemann'schen Zetafunktionen, 1. — Frobenius : Theorie der alg. Gleichungen, 4 ; Seminar. — Schottky : Theorie der Abel'schenfunktionen, 4 ; Seminar. — Hettner : Potentialtheorie, 2. — Knoblauch : Anal. Geometrie, 4 ; Th. der part. Diff.-gleichgn., 4 ; Th. der Strahlensysteme, 1. — Lehmann-Filhès : Diff. rechng., 4 : Ueb., 1. — Förster : Gesch. der griechischen Astronomie, 2 ; Theorie der Zeitmessung, 2 ; Fehlertheorie, 1. — Bauschinger : Einl. in die Mechanik des Himmels, 3 ; Doppelsterne, 1 ; Seminar. — Weinstein : Einl. in die math, Physik, 3 ; Grundlagen der phys. Wissenschaften. — Warburg : Experimentalphysik ; Math. Ergänzungen zur Experimentalphysik. — Neesen : Elementare Mechanik, 1.

Berlin-Charlottenburg. (*Techn. Hochschule*). — Dziobek : Höhere Mathematik, Ueb. dazu. — Haentzschel : Elemente der Mechanik (f. Chemiker). — Hamburger : Variationsrechng., Funktionentheorie ; Niedere Analysis u. Algebra. — Hauck : Darst. Geometrie. — Hertzer : Darst. Geometrie. — Hettner : Höhere Mathematik : Ueb. dazu ; Theorie der Raumkurven und Flächen ; — Jolles : Darst. Geometrie. — Lampe : Höhere Mathematik ; Ueb. dazu ; Bestimmte Integrale u. Diff. gleichgn. — Paalzow : Math. Physik. — Gross : Mechan. Wärmetheorie ; Einl. in die Math. Physik ; Einl. in die Potentialtheorie. — Hessenberg : Darst. Geometrie ; Ausgew. Kapitel aus der Theorie der Kegelschnitte. — Jahnke : Einl. in die Vektoranalysis ; Repetit. über Elementarmathematik. — R. Müller : Diff. u. Int. rechng. — Steinitz : Synthetische Geometrie ; Elem. d. darst. Geometrie ; Anal. Geometrie. — Kötter : Mechanik ; ausgew. Kapitel u. Geschichte. — Piltsch : Mechanik. — E. Meyer : Mechanik.

Bonn. (*Universität*). — Lipschitz : Anw. der Infinit. rechn. auf die Theorie des Raumes, 4. — Kortum : Unendl. Reihen, 2; Diff. u. Int. rechn., 4; Ueb. im math. Seminar, 2. — Heffter : Analyt. Geometrie des Raumes, 4; Ueb., 1; Darst. Geometrie (vorzugsweise Perspektive) mit Zeichenübungen, 2. — Sommer : Elemente der Idealtheorie, 2. — Mörmichmeyer : Geschichte der Astronomie, 1. — Küstner : Definitive Bahnbestimmung der Kometen u. Planeten, 3; Prakt. Ueb.; Kolloquium. — Deichmüller : Bestimmung der Figur der Erde, 1; Ausgleichungsberechnung, 1; Astron. geod. Arbeiten, 2.

Breslau. (*Universität*). — Sturm : Theorie der geom. Verwandtschaften, 4; Darst. Geometrie u. graph. Statik, 3; Seminar, 2. — Rosanes : Anal. Geometrie der Ebene, 4; Determinanten, 2; Seminar, 1. — London : Th. der best. Integrale u. der Fourier'schen Reihen, 3. — Franz : Variations-u. Störungsrechnung, 3; Geogr. Ortsbestimmung, 2; Uebersicht über die Astron. Theorien, 2; Astr. Praktikum, 2. — Neumann : Elastizitätstheorie, 3; Ausgew. Kap. der Potentialtheorie, 2; Ueb. in math.-phys. Seminar.

Erlangen. (*Universität*). — Gordan : Raumgeometrie, 4; Zahlentheorie, 4; Seminar, 3. — Noether : Diff. u. Int. rechng., 4; Diff. Geometrie, 4; geom. u. analyt. Uebungen. — Schmidt : Math. Physik, 4; math.-phys. Ueb., 2; mit Wehnelt.

Freiburg i. Br. — Lüroth : Höhere analyt. Geometrie der Kurven u. Flächen, 4; Theoretische Astronomie, 3. — Stickelberger : Integralrechn., 5; Ellipt. Funktionen, 3; Math.-Seminar. — Lœwy : Theorie der alg. Gleichungen, 4; Ueber die Grundlagen der Geometrie, 2. — Seith : Kegelschnitte in elementargeometrischer Behandlung.

Giessen. (*Universität*). — Pasch : Anal. Geometrie der Ebene, 4; allgemeine Hilfsmittel der Funktionentheorie, 2; Seminar, 2. — Netto : Einl. in die Algebra, 4; Diff. Gleichungen, 2; Seminar, 1. — Wellstein : Darst. Geometrie mit Ueb., 6; Einl. in die Geometrie der Lage, 2; arithm. Theorie der Formen, 2.

Gœttingen. (*Universität*). — Klein : Encyclopädie der Geometrie, 4; math. Seminar, 2. — Hilbert : Diff. gleichungen, 4; Mechanik der Continua, 2; Math. Seminar, 2. — Minkowski : Algebra, 4; Minimalflächen, 2; Funktionentheoretische Uebungen, 2. — Brendel : Versicherungsrechn, 2; Uebungen dazu, 2; Ueb. f. d. Integration v. Diff. gleichgn, 2; specielle Störungen, 2. — Schilling : Diff. u. Integralrechn, 4; Graphische Statik, 1; Ueb. dazu, 2. — Zermelo : Anal. Geometrie, 4; Uebungen (mit Brendel), 2. — Blumenthal : Ellipt. u. Modulfunktionen, 3; Uebungen (mit Brendel), 2. — Voigt : Theorie u.

Anwendung des Potentials, 4 ; Ueb. 4 ; Ausg. Kap. d. Mechanik, 1. — Riecke ; Seminar, geom. Optik. — Ambronn : Theorie und Gebrauch der astronom. Instrumente, 2 ; Methode der kleinsten Quadrate, 1 ; Uebungen ; Ueber das Kalenderwesen, 1.

Halle. (*Universität*). — G. Cantor : Diff.-u. Integralrechn, 5 ; math. Seminar. — Wangerin : Differentialgleich., 4 ; Analyt. Geometrie der Ebene, mit Ueb, 3 ; sphär. Trigonometrie u. math. Geographie, 3 ; math. Seminar. — Eberhard : Theorie des höheren Gleichungen, 4 ; Uebgn. — Grassmann : Analyt. Mechanik, mit Ueb., 4 ; Anw. d. darst. Geometrie auf die Flächen zweiten Grades, 2. — Buchholz : Wahrscheinlichkeitsrechnung u. Methode der kleinstein Quadrate, 2 ; prakt. Uebungen in geographischer Ortsbestimmung. — Bernstein : Grundlagen der Geometrie, mit Uebungen, 3.

Kiel. (*Universität*). — Pochhammer : Anal. Geometrie der Ebene, 4 ; Theorie der bestimmten Integrale, 4 ; Einl. in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1 ; math. Seminar. — Stäckel : Differentialrechn. u. Einl. in die Analysis, 4 ; analyt. Mechanik, 4 ; Biegung krummer Flächen, 1 ; math. Seminar (über Mechanik). — Weinholdt : Graph. Statik mit Ueb., 2. — Weber : Electro statik und Potentialtheorie, 2. — Harzer : Rotationsprobleme der Mechanik der Himmels, 3 ; astronom. Uebgn. — Kreutz : Bahnbestimmung der Kometen u. Planeten, 3 ; Theorie des Ring-und Krenzstabmikrometers, 1. — Kobod : Niedere Geodäsie, 2 ; Uebungen. — Grossmann : Geogr. Ortsbestimmung, 2 ; die neueren Ergebnisse der Astronomie, 1.

Königsberg. (*Universität*). — W. Fr. Meyer : Anal. Geometrie, 4 ; Uebgn., 1 ; Einl. in die höhere Geometrie, 4 ; Uebgn., 1. — Schönflies : Theorie der Differentialgleichungen, 4 ; math. Seminar, 2. — Saalschütz : Determinanten, 2 ; Gauss'sche und andere interessante Reihen, 4. — Vahlen : Differentialrechn. mit Ueb., 5. — Struve : Himmel-Mechanik, 3 ; Ueb., 2. — Cohn : Anwendgn. der Potentialtheorie, 3. — Volkmann : Elasticitätstheorie, 4 ; Ueb. in math. phys. Seminar.

Marburg. (*Universität*). — Hess : Geometrie der Ebene in analyt. und synthetische Behandlung, 4 ; Ausgew. Kapitel der höheren Analysis, 4 ; Unter-u. Oberseminar. — Hensel : Differentialrechnung, 5 ; Theorie der alg. Funktionen und ihre Anwendung auf die Theorie der alg. Kurven u. der Abel'schen Integrale, 4 ; Math. Seminar, 2. — v. Dalwigk : Funktionnentheorie, 5 ; Geodasie, 2. — Jung : Zahlentheorie, 4 ; Algebra, 2.

München. (*Universitat*). — Bauer : Algebra ; Seminar. — Lindemann : Theorie der ellipt Funktionen ; Theorie der alg. Funct ; Seminar. — Voss : Theorie der Diff. gleichgn ; Theorie der alg. Kurven ;

Seminar. — Pringsheim : Integralrechn.; Ergänzungen u. Ueb. zur Differentialrechn. — Döhlemann : Darst. Geometrie (Axonometrie, Perspektive), Uebungen dazu; Graph. Statik mit Uebgn. — Brunn : Elem. der höheren math. f. Studierende aller Fakultäten. — v. Weber : Analyt. Geometrie der Raumes mit Uebungen; Determinanten, mit Uebungen. — v. Seeliger : Theoretische Stellarastronomie. — Anding : Elem. der Astronomie. — Graetz : Mech. Wärmetheorie; Ausgew. Kapitel aus der Höheren Mechanik. — Korn : Potentialtheorie u. Kugelfunktionen.

Strassburg. (*Universität*). — Reye : Ausgew. Kapitel der höheren synthetischen Geometrie, 3; Theorie der Kräfte die nach Newtons Gesetz wirken (Potentialtheorie), 3; math. Seminar, 2. — Becker : Sphärische Astronomie mit Anw., 3; Theorie der Ausgleichung der Beobachtungsfehler, 2; Astr. Uebungen auf der Sternwarte. — Weber : Bestimmte Integrale und Einl. in die Funktionentheorie, 4; Höhere Algebra, 4; math. Oberseminar, 2. — Roth : Diff. u. Integralrechn., 3; Ueb dazu, 2; Analyt. Geom. der Ebene, 3. — Wislicenus : Historische Einl. in die Astronomie, 1; Dioptrik, 1; Besprechung der neuesten literarischen Erscheinungen auf astronomischem Gebiete, 1. — Disteli : Analyt. Geometrie des Raumes, 3; Darst. Geometrie mit Ueb. 4; math. Seminar, 2. — Epstein : Theorie und Anwendung der Determinanten, 2.

Tübingen. (*Universität*). — v. Brill : Analyt. Geometrie des Raumes, 3; Theorie der Krümmung der Flächen, 4; math. Seminar, 2. — Stahl : Niedere Analysis, 2; Ueb. dazu, 1; Höhere Analysis, 3; Ueb. dazu, 1. — Maurer : Darst. Geometrie, 2; Ueb. dazu, 2; Einwertige Funktionen einer komplexen Variabeln, 2; Ueb. dazu, 1. — Waitz : Populäre Astronomie, 2; Theorie der Lichtes, 3; Ueb. dazu, 2.

Würzburg. (*Universität*). — Prym : Integralrechn., 6; Uebungen dazu, 2; Ausgew. Kapitel der Funktionentheorie, 2. — Selling : Sphärische Astronomie, 2; Wahrscheinlichkeitsrechnung, Fehlerausgleichung, Versicherungswesen, 2. — Rost : Darst. Geometrie, 4; Analyt. u. synth. Geometrie der Kegelschnitte, 4; Anw. der Infinitesimalanalysis auf Geometrie, 4; Seminar, 2.

AUTRICHE

Graz. (*Universität*). — Frischauf : Diff.-u. Integralrechn. u. deren Anwendung auf Geometrie, 5. — v. Dantscher : Anal. u. projekt Geometrie der Ebene, 5; math. Seminar, 2. — Hillebrand : Mechanik des Himmels, 2; Theorie der astronom. Instrumente, 3.

Innsbruck. (*Universität*). — O. STOLZ : Theorie der Funktion von komplexen Veränderlichen, mit Ueb., 3 ; Arithmetik. die Lehre von den reellen Zahlen, mit Ueb., 4. — WIRTINGER : Höhere Algebra, 3 ; Abel'sche Funktionen, 3 ; math. Seminar, 2. — ZINDLER : Analyt. Geometrie der Ebene et der Raumes, 2 ; Liniengeometrie, 2 ; math. Seminar, 1. — v. OPPOLZER : Sphärische Astronomie.

Prag. K. (*k. Karl Ferdinands Universität*). — PICK : Diff. gleichungen, 3 ; Diff.-u. Integralrechnung, 2 ; math. Seminar, 2. — GMEINER : Analyt. Geometrie, 3 ; Ueber Zahlenkongruenzen, 2. — WEISS : Elem. d. darst. Geometrie. — WEINECK : Theorie der Passagen-Instrumenten, 3 ; Ueb. im astron. Beobachten, 2 ; Finsternisse, 1. — OPPENHEIM : Präzession, Nutation u. Veränderung der geogr. Breite, 4.

Wien. (*Universität*). — v. ESCHERICH : Elem. der Diff.-u. Integralrechnung (unter besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Naturhistoriker, Physiker, Chemiker, Mediziner und Versicherungsmathematiker), 5 ; Uebungen dazu, 2 ; Proseminar f. math., 1 ; Seminar f. Math., 2. — GEGENBAUER : List nicht. — MERTENS : Zahlentheorie, 5 ; Uebungen im math. Seminar, 2 ; math. Proseminar, 1 ; Wahrscheinlichkeitsrechnung, 3 ; mathem. Statistik, 3. — KOHN : Synthetische Geometrie, 4 ; Uebungen dazu, 1 ; Invariantentheorie mit geom. Anw., 2. — BLASCHKE : Einführung in die math. Statistik, 3. — ZSIGMONDY : List nicht. — DAUBLEBSKY v. STERNECK : Algebra, 3. — CARDA : Ausgew. Kapitel aus dem Gebiete der Berührungstransformationen, 2. — PLEMELJ : Potentialtheorie, 2. — WEISS : Prakt. Astronomie, 4. — v. HEPPERGER : Theorie der speziellen Störungen, 3 ; Bahnbestimmung der Doppelsterne, 2. — SCHRAM : Interpolationsrechnung und mechanische Quadratur, 2. — Prey : Theorie des Saturnringes, 1 ; Das geometrische Nivellement. — HARTL : Kartographie mit Konstruktionsübungen, 4.

SUISSE

Basel (*Universität*). — H. KINKELIN : Alg. Analysis, 3 ; Geom. Anwendungen der Diff. Rechng., 3 ; Bestimmte Integrale, 2 ; Warscheinlichkeitsrechn, 3. — K. VON DER MÜHLL : Einltg. in die math. Physik mit Ueb., 5 ; Ausgew. Kap. der math. Phys., 4 ; Uebungen, 2. — E. HAGENBACH-BISCHOFF : Behandl. phys. Aufgaben im math. Seminar, 2. — R. FLATT : Liniengeometrie.

Lausanne. (*Université*). — AMSTEIN : Calc. diff. et integral, 5 ; Exercices, 2 ; Th. des fonct. ellipt., 3 ; Elem. du calc. diff. et int. (cours destiné aux élèves en sciences phys. et nat., 3 ; Calc. int., intégrales définies et séries, 2. — JOLY : Geom. anal., 2 ; Geom. descr., 2 ;

Epures. 4; Th. des nombres, 2. — MAYOR : Mécanique rat.. 4; Exercices, 1; Phys. math., 2; Statique graph., II 2; IV 2. — MAILLARD : Astronomie, 2; Mécanique céleste, 1; Calc. des prob., 1.

Zurich. (*Ecole polytechnique, section normale*). — HIRSCH : Integralrechnung, 4; Repet., 4; Uebungen, 2. — FRANEL : Calcul intégral, 4; Répét., 1; Exercices, 2. — HERZOG : Mechanik, I Teil, 6; Repet., 1; Uebungen, 2. — W. FIEDLER : Darst. Geometrie, 2; Répét., 1; Uebungen, 4. — LACOMBE : Géométrie descriptive, 2; Répét., 1; Exercices, 4. — W. FIEDLER : Anal. Geometrie der Lage, 2. — GEISER : Ausgewählte Probleme der analyt. Geometrie; Ebene Kurven, 4. — HURWITZ : Ellipt. Funkt., 4; Funktionentheoretische Uebungen, 2. — RUDIO : Zahlentheorie. — HIRSCH : Th. der lin. Diff. gleichungen, 2. — WEBER : Zylinder-und Kugelfunktionen und ihre Verwendung in der Physik, 2. — WOLFER : Geographische Ortsbestimmung, 3; Ueb, im astronomischen Beobachten; Einleitung in die Astrophysik. — BEYEL : Schattenlehre, 2; Perspektive, 2. — J. KELLER : Repet. der darst. Geom., 2; Repet. der Diff. u. Integralrechnung, 2. — KRAFT : Angewandte Mechanik, Bewegungsmechanismen. — REBSTEIN : Versicherungsmathematik.

Zurich. (*Universität*). — BURKHARDT : Lin. Diff.-gleichungen, 4; Vektoranalysis, 2; Math. Behandl. period. Naturerscheinungen, 2; Math. Seminar. 2. — WEILER : Anal. Geometrie, II, 2; Darst. Geom., II, 3; Math. Geographie, 2; Kartenprojektion 2. — KRAFT : Allg. Mannigfaltigkeitstheorie, 4. — GUBLER : Zahlentheorie, 2; Polit. Arithm. mit Ueb., 2; Math. Unterricht in der Mittelschule, 2.

CHRONIQUE

Congrès des mathématiciens allemands.

La prochaine assemblée annuelle de l'Association allemande des mathématiciens (*Deutsche Mathematiker-Vereinigung*) aura lieu à *Cassel*, du 20 au 26 septembre prochain, en même temps que la soixante-quinzième réunion des naturalistes et médecins allemands. Les communications figureront à l'ordre du jour de la section I (Mathématiques, Astronomie et Géodésie) de ladite réunion. Elles devront être empruntées, le plus possible, à *la théorie des fonctions abéliennes* d'une part, ou à la *mécanique théorique* d'autre part.

La « Gaceta de Matematicas elementales »

Sous ce titre paraît une nouvelle publication périodique espagnole, à laquelle la rédaction de l'*Enseignement Mathématique* envoie ses vœux de prospérité les plus sincères. Elle est dirigée par M. le Docteur A.-O. Obejero et paraît mensuellement depuis le début de l'année 1903.

Ernest Duporcq.

C'est avec une douloureuse stupeur que nous avons appris la mort d'Ernest Duporcq. Je suis un de ceux qui sont allés, il y a deux mois à peine, le saluer dans l'église Saint-François-Xavier, lors d'une union qui semblait être pour lui la garantie d'un bonheur durable et mérité. Qui pouvait prévoir qu'il ne serait plus, si peu de temps après cette belle journée !

Duporcq était un géomètre dans la véritable acception du mot, un disciple de Chasles et du colonel A. Mannheim. Il nous laisse un traité de géométrie moderne, un grand nombre d'articles séparés ayant presque tous trait à la géométrie et notamment un important mémoire sur le déplacement des figures dont les différents points décrivent des courbes sphériques. Cette dernière étude a été mise récemment au concours par l'Académie des Sciences et la lutte pour le prix paraissait déjà se cantonner entre deux candidats tout au plus, dont était Duporcq.

Rappelons aussi que Duporcq a été secrétaire du dernier Congrès des Mathématiciens et que, lors de la mort d'Antomari, il reprit la part qu'avait ce dernier à la direction des *Nouvelles Annales*.

N'est-ce pas une étrange fatalité que de voir Duporcq mourir si peu de temps après son prédécesseur.

La Rédaction de l'*Enseignement mathématique* offre respectueusement à sa veuve et aux siens ses affectueuses et sincères condoléances.

A. Buhl.

CORRESPONDANCE

A propos d'une note récente sur la Géométrie générale.

Un correspondant de l'*Enseignement mathématique* a fait observer, en s'appuyant sur un exemple, que c'est à tort que certains géomètres pensent que la géométrie projective est indépendante de la théorie des parallèles et que ses théorèmes doivent subsister sans modification dans la géométrie non-euclidienne.

Il me semble que les géomètres ainsi visés pourraient peut-être opposer à l'objection élevée la réponse suivante :

La conception de l'infini géométrique comporte une grande part d'arbitraire. Rien n'empêche, par exemple, de concevoir l'espace comme constitué par des points, les uns situés à *distance* finie, les autres à distance infinie, ceux-ci étant définis comme étant inaccessibles au moyen de déplacements sans déformation.

Dès lors, deux lignes droites situées dans un même plan *se rencontrent toujours* à distance finie ou infinie ; une ligne droite peut être considérée comme une ligne fermée : les plans, ainsi que les surfaces algébriques à branches infinies, doivent être considérées comme des surfaces fermées.

Cette conception (et n'est-ce pas la plus satisfaisante au point de vue de la généralité des propositions, tant en *Analysis situs* qu'en géométrie projective ?) revient à admettre que, si l'on considère un système de coordonnées projectives dans l'espace (et l'on sait que de tels systèmes peuvent être établis indépendamment de toute idée de distance), à tout groupe x, y, z de trois valeurs réelles de ces coordonnées, y compris $\pm\infty$, correspond un point de l'espace, et réciproquement.

Les systèmes de coordonnées vulgaires, basées sur la distance euclidienne, sont des cas particuliers des systèmes projectifs et jouissent par conséquent des mêmes propriétés.

Mais il n'en est pas de même des systèmes qui seraient basés sur la notion de distance lobatchewskienne. Celle-ci est effectivement une fonction logarithmique des coordonnées projectives et peut, pour des valeurs réelles de ces coordonnées, prendre des valeurs imaginaires, de sorte que, avec un système de coordonnées lobatchewskiennes, la solution commune aux équations de deux lignes droites situées dans un même plan, mais ne se rencontrant pas (au sens lobatchewskien),

est représentée par des valeurs imaginaires (représentant des points de l'infini lobatchewskien), fait analytique qui n'est en rien contradictoire avec la conception de l'espace exposée plus haut.

Ce fait est corrélatif de la propriété de $\log x$ de prendre une série de valeurs imaginaires, pour passer de $+\infty$ à $-\infty$, x variant d'une manière continue de $-\infty$ à 0.

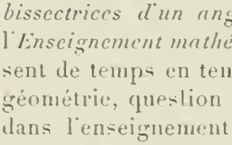
En résumé, les hypothèses métriques n'interviennent dans la conception même de l'espace ponctuel, considéré comme une variété numérique, que parce qu'il s'établit une confusion entre les propriétés de l'espace et celles de certaines coordonnées — du moins c'est ainsi que nous nous représentons l'état de cette question. G. COMBEBIAC.

Lettre à M. Laisant, à propos de son article sur les bissectrices d'un angle.

Université d'Edinburgh, le 12 novembre 1902.

Cher Monsieur,

J'ai pris beaucoup d'intérêt à la lecture de vos *Remarques sur les bissectrices d'un angle* publiées dans le numéro de juillet 1902, de l'*Enseignement mathématique*. Le sujet se rattache aux travaux qui paraissent de temps en temps sur l'introduction des quantités négatives en géométrie, question appelée à jouer un rôle de plus en plus important dans l'enseignement des mathématiques élémentaires. Une attention soutenue portée sur les grandeurs géométriques négatives éviterait souvent, je crois, beaucoup de difficultés qui se présentent dans la pratique. Plusieurs soi-disant démonstrations de la géométrie analytique élémentaire ne sont pas du tout des démonstrations mais bien d'heureuses coïncidences avec les formules algébriques qui s'appliquent nécessairement à tous les cas. Comme exemple, je citerai seulement quelques-unes des démonstrations qu'on donne pour l'expression de l'aire du triangle en fonction des coordonnées de ses sommets. Dans la plus élémentaire, fondée sur la distance entre deux points (x) et (x') prise sous la forme $\sqrt{\Sigma(x-x')^2}$, on introduit la possibilité d'un signe moins qui dans certaines circonstances paraît laisser un doute.

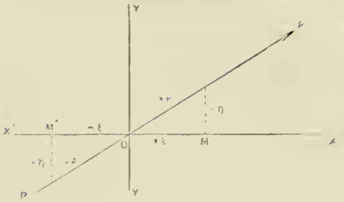


En premier lieu qu'entend-on par l'angle de deux droites? Avant de pouvoir considérer l'angle nous devons préalablement diriger les droites et en choisir une comme base.

Ainsi l'inclinaison de $\overline{OQ}$ sur $\overline{OP}$ où l'angle $\widehat{POQ}$ est la rotation nécessaire peut amener $\overline{P'OP}$ sur la direction $\overline{Q'OQ}$.

Les cosinus directeurs d'une droite fournissent un moyen parfait d'interpréter la direction de cette droite. Pour abréger je me borne au cas de droites situées dans un plan passant par l'origine.

Si $\overline{OP}$ est le sens positif de la droite, c'est-à-dire qu'une mesure faite sur cette droite soit prise avec le signe $+$ dans la direction OP et avec le signe $-$ dans la direction OP'.



Alors les cosinus directeurs de la droite sont

$$\alpha = \frac{\xi}{\rho}, \ \beta = \frac{\eta}{\rho}$$

où (ξ, η) est un point quelconque R pris sur la droite et ρ la longueur dirigée OR.

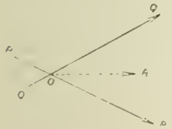
Ainsi

$$\frac{-\xi}{-\rho} = \frac{+\xi}{+\rho}.$$

Pour la droite POP', ces cosinus directeurs sont changés de signe. On a de semblables résultats dans l'espace à trois dimensions.

A ce point de vue rien ne pourrait être plus élégant que votre recherche des cosinus directeurs des bissectrices des angles de deux droites, mais je crois que vous y êtes forcément amené en discutant la question de savoir si c'est l'angle aigu ou l'angle obtus que nous bissectons.

Les droites étant dirigées par les cosinus directeurs, nous n'avons par la liberté de choisir l'angle compris entre ces droites.



Il est déjà donné par les lignes dirigées de O vers P $(\alpha\beta\gamma)$ et Q $(\alpha', \beta', \gamma')$.

Il y a plus : si le dénominateur dans les rapports $(\alpha + \alpha') : (\beta + \beta') : (\gamma + \gamma')$ est pris positivement, la bissectrice est, elle aussi, dirigée et sa direction est celle que nous prendrions naturellement pour direction positive de cette bissectrice. Les trois autres bissectrices correspondent à $-(\alpha + \alpha') : -(\beta + \beta') : -(\gamma + \gamma')$; $(-\alpha + \alpha') : (-\beta + \beta') : (-\gamma + \gamma')$; $(\alpha - \alpha') : (\beta - \beta') : (\gamma - \gamma')$, le dénominateur pour les cosinus directeurs étant pris positivement.

Ainsi $(-\alpha + \alpha') : (-\beta + \beta') : (-\gamma + \gamma')$ correspond à la bissectrice entre OP' et OQ. Si la direction de la bissectrice OR n'est pas essentielle, le même problème se résout aisément comme il suit. Soient (ξ, η, ζ) les cosinus directeurs ; puisque $\cos \widehat{POR} = \cos \widehat{ROQ}$ on a

$$\xi\alpha + \eta\beta + \xi\gamma = \Sigma\xi\alpha'$$

c'est-à-dire

$$\Sigma\xi(\alpha - \alpha') = 0. \qquad (1)$$

En outre les trois directions sont coplanaires

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) fournissent les rapports pour ξ, η, ζ,

$$\alpha + \alpha' : \beta + \beta' : \gamma + \gamma',$$

mais les équations (1) et (2) sont également vérifiées par la droite ayant pour direction $\overline{RO}$; de là l'incertitude en direction.

Pour la bissectrice de l'angle supplémentaire, nous changerions les signes de α', β', γ', pour obtenir l'angle P'OQ.

Les cosinus directeurs sont donnés par

$$(\alpha - \alpha') : (\beta - \beta') : (\gamma - \gamma').$$

Le problème le plus général de déterminer les cosinus directeurs de $\overline{OR}$ lorsque $\widehat{POR} = \frac{1}{n} \widehat{POQ}$ peut être résolu comme suit. C'est une question de trigonométrie et de théorie des équations de déterminer $u = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta$ de sorte que

$$x = \cos \left[\frac{1}{n} \operatorname{arc} \cos (\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') \right].$$

De là

$$x^2 \Sigma\xi^2 = (\Sigma\alpha\xi)^2. \qquad (1)$$

L'équation (2) est la même que plus haut. Ces deux équations correspondent à deux droites et la droite demandée doit être telle que

$$\cos \widehat{ROQ} = \{\cos (n-1) \widehat{POR}\}.$$

Dans tout problème sur la ligne droite dans un plan renfermant des mesures d'angles, l'équation d'une droite sous la forme $y = mx + c$ est d'un faible usage parcequ'une telle droite ne peut pas être une droite dirigée et l'équation represente également une certaine droite dans une direction donnée ou la même droite dans la direction opposée. C'est dû à ce fait que tang $(\pi + \theta) =$ tang θ.

Lorsque par conséquent nous cherchons à mesurer l'angle entre deux droites $y = mx + c$ et $y = m'x + c'$ et que nous obtenons

$$\operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{m - m'}{1 + mm'},$$

l'ambiguïté est due à ce fait que les droites ne sont pas dirigées. Heureusement dans les cas importants du parallélisme et de la perpendicularité cette difficulté ne s'élève pas. Quand l'équation de la perpendiculaire à une droite dans un plan ou à un plan dans l'espace se présente, c'est, je crois, une erreur d'imaginer que la perpendiculaire issue de l'origine

doive toujours être prise comme positive, car cela enlève aux considérations développées ci-dessus les avantages qu'elles présentent au point de vue des expressions algébriques.

L'équation de géométrie plane

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0,$$

signifie : la ligne telle qu'en considérant la perpendiculaire qu'on lui abaisse de l'origine, celle-ci est inclinée de l'angle θ sur l'axe des x, tandis que la distance de l'origine au pied de cette perpendiculaire est p en grandeur et en signe. Avec cette interprétation il n'y a plus de confusion possible entre les deux droites

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0.$$
$$x \cos \theta + y \sin \theta + p = 0,$$

car l'essentiel est le sens ou la direction de la perpendiculaire.

Remarquons aussi que

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$$
$$x \cos (\theta + \pi) + y \sin (\theta + \pi) + p = 0$$

représentent concurremment la même droite. Les deux perpendiculaires ont des sens opposés sur la même droite de base. La droite elle-même dans ce cas est non dirigée mais ceci est dû à cette particularité qu'elle est perpendiculaire à la droite menée par l'origine. Si au lieu d'être perpendiculaire à la droite menée par l'origine, la droite est inclinée de l'angle θ, cette dernière est encore dirigée et son équation est

$$x \sin (\theta + \varphi) - y \cos (\theta + \varphi) - p \sin (-\varphi) = 0.$$

Cette équation est toujours distincte de

$$x \sin (\theta - \varphi) - y \cos (\theta - \varphi) - p \sin (-\varphi) = 0$$

sauf lorsque $2\varphi = \pi$.

De semblables considérations s'appliquent dans l'espace à l'équation

$$x \cos \theta + y \cos \varphi + z \cos \psi - p = 0.$$

Charles TWEEDIE (Edinburgh).

Réponse à M. Cailler au sujet du calcul des probabilités.

Nous remercions vivement M. Cailler, de l'attention qu'il a bien voulu donner à l'article très audacieux qu'a publié de nous cette revue exclusivement mathématique, alors que nous ne sommes pas des

mathématiciens. Mais, nous l'avons montré, cette partie des mathématiques, le calcul des probabilités, a pris une très grande valeur dans tous les ordres de sciences. Or nous craignons que parfois, en restant trop près des formules, on ne s'élève pas assez au-dessus d'elles pour en bien pénétrer le sens plus lointain, à l'aide du bon sens et de la raison. Nous nous excusons des erreurs que nous avons pu faire. Cependant il semble que les objections de M. Cailler ne portent pas entièrement.

1° M. Cailler montre, contre nous, dit-il, que les deux formules

$$(1) \qquad P_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} e^{-\frac{h^2}{2mpq}} \quad \text{et} \quad (2) \quad P_2 = \Theta\left(\frac{h}{\sqrt{2mpq}}\right)$$

n'ont pas besoin d'être équivalentes, puisqu'elles signifient deux choses très différentes, la première, la probabilité d'un écart égal à h, la deuxième, la probabilité d'un écart moindre.

Mais nous n'avons jamais prétendu que ces deux formules dussent être identiques.

C'est à l'équivalence de la formule (3)

$$(3) \qquad 1 - \Theta\left(\frac{h}{\sqrt{2mpq}}\right).$$

et de la formule (1) que nous nous sommes attaqués, cette formule (3) étant inverse de la formule (2) et mesurant la probabilité d'un écart égal ou supérieur à h.

Et nous n'inventons pas cet usage de la formule $1 - \Theta(t)$ puisque M. Bertrand l'emploie couramment.

A vrai dire la formule (3) ne doit pas être identique à la formule (1) puisque la premiere mesure seulement la probabilité d'un écart égal, la seconde la probabilité d'un écart égal ou supérieur à h. Et là a été notre négligence. Nous avons considéré la premiere formule comme mesurant la probabilité d'un écart au moins égal à h, et non tout à fait égal à h.

Il reste cependant que la formule (1) qu'on a employée dans les applications, n'a guère d'intérêt et que, seules, les formules (2) et (3) sont fécondes. Nos conclusions sont maintenues, mais nous avions fait une remarque erronée, nous le reconnaissons franchement.

2° Pour ce qui est de la probabilité du joueur, nous maintenons entièrement nos conclusions, non que le joueur ait raison, car, et c'est la l'objection la plus forte à son calcul, on ne peut parler de probabilité pour un cas.

M. Cailler reproduit tout simplement l'argumentation de M. Poincaré sur les séries également probables de six rouges et une noire d'une part, et de sept rouges d'autre part.

Raisonnons un peu. Nous supposons une succession illimitée de

rouges et de noires. Nous voulons dans cette succession déterminer une série. Il y a deux procédés : ou je vais prendre sept coups consécutifs, les considérer comme une série et en chercher la probabilité, et alors nos adversaires ont raison. Ou je vais, au lieu de ce procédé arbitraire, chercher une série dans cette succession. Qu'est-ce qu'une *série* pour la raison? C'est une consécution d'éléments homogènes. Qu'y a-t-il d'homogène dans cette succession? ou des éléments rouges ou des éléments noirs. Alors, je m'en vais prendre une consécution de rouges, par exemple une série de 7 rouges. Comment ma série est-elle définie, à l'origine? par l'apparition d'une rouge *après une noire*; à la fin? par l'*apparition d'une noire* après une rouge. Ma série ne peut comprendre que des rouges, la noire précède l'ouverture de la série et la clôture. Dire donc série de six rouges et une noire, c'est dire série de six rouges et série de noires commençante (pouvant ne comprendre qu'un terme, ou plus).

Si l'on ne procède pas ainsi, il n'y a qu'arbitraire et irrationnel. Par quoi est précédée la série donnée par M. Cailler : Rouge, *noire*, *noire*, *noire*, rouge, *noire*, rouge? Par quoi est-elle continuée? Pourquoi considérer cette série? Il n'y a pas de raison, il n'y a pas de série unique. Il y a là une série d'une rouge, une série de trois noires, une série d'une rouge, une d'une noire, une d'une rouge (bien qu'en général on conserve le mot série pour une consécution multiple).

Il nous semble qu'il y a là un exemple de préoccupation tout à fait exclusive pour les formules empêchant la réflexion d'examiner la matière même de ces formules, ici la notion de *série*.

N. Vaschide et H. Piéron.

BIBLIOGRAPHIE

Em. Borel. — **Leçons sur les séries à termes positifs.** *Professées au Collège de France. Recueillies et rédigées par Robert d'Adhémar.* — Un volume gr. in-8°, 91 p.; prix : 3 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris, 1902.

En lisant ce livre on a l'impression que le rédacteur n'a pas su rendre avec assez de précision l'idée du professeur. Bien souvent, en effet, on désire plus de rigueur dans le développement des théories. Les démonstrations ne sont pas toujours exactes et la forme laisse quelquefois à désirer.

Ce que le livre a de nouveau, c'est principalement l'usage de symboles propres à représenter les degrés d'infinitude des fonctions croissant plus rapidement que l'exponentielle e^x, ou moins rapidement que la fonction logarithmique $\log x$.

Il y a cependant, une question fondamentale qui demeure irrésolue, à savoir : les critères sur lesquelles les auteurs s'appuient pour définir l'égalité ou la majorité de la croissance des fonctions. Ces critères peuvent être établis d'une infinité de façons différentes indépendamment de la représentation symbolique des degrés d'infinitude. Mais, lorsqu'on ne dit pas expressément le contraire, il semble toujours sous-entendu que l'on se rapporte à la méthode classique qui se rattache à la considération du quotient des fonctions qu'on veut comparer.

M. Borel parait, au premier abord, ne pas vouloir s'écarter de cette méthode. Non seulement, en effet, il ne s'occupe pas exprès de la question, mais dans plusieurs endroits il semble bien accepter la solution générale que je viens de rappeler.

Je citerai les phrases :

« Notre but est d'étendre la théorie des ordres d'infinitude à des cas où la valeur que l'on serait conduit à lear attribuer serait zéro ou l'infini.

« Dans ce but, nous conviendrons de dire que, x étant l'infiniment petit principal... »[1].

« Dans tout ceci, certains coefficients constants sont sans importance. Ainsi e^x, ou $3e^x$, c'est pour nous la même chose, car c'est le même mode de croissance »[2].

En laissant donc de côté la nature et les lois de formation des symboles qu'on introduit dans le livre, on pense toujours que deux fonctions auxquelles

---

[1] Cf. *Sur les ordres d'infinitude*, Note publiée par le *Bull. de la Soc. Math. de France*, 1901, p. 154.

[2] Cf. la note à la p. 35 du texte

va être attribué un même symbole, seront censées avoir un rapport fini et réciproquement.

Il n'en est rien. Dès la première notation qu'il propose, c'est-à-dire, lorsqu'il définit l'ordre (μ) par la condition que l'on aie, quel que soit le nombre positif ε,

$$\lim_{x=\infty} \frac{y}{x^{\mu+\varepsilon}} = 0, \qquad \lim_{x=\infty} \frac{y}{x^{\mu-\varepsilon}} = \infty,$$

(p. 36) on se représente des fonctions comme :

$$y_1 = x^{\mu+\varepsilon(x)}, \quad y_2 = x^{\mu-\varepsilon(x)} \quad \left(\lim_{x=\infty} \varepsilon(x) = 0\right)$$

qui ont même ordre (μ), et dont le rapport $\frac{y_1}{y_2}$ est infini toutes les fois que la fonction $\varepsilon(x)$ décroît assez lentement pour que

$$\lim_{x=\infty} \log x.\ \varepsilon(x) = \infty.$$

L'introduction des symboles ω^n ne fait qu'augmenter cette indétermination.

On le voit très aisément et je n'insiste pas là-dessus. Je veux seulement signaler la *Remarque II* (p. 43), à la suite de laquelle *le degré 2 de la fonction* x^2 *se trouve différencié du degré* $\frac{1}{\omega}c\omega 2$ *de la fonction* cx^2, *et la différence des degrés de deux fonctions telles que* z *et* $y = z + 1$ *est mise en évidence par les symboles* ω^{-3}, $\omega^{2}e^{\omega^{-1}}$.

Cette remarque, en évidente contradiction avec la note à la page 35 que j'ai citée, ne pourrait s'expliquer sinon en admettant que : *Deux fonctions ont même degré alors et alors seulement si l'on peut leur attribuer un même symbole.*

A part l'arbitraire d'une telle définition, il faut observer en premier lieu que : *Les lois de compositions des symboles de M. Borel ne donnent aucun critère pour ordonner l'ensemble de ces symboles, et que pourtant la question de savoir laquelle entre deux fonctions données a la plus grande croissance, demeure irrésolue même lorsqu'on connaît les symboles qu'il faut leur attribuer.*

En outre, dans le courant de l'œuvre, en voulant donner des critères pour l'assignation de ces symboles, voire même les déterminer dans des cas particuliers ; on se sert de la connaissance du symbole attribué à une autre fonction à laquelle la fonction à étudier est dite *comparable* ou *du même degré*, ce qui nous porte à un cercle vicieux.

D'autant plus que maintes fois les fonctions dont il s'agit ne sont nullement comparables, si avec ce mot on se rapporte à la théorie ordinaire des infinis :

Je citerai les pages 64, 82, où l'on lit :

..... *en remarquant que* $n!$ *est comparable à* n^n, *donc* $(n!)^p$ *à* n^{np}.....

..... *puisque* p^p *est asymptotiquement peu différent de* $p!$.....

Et je ferai observer que *le rapport* $\frac{n^n}{n!}$ *croît plus rapidement que toute puissance finie* n^p *de* n.

En somme, dans ce livre, on n'a pas conservé les définitions classiques d'égalité et d'inégalité dans les ordres d'infinitude, on n'en a pas donné des nouvelles, et l'on a, avec cela, introduit des symboles avant de bien préciser les idées qu'ils doivent représenter.

L'utilité de ces symboles est donc bien douteuse, et les propositions où ils sont employés demandent à être éclaircies.

Par exemple, lorsqu'on trouve à la page 58, la proposition :

..... *Le degré de* f' (x), *en fonction de* f (x) *est moindre que :*

$$1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \ldots + \frac{1+\alpha}{\omega^\alpha} \quad (\alpha \leq 0)$$

.... *La limite est la croissance de la fonction idéale* .....

et à la page 70 :

.... *Si* k *est très voisin de un, le degré* $\omega \left(\frac{k}{1-k}\right)$ *est très grand* .....

On ne connaît pas le sens des mots *moindre, limite, très-grand*, etc.

Peut-être ces incohérences, seraient-elles moins évidentes avec une rédaction plus soigneuse.

Par exemple, à la page 45, on veut tirer des critères, qu'on dit très utiles pour la détermination des ordres d'infinitude, de la considération, manifestement fausse, que *si* $\frac{y}{y'}$ *est infiniment grand*, $\frac{\int^x y\,dx}{y}$ *sera de même degré*. (Il suffit de prendre $y = \log x$ pour voir tomber en défaut cette assertion).

Encore : la démonstration qui se trouve à la page 59 et qui a une importance capitale pour la belle méthode du *terme maximum de M. Borel*, n'est pas complète.

On n'a pas tenu compte du fait que la quantité ε^m, dans la formule

$$\left(1 + \frac{m - m'}{m}\right)^{2m} = e^{(m-m')^p} + \varepsilon_m$$

est négative et variable avec $m - m'$.

A la page 61, on n'a pas observé que si on fait, p et $\varphi(n) = n^{\frac{1}{lg\ lgn}}$, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{e^{\frac{1}{\log\ \log n}}}{e^{\log\ \log n} - 1} = \infty$$

et que la somme $1 + e^{-p} + e^{-2p} + \ldots$, n'est plus finie.

Ajoutons pour terminer que, quant à la forme de l'exposé, on rencontre un certain nombre d'incorrections et que les fautes d'impressions sont assez nombreuses pour témoigner de la hâte avec laquelle ce livre a été rédigé et publié.

Ettore Bortolotti (Modena).

Maurice Godefroy. — **Théorie élémentaire des séries.** Un volume de 266 p. gr. in-8°, prix : 8 francs. Gauthier-Villars, Paris 1903.

En groupant les points principaux de la théorie des séries, M. Godefroy a écrit un livre utile qui sera apprécié. On ne saurait assez recommander

l'étude des questions qui y sont traitées. Les séries interviennent dans presque tous les problèmes posés par l'analyse, elles sont d'un usage constant en astronomie et en physique.

Dans le premier chapitre de son livre M. Godefroy définit les notions si importantes de limite et de continuité : limite d'une variable, limite d'une fonction, fonction continue dans un intervalle, à droite, à gauche, etc., fonction dérivable. Ce chapitre sert d'introduction.

Les principes de la théorie des séries et les propriétés des séries à termes constants sont exposés dans le chapitre suivant. Il contient les définitions des notions fondamentales, les règles de convergence les plus usuelles et les points principaux de la théorie des séries alternées et des séries de séries.

On y remarquera quelques exemples curieux (entre autres la série de Césàro et celle de Lambert). L'auteur passe ensuite à la théorie des series à termes variables et plus particulièrement à celle des séries entières. La notion si délicate de convergence uniforme est élucidée par un exemple que l'on doit à Paul du Bois-Reymond.

A la théorie des séries entières est rattachée celle des polynômes de Legendre et de la série hypergéométrique. L'auteur établit ensuite les formules de Taylor et de Mac-Laurin.

Les trois derniers chapitres, qui forment les deux tiers du livre, sont consacrés à l'étude détaillée de la fonction exponentielle, des fonctions circulaires et de la fonction gamma. La fonction exponentielle et les fonctions circulaires sont définies au moyen de leurs développements en série, ce qui n'est pas nouveau, mais la façon dont l'auteur en déduit les propriétés caractéristiques de ces fonctions, la clarté de l'exposition, le grand intérêt des questions qui sont traitées dans cette partie du livre, en rendent la lecture particulièrement attachante. Comme application, l'auteur étudie les polynômes de Hermite, les fonctions de Bessel, les polynômes de Bernoulli. Signalons encore une théorie des logarithmes et des fonctions hyperboliques et la démonstration de la transcendance du nombre e.

Le dernier chapitre est consacré à la fonction gamma définie comme limite d'un produit. Ce chapitre est curieux et sera lu avec intérêt.

On trouve à la fin des chapitres de précieuses indications bibliographiques et des exercices.

Ajoutons que l'auteur se borne à la considération du domaine réel. Malgré cela l'ouvrage de M. Godefroy est moderne. Son caractère distinctif est la clarté et il pourra être lu par tous ceux qui connaissent les éléments du Calcul différentiel. Le livre est précédé d'une belle préface de M. Sauvage.

D. Mirimanoff (Genève).

Edouard Cannwel. — **La rotation de la terre démontrée par le pendule de Foucault; appareil des écoles**, in-8°, 35 p.; chez l'auteur, Levallois-Perret (Seine).

Cette petite brochure accompagne l'appareil imaginé et construit par M. Cannwel, pour reproduire l'expérience de Foucault dans la plus modeste école et même chez soi. Ce pendule de Foucault réduit, ce qui permet cependant de constater parfaitement la rotation apparente du plan d'oscillation, a été présenté par M. d'Arsonval, le 17 novembre 1902, à l'Académie des sciences. Le problème pratique n'était pas facile à résoudre, car la question de la suspension du fil surtout est chose fort délicate. M. Cannwel y est

parvenu par des moyens très simples et qui n'exigent qu'un peu d'attention et de soin, sans aucune habileté spéciale d'expérimentation.

La brochure, où figure en tête un portrait de Foucault, contient les notices consacrées à cet illustre physicien, par J. Bertrand et M. Gariel; la communication de Foucault sur le pendule, lue par Arago à l'Académie des Sciences le 3 février 1851; celle de M. d'Arsonval, du 17 novembre 1902, rappelée ci-dessus; des extraits des discours de M. Flammarion et de M. Chaumié, ministre de l'Instruction publique, prononcés lors de la réinstallation du pendule de Foucault au Panthéon, le 22 octobre 1902; une note très claire de l'auteur sur son appareil et quelques documents complémentaires; le tout accompagné de nombreuses figures qui achèvent de faciliter la lecture.

Grâce à l'appareil de M. Caunwel, il devient possible à tout instituteur, de *montrer* à ses élèves la rotation de la terre, en plaçant sous leurs yeux la reproduction d'une expérience célèbre, qui semblait possible seulement jusqu'ici dans des conditions très exceptionnelles et très onéreuses. Nous estimons qu'il a rendu de la sorte un important service à l'enseignement élémentaire de l'astronomie. L'installation de ce petit pendule, dans toutes les écoles, serait une juste glorification du génie de Galilée et de celui de Léon Foucault.

C.-A. L.

C. Alasia. — **I complementi di Geometrica elementare**, 1 vol. XV-244 p., 117 fig.; prix L. 1,50; Milan, Hœpli, 1903.

Ce petit volume appartient à la collection des manuels Hœpli. Voici les titres des divers chapitres qui le composent :

Vecteurs. — Généralités sur les polyèdres. — Mesure des polygones et des polyèdres. — Symétrie. — Superposition des figures. — Homothétie. — Similitude. — Maximum et minimum en géométrie. — Transversales. — Puissance d'un point par rapport à un cercle; axes radicaux, centres radicaux. — Involutions. — Pôles et polaires. — Inversion. — Les sections coniques.

Cette énumération sommaire suffit à donner une idée des ressources que présentera pour tout bon élève moyen la lecture de cet ouvrage modeste, et fort utile. L'exposition est claire, l'ordonnance est très méthodique, et plus d'un professeur n'aura qu'à y gagner.

C.-A. L.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

Archiv der Mathematik und Physik, gegründet 1841, durch J.-A. Grünert. Dritte Reihe, Herausgegeben von E. Lampe, W. Franz Meyer, E. Jahnke. Band IV, 1903 ; B.-G. Teubner, Leipzig und Berlin.

Hefte 3 und 4. — H. Weber : Theorie der reellen quadratischen Irrationalzahlen. — J. Horn : Untersuchung der Integrale einen linearen Differentialgleichung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle vermittelst successiver Annäherungen. — J.-H. Graf : Entwicklung der Funktion Log Γ(a) nach fallenden Potenzen des Arguments. — C. Beyel : Ueber Axonometrie und schiefe Parallelprojektionen. — G. Wallenberg : Ueber die Vertauschbarkeit homogener linearen Differentialausdrücke. — E. Jahnke : Auszüge aus drei Briefen Steiners an Jacobi. — E. Jahnke : Schreiben Jacobis an den Staatsminister v. Eichhorn betreffend Jakob Steiner. — J. Neuberg : Kegelschnitte aus der Dreiecksgeometrie. — H. Guradze : Räumliche geometrische Verwandtschaften und Systeme. — P. Appell (lettre à M. M. Krause) : Sur les fonctions de Bernoulli à deux variables. — M. Krause (lettre à M. Appell) : Ueber die Bernoullischen Funktionen zweier veränderlichen Grössen. — Ph. Maennchen : Ein neues Schliessungsproblem. — G. Majcen : Neue Beiträge für Dreiecksgeometrie. — H. Kühne : Die Grundgleichungen einer beliebigen Mannigfaltigkeit. — G. Kohn : Ueber das Prinzip von der Erhaltung der Anzahl. — E. Pringsheim : Ueber Brechung und Dispersion des Lichts auf der Sonne. — Rezensionen. — Vermischte Mitteilungen. — Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft.

Atti de la Reale Accademia dei Lincei. Comptes rendus publiés par l'Académie des Lincei. Année 299, 5ᵉ serie, 1902. E. Loescher et Cie. Rome.

16 novembre. — Capelli : Sulle relazioni algebriche fra le funzioni θ di una variabile e sul teorema di addizione. — Guglielmo : Intorno a due modi per determinare il raggio di curvatura della superficie dello spigolo nei coltelli delle bilancie e dei pendoli.

7 décembre. — Millosewich : Ultime osservazioni della cometa 1902 B Perrine e osservazione della nuova cometa 1902 D Giacobini. — Niccoletti : Sulle proprieta aritmetiche delle funzioni analitiche.

21 décembre. — Niccoletti : (Suite de la communication précédente). Année 300, 5ᵉ série, 1903, 4 janvier. — Niccoletti : (idem). — Picciati : Campo electromagnetico generato da una carica elletrica in moto circolare uniforme.

18 janvier. — Pascal : I problemi di riduzione di Pfaff e di Jacobi nel caso del second ordine. — Frattini : Di un gruppo continuo di trasformazioni.

1er Février. — Morera : Sulla trasformazione della equazioni differenziali di Hamilton. — Frattini : Di un gruppo continuo di trasformazioni decomponibili finitamente.

15 février. — Morera : (idem). — Burgatti : Sulle condizioni d'integrabilita di un particolare sistema d'equazioni alle derivate parziali e loro applicazione a un problema di geometria. — Dall' Acqua : Sulle terne ortogonali di congruenze a invarianti costanti.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften, herausgegeben von Gustav Eneström in Stockholm. Folge 3, Band 3, B. G. Teubner, Leipzig 1902.

Heft 3. — P. Tannery : Sur la sommation des cubes entiers dans l'antiquité. — H. Suter : Ueber die Geometrie der Söhne des Musa ben Schakir. — T. Hayashi : The values of π used by the Japanese mathematicians of the 17 th. and 18 th. centuries. — G. Loria : L'œuvre scientifique d'Ernest de Jonquières (avec un portrait).

Heft 4. — W. Schmidt : Zur Geschichte des Dampfkessels im Altertume. — P. Tannery : Simplicius et la quadrature du cercle. — H. Suter : Ueber die im « Liber augmenti et diminutionis » vorkommenden Autoren. — G. Eneström : Ein verschollener deutscher Cossist aus dem Anfange des sechzehnten Jahrhunderts. — E. Wölffing : Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von der Fresnelschen Wellenfläche. — A. Favaro : Intorno ad alcune anomalie presentate dal « Bullettino » del Principe Boncompagni. — S. Günther : August Heller. — G. Eneström : Gustav Wertheim. — A. von Braunmühl : Mathematisch-historische Vorlesungen und Seminarübungen an der technischen Hochschule in München 1897-1902. — G. Eneström : Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors « Vorlesungen über Geschichte der Mathematik ». — Vermischte historische Notizen und verschiedene Sachen.

Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris. publiés par les Secrétaires perpétuels. Cahiers hebdomadaires in-4°. Paris, Gauthier-Villars, t. CXXXVI, 1903.

5 janvier. — A. Korn : Sur les fonctions universelles dans l'espace. — M. d'Ocagne : Sur une classification nouvelle des modes de représentation nomographique des équations à un nombre quelconque de variables. — B. Mayor : Sur une représentation plane de l'espace et son application à la statique graphique.

12 janvier. — P.-J. Suchar : Sur une transformation réciproque en mécanique. — Ch. Riquier : Sur l'existence, dans certains systèmes différentiels, des intégrales répondant à des conditions initiales données. — T. Levi-Civita : Sur les trajectoires singulières du problème restreint des trois corps. — B. Mayor : Sur la statique graphique dans l'espace.

19 janvier. — P. Duhem : Sur quelques formules de Cinématique utiles dans la théorie générale de l'Elasticité. — R. Liouville : Sur la réductibilité des équations différentielles. — A. Korn : Sur les fonctions universelles du plan et des surfaces de Riemann. — C. Guichard : Sur les surfaces qui se correspondent avec parallélisme des plans tangents et conservation des aires.

26 janvier. — P. Appell : Sur quelques fonctions et vecteurs de point dans

le mouvement d'un fluide. — P. Painlevé : Sur la réductibilité des équations différentielles. — J. Boussinesq : Théorie de l'absorption de la lumière par les cristaux symétriques. — Ch. Riquier : Sur les systèmes différentiels réguliers. — T. Levi-Civita : Condition du choc dans le problème restreint des trois corps.

2 février. — J. Boussinesq : Sur l'absorption de la lumière par les cristaux symétriques et par certains milieux dissymétriques, tels que les corps actuellement isotropes solides ou fluides, sensibles au magnétisme et qu'on soumet à son action. — J.-A. Normand : Expressions algébriques approximatives des transcendantes logarithmiques et exponentielles. — E. Ferron : Essai de solution complète du problème de l'équilibre d'un corps rigide, présentant deux points fixes. — G.-A. Miller : Sur les groupes de substitutions. — D. André : Sur les couples actifs des permutations. — E. Borel : Sur l'approximation les uns par les autres des nombres formant un ensemble dénombrable. — J. Hadamard : Sur les glissements dans les fluides.

9 février. — J. Boussinesq : Sur l'extinction graduelle du mouvement à l'arrière d'une onde isolée, dans un milieu élastique éprouvant une résistance proportionnelle ou à la vitesse, ou au déplacement. — P. Duhem : Sur les équations du mouvement et la relation supplémentaire au sein d'un milieu vitreux. — E. Maillet : Sur les fonctions entières d'ordre infini et les équations différentielles. — J. Hadamard : Sur les opérations fonctionnelles. — G. Kœnigs : Sur le théorème analogue à celui de Bobillier, dans le cas du roulement d'une surface sur une surface applicable.

16 février. — J. Boussinesq : Calcul direct et simple de la vitesse de propagation du front ou de la tête d'une onde, dans un milieu ayant des équations de mouvement compliquées. — J.-A. Normand : Expressions algébriques approximatives des transcendantes logarithmiques et exponentielles. — J. Mascart : Perturbations indépendantes de l'excentricité.

23 février. — C. Guichard : Sur une classe particulière de systèmes triples orthogonaux. — L. Jacob : Sur la résistance des gaz parfaits au mouvement des solides. — L. Crelier : Sur les rayons rectangulaires des faisceaux homographiques.

2 mars. — J. Boussinesq : Sur l'absorption de la lumière par un corps, naturellement hétérotrope, auquel un champ magnétique assez intense imprime un fort pouvoir rotatoire et par un corps isotrope, qu'un tel champ rend à la fois biréfringent et dissymétrique. — G. Mittag-Leffler : Une généralisation de l'intégrale de Laplace-Abel. — J. Mascart : Perturbations qui ne dépendent que de l'élongation. — J. Hadamard : Rectification à la note du 2 février.

9 mars. — J. Boussinesq : Théorie générale de la translucidité. — P. Duhem : Sur le mouvement des milieux vitreux affectés de viscosité et très peu déformés. — C. Guichard : Sur une transformation d'une classe particulière de systèmes triples orthogonaux. — W. de Tannenberg : Sur la déformation des surfaces. — L. Autonne : Sur l'hyperhermitien.

16 mars. — H. Lebesgue : Sur l'existance des dérivées. — A. Boulanger : Sur les géodésiques des variétés à trois dimensions.

23 mars. — G. Humbert : Sur les fonctions abéliennes à multiplication complexe. — P. Duhem : Sur les ondes au sein d'un milieu vitreux affecté de viscosité et très peu déformé. — A. de la Baume-Pluvinel : Sur le spectre de la comète 1902 *b*.

30 mars. — M. Troncet : Sur un calculateur mécanique appelé *Arithmographe*.

Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas, publicado pelo F. Gomes Teixeira, Vol. XV. Co Imprensa da Universidade. Coïmbra. 1902.

N° 1. — J.-B. d'Almeida Arez : Duas classes de numeros.

Monatshefte für Mathematik und Physik, herausgegeben von Prof. G. v. Escherich und Prof. L. Gegenbauer. XIV. Jahrgang 1903. Eisenstein und Co. in Wien.

1, 2. u. 3. Vierteljahr. — H. Hahn : Zur Theorie der zweiten Variation einfacher Integrale. — E. Kohl : Ueber die Herleitbarkeit einiger Hauptsätze der Potentialtheorie aus der Stefan'schen Entwicklung der Maxwell'schen Gleichungen. — L. Klug : Desmische Vierseiten-und Kegelschnittsysteme ; Einige Sätze über die Kegel zweiter Ordnung. — W. Lewicki : Beitrag zur Theorie der Modulgruppe. — L. Hanni : Zurückführung der allgemeinen Mittelbildung Borel's auf Mittag-Leffler's *n*-fach unendliche Reihen. — F.-J. Studnicka : Ueber binomische Facultäten und deren Coefficienten. — E. Kobald : Zur mathematischen Theorie der Verzweigung von Wechselstromkreisen mit Inductanz. — G. Huber : Die Conchoidenfläche. — E. Müller : Die einem Steiner'schen Satze entsprechende algebraische Identität. — F.-J. Obenrauch : Die erste Raumcurve der Pythagoräischen Schule, ihre orthogonale und imaginäre Projection. — O. Biermann : Kinematische Deutung der additiven Periodicität ; Ueber näherungsweise Cubaturen ; Zur näherungsweisen Quadratur und Cubatur. — J. Valyi : Ueber die Fusspunktdreiecke. — R. D. von Sterneck : Ueber die zu den Configurationen 12_3 zugehörigen Gruppen von Substitutionen. — J.-A. Gmeiner : Convergenzsätze für alternierende unendliche Kettenbrüche. — W. Kapteyn : Einige Bemerkungen über Bessel'sche Functionen. — W. Lewicki : Zur Laplace'schen Theorie der Saturnringe. — W. Pixider : Notiz über Functionaltheoreme. — G. Kohn : Beweis eines Satzes über zwei cubische Raumcurven, welche dasselbe Tetraeder in gleicher Weise zum Schmiegungstetraeder haben. — Litteratur-Berichte.

Periodico di Matematica; publié par G. Lazzeri, organe de l'association « Mathesis », paraissant tous les deux mois. Livourne, R. Giusti. Abonnement annuel : L. 9. 17^e année. 1902. Fasc. 1, 2, 3, 4.

Juillet-Août. — Traverso : Sulle principali operazioni dell' analisi combinatoria formale e su alcune loro applicazioni relative allo sviluppo rapido dei determinanti et degli iperdeterminanti. — Frattini : Di un certo algoritmo per lo sviluppo della radice quadrata di un numero intero in frazione continua. — Pesci : Sopra uno degli errori prodotti dalla interpolazione semplice. — Piccioli : Sulla minima distanza di due iperspazi. — Lazzeri : Generalizzazioni riguardanti la divisibilita dei numeri e la teoria delle frazioni decimali periodiche. — Pironi : Riccardo Felici.

Septembre-Octobre. — Traverso : (Voir fascicule précédent). — Mignosi : Un problema sulla partizione dei numeri. — Delitala : Nuove proprietà dei punti notevoli del triangolo. — Questions et solutions, bibliographie.

Novembre-Décembre. — Traverso : (Voir fascicule antéprécédent). —

Delitala : (Voir fascicule précédent). — Brusotti : Dimostrazione di un teorema di calcolo combinatorio.

Janvier-Février. — Lazzarini : Sui numeri perfetti e sui numeri di Mersenne. — Pitoni : Sopra l'equazione caratteristica dei gas. — Cortesi : Equazioni a radici in progressione aritmetica. — Cattaneo : Sulla risoluzione simmetrica del sistema

$$\sum_{1}^{3} a_{rs} x_r x_s = 0, \qquad \sum_{1}^{3} b_r x_r = 0.$$

Crepas : Una successione di numeri interi. — Petites notes et Bibliographie.

Supplemento al Periodico di Matematica. Ce supplément est rédigé plus particulièrement en vue de l'enseignement des mathématiques élémentaires. Il fournit mensuellement de nombreux exercices résolus et à résoudre.

Unterrichtsblætter für Mathematik und Naturwissenschaften. Organ des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften. Begründet unter Mitwirkung von Bern. Schwalbe, herausgegeben von F. Pietzker. Jahrg. VIII, 1902 : O. Salle, Berlin.

Nos 5 et 6. — Ueber den Plan einer Encyklopädie für die Elementar-Mathematik. — E. Grimsehl : Neue Apparate und Versuchsanordnungen. — K. Bochow : Zur Behandlung der regelmässigen Vielecke. — J.-E. Böttcher : Anschauliche Kreisberechnung.

Wiadomosci matematyczne, recueil polonais publié par M. S. Dickstein ; t. VI. 1902 ; J. Sikorskie, Varsovie.

Fasc. 4. — F. Biske : Essai sur l'application de l'Hydrodynamique à la théorie des protubérances solaires — Gosiewski : Sur le problème de Saint Pétersbourg. — G. Peano : Les définitions mathématiques. — Lopuszanski : Essai sur la théorie des nombres relatifs. — Cwojdzinski : Sur les coordonnées polaires d'un point et d'une droite. — A. Denizot : J.-L. Fuchs.

Fasc. 5. — B. Niewenglowski, S. Dickstein : Sur la théorie élémentaire des nombres. — B. Niewenglowski : Un problème sur l'hyperbole. — S. Dickstein : Sur les manuscrits de T. Harriot ; Table des courbes panalgébriques. — M. Bronska : Expression des coefficients dans les développements de l'anomalie vraie, de l'anomalie excentrique et du rayon vecteur de l'orbite d'un corps céleste.

Fasc. 6. — L. Sylow : Discours prononcé à la fête du centenaire de naissance d'Abel à Christiania le 5 septembre 1902. — T. Huber : Sur la théorie des déterminants. — F. Osgood : Sur les fonctions définies par des séries infinies dont les termes sont fonctions analytiques d'une variable complexe avec des théorèmes correspondants pour les intégrales définies. — Mélanges.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Begründet 1869 von G.-C.-V. Hoffmann und gegenwartig herausgegeben von H. Schotten. B.-G. Teubner. Leipzig und Berlin. Abonnement annuel 12 M. 33 Jahrgang. 1902.

No 7. — Ed. Schumann : Die höhere Mathematik in den württembergischen Oberrealschulen. — E. Eckhardt : Elementare Abteilung der Realitats

bedingungen für die Gleichungen dritten Grades ohne Auflösung dieser Gleichungen. — K. Wolletz : Ueber die Leitlinie der Kegelschnitte. — Kleinere Mitteilungen. — Litterarische Berichte.

N° 8. — E. Fink : Die scheinbare Vergrösserung der Sonne und des Mondes am Horizont. — H. Thieme : Die Parallelenlehre im Unterricht. — W. Janisch : Die formelarme und logarithmenlose Methode der Auflösung trigonometrischer Aufgaben. — Fr. Graefe : Die Euler'sche Curve $2\,tr = \pi \sin t$ ist eine Inverse der Quadratrix. — Litterarische Berichte. — Pädagogische Zeitung.

34. Jahrgang, n° 1. — R. Hertter : Der Potenzkreis. — J. Sterba : Ueber einige goniometrische Relationen. — R. Güntsche : Die quadratische Gleichung in geometrographischen Behandlung. — Poske : Der Arbeitsbegriff im Unterricht in der Mathematik. — Litterarische Berichte. — Pädagogische Zeitung.

Zeitschrift für das Realschulwesen, herausgegeben und redigirt von Em. Czuber, Ad. Bechtel und Mor. Gloser ; 27e année, 1902 ; Alf. Hölder, Vienne.

Nos 11 et 12. — Erw. Dintzl : Der grösste gemeinsame Teiler ganzer positiver Zahlen. — E. Czuber : Die Abel-Feier in Christiania.

L. Décombe. — **La compressibilité des gaz réels.** 1 vol. in-8° de 99 pages avec figures. (Collection Scientia.) Prix : 2 francs. C. Naud, Paris, 1903.

A. R. Forsyth. — **A Treatise on Differential Equations.** 3e édition. Un vol. gr. in-8°, 511 p. ; Macmillan and Co. Londres, 1903.

C. de Freycinet. — **De l'expérience en Géométrie.** 1 vol. in-8° de xx-175 p. Prix : 4 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1903.

G. Humbert. — **Cours d'Analyse professé à l'École Polytechnique.** Deux volumes grand in-8°. 1er vol. : Calcul différentiel, Principes du calcul intégral, Applications géométriques. Prix : 16 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1902.

E. Jouffret. — **Traité élémentaire de géométrie à quatre dimensions.** 1 vol gr. in-8° de xxix-213 pages et 65 figures. Prix : 7 fr. 50. Gauthier-Villars, Paris, 1903.

F. Rouché et L. Lévy. — **Analyse infinitésimale** à l'usage des ingénieurs. Tome second : Calcul intégral, Intégrales définies et indéfinies, Séries de Fourrier, Fonctions elliptiques, Équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles, Calcul des variations. 1 fort vol. gr. in-8° de 840 p. Prix de ce tome et du précédent : 30 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1903.

Le Gérant : C. NAUD.

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE EN RUSSIE [1]

ÉTAT ACTUEL. — ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Les établissements secondaires qui se trouvent le plus étroitement liés aux écoles primaires sont représentés par des institutions spécialement pédagogiques ayant pour but de préparer leurs élèves à donner l'instruction primaire. La Russie actuelle possède deux sortes de ces établissements, conformément aux deux types principaux de l'école primaire russe.

Séminaires de Maîtres.

Afin de préparer des maîtres pour le degré inférieur de ces deux types, celui de l'école de village, le Ministère de l'Instruction publique a fondé dans différentes villes et même dans des villages des *séminaires de maîtres*, dont le nombre montait à 63, en 1891. Le contingent en est formé d'élèves qui ont terminé un cours complet de l'école primaire. Suivant les décrets du Ministère adressés aux arrondissements, l'enseignement de l'Arithmétique y a pour but : 1° d'élargir et de compléter, en les systématisant, les connaissances antérieurement acquises ; 2° de développer la facilité des élèves à calculer et à résoudre des problèmes et 3° de préparer à l'étude des méthodes d'enseignement de l'Arithmétique élémentaire. Dans ce but, l'arrondissement de Moscou a élaboré, en 1892, le *plan d'études* qui suit, comprenant un cours de trois ans et une subdivision de trois classes.

Programme d'Arithmétique. — Première classe. (trois leçons par semaine). Opérations sur les nombres entiers abstraits et con-

(1) Voir dans le t. I de cette *Revue*, sous ce même titre, l'*Aperçu historique* (p. 77-100) et L'*Etat actuel*; *enseignement primaire*, p. 420-446.

crets. Fractions ordinaires et fractions décimales. *Seconde classe.* (trois leçons par semaine). Rapports et proportions. Résolution de problèmes relatifs aux grandeurs proportionelles. Extraction de la racine carrée d'un nombre entier ou fractionnaire. Méthode d'enseignement de l'Arithmétique élémentaire. *Troisième classe.* (deux leçons par semaine). Équations du premier degré à coefficients numériques. Extraction de la racine cubique d'un nombre entier ou fractionnaire. Méthode d'enseignement de l'Arithmétique élémentaire (fin). Répétition de tout le cours d'Arithmétique.

Le programme, confirmé par le curateur de l'arrondissement de Moscou le 12 mai 1892, revu et complété en 1895, nous donne les détails nécessaires sur ce plan d'études.

Connaissances préliminaires. Numération. Théorie des opérations arithmétiques. Opérations sur les nombres entiers abstraits. Nombres concrets. Divisibilité des nombres. Fractions ordinaires. Fractions décimales. Rapports et proportions. Règles de la résolution des problèmes relatifs aux grandeurs proportionnelles. Équations du premier degré à coefficients numériques. Extraction des racines carrées et cubiques des nombres. Exercices oraux. Exercices écrits.

Cinq manuels sont recommandés comme suffisant à accomplir ce programme. Ils diffèrent très peu entre eux et comprennent la traduction russe du *Traité d'Arithmétique*, par J.-A. Serret. Quatre recueils d'exercices sur l'Arithmétique appropriés au cours du gymnase sont indiqués en outre pour la résolution des problèmes et des exemples.

Les futurs maîtres des écoles de village suivent un *cours des méthodes d'enseignement de l'Arithmétique élémentaire* d'après le programme suivant, revu et approuvé en même temps que celui d'Arithmétique.

« Contenu du cours d'Arithmétique élémentaire et sa division par sections ; *a*) numération et opérations dans les limites de la première dizaine ; *b*) numération et opérations dans les limites de la centaine ; *c*) numération et opérations dans les limites d'un millier ; *d*) numération et opérations sur les nombres de toutes les grandeurs ; *e*) opérations sur les nombres complexes. Fondements de cet ordre du cours et buts atteints dans l'étude de

chaque section. Parallélisme dans l'ordre des matériaux d'études ; son importance. Division exemplaire du cours par les années d'études dans l'école d'une classe. Secours intuitifs dans l'enseignement de l'Arithmétique élémentaire. Méthode d'enseignement. — *Numération et opérations dans les limites de la première dizaine.* Ordre des exercices oraux. Marche des exercices dans le calcul direct et inverse. Recherche des résultats des quatre opérations à l'aide des secours intuitifs et exercices pour les apprendre. Résolution de problèmes. Connaissance des chiffres et des signes des opérations. Exercices écrits ; leur importance. Devoirs écrits indépendants. — *Numération et opérations dans les limites de la première centaine.* Connaissance de la dizaine, comme unité numérique. Notation écrite des dizaines. Exercices oraux et écrits avec des dizaines (répétition du cours précédent sur les dizaines). Numération écrite et numération parlée. Exercices d'assimilation de la numération. Quatre opérations. Formation des tables des opérations. Déduction du procédé normal de l'exécution orale des opérations. Résolution de problèmes sur toutes les opérations. — *Numération et opérations dans les limites d'un millier.* Connaissance de la centaine comme unité numérique. Notation écrite des centaines. Numération parlée et numération écrite. Procédés normaux de l'exécution orale des quatre opérations. Connaissance des termes. Procédés particuliers d'exécution des opérations. Résolution d'exemples et de problèmes. Connaissance des fractions les plus simples. — *Numération et opérations sur les nombres de toutes les grandeurs.* Unités numériques d'un millier jusqu'à un billion. Numération parlée et numération écrite jusqu'à un billion. Exercices d'assimilation de la numération. Multiplication et division d'un nombre par 10, 100, etc. Quatre opérations sur les nombres de toutes les grandeurs. Définition de chaque opération. Déduction de la règle de l'exécution par écrit de chaque opération. Exercices d'assimilation du mécanisme des quatre opérations. Méthodes des preuves des opérations. Manières particulières d'exécuter les opérations. Addition et soustraction sur les bouliers ; exercices. Problèmes avec des nombres de toutes les grandeurs : problèmes purement arithmétiques ; leur résolution conjointement avec le maître ou comme travail indépendant. Quelques problèmes typiques de

nature algébrique, leur résolution. — *Opérations sur les nombres complexes.* Notions sur la mesure des grandeurs autant que possible à l'aide des secours intuitifs. Déduction des notions de nombre concret et de nombre complexe. Étude des tables des mesures de longueur, de poids, des matières sèches, des liquides, de papier, du temps. Réduction descendante et réduction ascendante des nombres complexes. Déduction des règles de l'exécution écrite des quatre opérations sur les nombres complexes. Exercices d'opérations sur les nombres concrets : résolution d'exemples et de problèmes ; disposition des inscriptions. Résolution de problèmes sur le calcul du temps. Déduction des notions géométriques fondamentales, résultant de la considération des solides. Mesure intuitive de l'aire du rectangle. Mesure indirecte de l'aire du rectangle ; exercices. Méthode de mesure directe du volume du prisme régulier quadrangulaire ; mesure de capacité. Mesure indirecte du volume ; exercices. Résolution de problèmes. Connaissance des fractions les plus simples. — *Cours de la seconde classe de l'école à deux classes.* Répétition de la numération et des quatre opérations sur les nombres entiers abstraits et concrets. Déduction des caractères de divisibilité par les nombres 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9. Décomposition du nombre non premier en facteurs premiers. Déduction des règles de détermination du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple de deux ou plusieurs nombres à l'aide de la décomposition des nombres en facteurs premiers. Cours systématique des fractions. Connaissance des fractions décimales. Déduction des règles des quatre opérations sur les fractions décimales. Conversion d'une fraction ordinaire en fraction décimale et *vice versa*. Résolution de problèmes sur les règles de trois, d'intérêt, de change, de société et d'alliage sans avoir recours aux proportions. »

C'est surtout ce programme qui nous fait voir la lenteur énervante adoptée par les pédagogues russes pour l'enseignement du Calcul suivant la méthode concentrique dans l'étude de la numération et des opérations. Il est à craindre, qu'en s'accordant sous ce rapport avec la méthode de Groubé, celle-ci ne vienne en répéter en pratique les résultats manqués.

En même temps que les programmes que nous venons d'exposer, l'arrondissement de Moscou a introduit dans les séminaires

ceux de la *Géométrie*, de l'*Arpentage* et de leurs *méthodes d'enseignement.*

Programme de Géométrie. — Introduction. Ligne droite. Position mutuelle des lignes droites. Circonférence de cercle. Figures. Lignes proportionnelles et similitude des figures. Polygones inscrits dans un cercle et polygones circonscrits à un cercle. Mesure des aires. Lignes droites et plans dans l'espace. Polyèdres. Mesure des volumes. Exercices (1. Problèmes de calcul ; 2. Problèmes de construction. 3. Démonstrations des théorèmes, qui n'entrent pas dans le cours. 4. Formation des théorèmes réciproques et contraires ; 5. Démonstration analytique des théorèmes).

Programme d'Arpentage. — Notions sur le plan et sur le profil des localités. Classification des plans d'après leur destination. Échelle linéaire simple. Échelle composée. — Indication des points sur la surface de la Terre et alignement. Cas divers d'alignement. — Mesure des lignes ; chaîne d'arpenteur, roulette, corde. Superposition de lignes sur un plan horizontal. — Construction des lignes parallèles et perpendiculaires, à l'aide de la chaîne ou de l'équerre d'arpenteur. — Instruments destinés à mesurer les angles : boussole et astrolabe. Mesure des angles sur le terrain. Tracé des lignes droites formant un angle déterminé sur le terrain. Mesure de l'angle à l'aide de la corde. — Détermination des distances inaccessibles. — Levé de plans : 1° à l'aide de la chaîne et de l'équerre d'arpenteur ; 2° à l'aide de la chaîne et de la boussole ; 3° à l'aide de la chaîne et de l'astrolabe. — Planchette ; ses accessoires. Insertion des angles à la planchette. Détermination de la position des points à l'aide de la méthode d'intersection. Triangulation. Levée de détail. — Règles générales du tracé de plans. Signes conventionnels. Évaluation des aires d'après le plan. Division d'un champ en arpents et en portions. — Notion sur le nivellement. Niveaux les plus simples. Nivellement simple. Tracé du profil.

Connaissances abrégées de la méthode d'enseignement de la Géométrie élémentaire. — Contenu du cours primaire de Géométrie dans les écoles de deux classes et son caractère. Secours

intuitifs et méthode d'enseignement. — Déduction des notions géométriques. Contenu et étude des articles traitant des lignes droites, des angles, des figures et de la mesure des aires. — Exercices au dessin linéaire et à la mesure. Problèmes de calcul et de constructions. Devoirs écrits en classe et hors de classe. — Opérations sur le terrain. Instruments les plus simples s'employant dans ces opérations. Marche des travaux de levé et de tracé de plans.

Le *plan d'études* qui suit en explique la répartition dans les classes : « *Première classe* (2 leçons par semaine). Ligne droite. Angles. Circonférence. Figures. Arpentage. *Seconde classe* (2 leçons par semaine). Lignes proportionnelles. Similitude des figures. Polygones inscrits dans le cercle. Polygones circonscrits à un cercle. Mesure des aires. Arpentage. *Troisième classe*. (2 leçons par semaine). Lignes droites et plans dans l'espace. Polyèdres. Mesure des surfaces et des volumes. Arpentage. Connaissances abrégées de la méthode d'enseignement de la Géométrie élémentaire. Répétition de tout le cours. »

Ce qui saute aux yeux à la lecture de ces programmes, c'est tout d'abord le manque d'harmonie entre leur étendue et le temps réservé à l'étude. Si le cours des méthodes d'enseignement de l'Arithmétique nous frappe par sa lenteur surprenante, celui de la Géométrie se distingue au contraire par une rapidité vertigineuse. On est tenté de croire que les auteurs des programmes possèdent des procédés spéciaux pour faciliter et simplifier l'enseignement et l'étude de la Géométrie. Mais il n'en est rien, et la note explicative accompagnant les programmes se résume en deux indications méthodologiques fort peu définies : 1° « Le cours systématique est précédé d'un examen des solides géométriques. Cette introduction a en vue la minorité des élèves qui n'ont point du tout appris la Géométrie ; elle profite aussi à la majorité en lui donnant le modèle des leçons futures dans l'école » ; 2° « Quand il s'agit d'un théorème nouveau le professeur emploie assez souvent le procédé analytique de démonstration en y faisant participer toute la classe. Au contraire, quand il démontre un théorème déjà étudié en classe ou donné préalablement comme thème, il peut s'en tenir à la synthèse, la forme analytique

présentant plus de difficultés aux élèves surtout au début de leurs études. Ils ne sauraient même s'y exercer avec profit (ainsi que dans la démonstration exposée sous la forme d'un syllogisme complet) que dans un but purement instructif et en dernière classe ». Si, pour avoir plus de détails sur la première indication, nous nous adressons à la note explicative accompagnant le programme de Géométrie pour les écoles de deux classes, nous ne pouvons en extraire que ces quelques renseignements définissant jusqu'à un certain point cette partie du cours, mais sans donner l'exposé des méthodes employées dans l'enseignement scolaire : « Le cours commence par l'examen du cube, des prismes, des pyramides, du cylindre, du cône et de la sphère. L'examen de ces corps fait connaître les formes les plus simples, il aide à déduire les notions indiquées dans le programme et dénote la position mutuelle des lignes, les différentes sortes d'angles et de figures. »

Le manque de données méthodologiques positives noté dans la première indication s'allie dans la deuxième aux données purement négatives. Par exemple, c'est un fait anormal que la méthode analytique y soit envisagée comme présentant le plus de difficultés aux élèves, et l'histoire de la science ne saurait l'admettre. On en arrive à la conclusion suivante : l'enseignement contemporain ignore les formes d'analyse simples et primitives. Il n'en connaît que la forme définitive et complète, représentée dans le progrès successif de l'intelligence humaine par Platon et son école. Et c'est ce degré supérieur qu'il applique à un milieu intellectuel inférieur. On comprend donc qu'il ne réussit point. Il en appelle alors à la méthode synthétique, mais celle-ci n'étant qu'un renversement de l'analyse dont elle se trouve inévitablement précédée, ne vaut pas grand'chose dans une étude élémentaire. De cette manière l'enseignement contemporain réduit la méthode démonstrative de l'exposé des vérités scientifiques presque à l'ancienne méthode dogmatique. En effet, autrefois on apprenait par cœur les règles, maintenant on cherche à apprendre par cœur la marche de démonstration du théorème. Mais comme il n'y a que l'analyse pour découvrir les démonstrations des nouvelles vérités, on est réduit à l'arbitraire et au hasard, du moment qu'on en évite les procédés. Autrefois l'oubli des règles mettait l'élève

dans une impasse, maintenant si la mémoire lui fait défaut, il n'est point en état de suppléer par ses propres combinaisons à ce que le manuel ou le professeur lui auront appris.

L'étendue du programme et le manque des moyens rationnels pour l'accomplir obtiennent des résultats en conséquence : les élèves des séminaires ne sont point à même ni d'acquérir les connaissances géométriques, ni de les faire passer aux autres. Le témoignage de Ratchinsky cité dans l'article précédent ne nous l'affirme que trop.

Nous ne possédons point de cours de Géométrie et d'Arpentage spécialement composé pour les séminaires en question. C'est pourquoi on y a introduit les mêmes livres d'étude que dans les établissements secondaires ; tous ont exclusivement recours à la synthèse. Les programmes cités plus haut en indiquent quatre. N'y trouvant rien d'original, nous nous abstenons de détails bibliographiques, mais voici l'observation que fait sur les livres de ce genre la « Note explicative » dont nous avons déjà parlé :

« Deux tendances se manifestent dans nos cours élémentaires de Géométrie et cela dans la manière d'en disposer les bases ; parfois la planimétrie est distinctement divisée en deux parties comprenant les lignes et les figures ; certains manuels au contraire se hâtent de donner la notion du triangle et basent là-dessus les démonstrations qui suivent ».

Tout en admettant les deux groupes de manuels, les auteurs de la « Note » préfèrent cependant la tendance du premier ainsi qu'ils nous le font voir dans le programme. Celui-ci indique, outre les cours de Géométrie, quatre recueils de problèmes géométriques, trois manuels d'Arpentage et trois auxiliaires pour l'enseignement de la « Géométrie intuitive ». Au nombre des premiers se trouve le livre d'Alexandroff, compilé suivant les idées de Petersen : « Les méthodes pour la résolution des problèmes de constructions géométriques », et un recueil de problèmes géométriques.

Pour en finir avec les cours de mathématiques (Géométrie, Algèbre, Trigonométrie) appropriés en Russie aux établissements secondaires, observons qu'ils sont très nombreux. Cela s'explique tout d'abord par la simplicité des procédés mis en pratique par les auteurs. On ne va point au delà des compilations des

manuels étrangers, le plus souvent français et allemands. Si l'auteur ne possède aucune de ces langues, force lui est de s'en tenir aux manuels russes.

L'École modèle. — A chaque séminaire se rattache une « école modèle » afin que les élèves puissent s'initier à la pédagogie, la didactique et la méthodique dans leur application pratique, et plus tard s'y exercer eux-mêmes. Suivant les ordres du ministère de l'Instruction publique, le maître de l'école doit être expérimenté dans l'enseignement pour savoir guider les élèves-régents dans leurs occupations pratiques. Les séminaristes visitent l'école modèle à partir du deuxième semestre de la seconde année. En troisième ils donnent eux-mêmes des leçons d'essai de toutes les branches enseignées à l'école; chacun d'eux doit servir d'aide au maître pendant une semaine et assister à toutes ses leçons. Tout séminariste de la troisième a au moins une *leçon d'essai* à donner pour les sections principales suivantes de l'Arithmétique. *Section inférieure de la première classe de l'école.* Calcul et opérations dans les limites de la première dizaine. Opérations sur les dizaines. Addition et soustraction dans les limites de la première centaine. *Section moyenne de la même classe.* Opérations sur les nombres de la première centaine. Numération et opérations dans les limites du premier millier. *Section supérieure de la même classe.* Numération et opérations sur les nombres jusqu'à un million. Opérations sur les nombres complexes. Opérations sur les fractions les plus simples. Quant aux leçons d'essai pour la Géométrie, ni le Ministère, ni les arrondissements n'en font mention.

Institut de maîtres.

Les établissements destinés à former des maîtres pour les écoles de ville ont été fondés en même temps que ces dernières, sous le nom d'*Instituts de maîtres.* Ils n'étaient que deux au début, en 1872 (à Saint-Pétersbourg et à Moscou). Dans la suite, huit villes eurent les leurs : Kazan, Orenbourg, Belgorod (gouvernement de Koursk), Théodosie (en Crimée), Glouchof (gouvernement de Tchernigof), Tifliss et Vilna. Cette dernière ville en a même deux : l'un pour les chrétiens, l'autre pour les juifs. Les

élèves qui ont fini le cours complet de l'école de ville y entrent sans examen ; les autres sont soumis à un examen d'entrée. Le cours des Instituts est subdivisé en trois classes et dure trois ans. Le programme embrasse l'ensemble de ce qu'on enseigne dans les écoles de ville, et fait particulièrement attention aux sections des sciences qui entrent dans leur programme. On y étudie théoriquement et pratiquement (ne fût-ce qu'en appendice) la Pédagogie, la Didactique et la Méthodique des différentes branches d'étude.

Au cours d'Arithmétique et de Géométrie professés à l'école de ville, l'Institut ajoute l'Algèbre élémentaire. Les trois sciences y sont enseignées d'après les programmes suivants, approuvés par le Ministère le 13 novembre 1876 pour trois ans et gardés intacts jusqu'à aujourd'hui.

Programme d'Arithmétique (extrait).— *Première classe.* « Répétition des quatre opérations sur les nombres entiers et fractionnaires (au moyen de la résolution des problèmes oraux et écrits). Méthode synthétique et méthode analytique de la résolution de problèmes. Grandeur, unité, nombre. Numération. Quatre opérations sur les nombres entiers et sur les fractions décimales. Mesures. Nombres concrets. Divisibilité des nombres. Nombres premiers et non premiers. Fractions ordinaires. Fractions décimales. Fractions continues. Rapports et proportions. Résolution de problèmes relatifs à la règle de trois, à la règle de société, etc., en employant les proportions et la méthode de réduction à l'unité. »

Programme Géométrique (extrait). — *Première classe. Cours préparatoire.* — « Entretiens sur les solides géométriques. Ligne droite et ses propriétés. Position mutuelle des deux lignes droites. Perpendiculaires et obliques. Circonférence et les lignes droites qui s'y rattachent. Résolution de problèmes. Rectangle. Mesure des aires. Parallélipipède droit rectangle. — *Cours théorique.* La notion d'axiome et de théorème. Démonstration d'un théorème. Triangles. Lignes parallèles. Circonférence. Polygones. Quadrilatères. Aires des figures rectilignes. Lignes proportionnelles. Similitude des triangles. Similitude des polygones. Lignes proportionnelles dans le cercle. — *Seconde classe.* —

Répétition d'une partie du cours précédent (lignes proportionnelles et similitude des figures). Polygones inscrits dans un cercle et polygones circonscrits à un cercle. Longueur de la circonférence et aire du cercle. Plans et lignes droites dans l'espace. Angles dièdres. Angles polyèdres. Polyèdres. Mesure des volumes des polyèdres. Trois corps ronds. Polyèdres semblables. Courbes les plus usuelles et leurs propriétés principales. Applications pratiques de la Géométrie aux opérations sur le terrain à l'aide de la chaîne, des jalons et des instruments destinés à mesurer les angles. Connaissance des instruments d'arpentage principaux. Notions fondamentales sur le levé de plans et sur le nivellement. Résolution des problèmes de construction. »

Programme d'Algèbre (extrait). — *Première classe.* « 1. Composition d'un problème : conditions données et nombre cherché. Sens de ces parties du problème. Inconnues auxiliaires dans le problème. Décomposition d'un problème composé en problèmes simples résolus par une seule opération. 2. Généralisation des problèmes. Sens du problème général. Nombre général et son expression littérale. Formule. Composition des formules dans les problèmes. Résolution de problèmes à l'aide des formules. 3. Simplifications algébriques : le coefficient et l'exposant. Réduction. Emploi des parenthèses. Calcul des formules composées. Composition de problèmes résolus par les formules données. 4. Analyse de la formule $y = a - b$ et des problèmes résolus par cette formule. Nombres négatifs. Sens des solutions négatives dans les problèmes. Généralisation des problèmes à l'aide des nombres négatifs. 5. Opérations sur les nombres négatifs. 6. Opérations sur les monômes. 7. Résolution des problèmes à l'aide des équations. Résolution des équations à une seule inconnue. 8. Résolution des équations déterminées à deux et à plusieurs inconnues. 9. Proportions arithmétiques et géométriques. — *Seconde classe.* — Opérations sur les polynômes. Résolution des équations déterminées littérales du premier degré. Puissance et racine. Extraction de la racine des monômes. Extraction de la racine carrée des polynômes. Extraction de la racine carrée ou cubique des nombres entiers ou fractionnaires. Équations du second degré. Discussion des équations déterminées du premier

degré à une seule ou à deux inconnues. Discussion de l'équation quadratique à une seule inconnue. Résolution des équations des degrés supérieurs résoluble à l'aide de l'équation du second degré. Inégalités, leurs propriétés. Résolution des équations indéterminées du premier degré à deux inconnues. »

Il y a sept leçons hebdomadaires pour l'enseignement des mathématiques en première, il y en a six dans le premier semestre de la classe suivante. Le deuxième semestre de la seconde et toute l'année de la troisième disposent de trois leçons seulement, consacrées à l'étude théorique et pratique des méthodes de l'enseignement géométrique et arithmétique. Il est à regretter que les « Programmes et plans d'études des cours professés aux Instituts de maîtres », approuvés par le Ministère, ne nous donnent que ces brèves indications mal définies :

« Le deuxième semestre (de la seconde) se passe à expliquer les principes fondementaux des méthodes de l'enseignement arithmétique et géométrique en connexion avec les leçons modèles du précepteur et les leçons d'essai des élèves, si ceux-là en ont le temps. Le troisième semestre (trois leçons par semaine). Étude des manuels théoriques et pratiques d'Arithmétique et de Géométrie. Répétition du cours d'Algèbre accompagnée de la résolution des plus difficiles parmi les problèmes qui se rapportent à toutes les sections des mathématiques antérieurement apprises. L'étude des méthodes de l'enseignement arithmétique et géométrique est jointe aux leçons modèles des élèves, ainsi que le demande le programme du diplôme du maître de ville. Les élèves doivent faire connaissance avec les plus remarquables d'entre les livres et les articles qui se rapportent à l'enseignement primaire des mathématiques ».

Pour ce qui concerne l'épreuve subie dans le but de devenir un maître d'école de ville, le Ministre de l'Instruction publique nous donne les programmes suivants.

Programme de la méthodique de l'Arithmétique (extrait). — « 1. Importance des Mathématiques et en particulier de l'Arithmétique dans l'ensemble des matières du cours secondaire. Simplicité et précision du contenu de l'Arithmétique. Liaison logique des vérités arithmétiques. Possibilité de la résolution des problèmes

au commencement du cours. 2. Aperçu historique succint sur le développement de la méthodique de l'Arithmétique. Son état jusqu'à Pestalozzi. Réformes de Pestalozzi. Méthodes des Kranqué, Diesterweg, Guentschel et Groubé (comme principale). 3. Thèses principales de l'enseignement mathématique secondaire et leur analyse. 4. Remarques méthodiques sur la résolution des problèmes oraux et écrits. 5. Étude des nombres de la première dizaine. Changements de la méthode de Groubé, proposés par Evtouchevski. Secours intuitifs. Exercices écrits avec des nombres de la première dizaine. 6. Études des nombres de la seconde dizaine. Exercices et leur ordre. 7. Étude des nombres 20-100. Problèmes oraux et écrits. Calcul des formules. Quatre opérations arithmétiques. Travaux des écoliers hors de classe. 8. Nombres complexes. Étude des mesures russes. Quatre opérations sur les nombres complexes. 9. Numération dans les limites d'un millier. Numération et opérations jusqu'à un million. Secours intuitifs. 10. Cours élémentaire des fractions ordinaires. Secours intuitifs. 11. Cours systématique de l'Arithmétique. Caractères de divisibilité. Décomposition d'un nombre en facteurs premiers. Recherche du plus petit commun multiple de plusieurs nombres. Addition, soustraction, multiplication et division des fractions. 12. Méthodique des fractions décimales. 13. Méthodes de la résolution de problèmes sur les règles de trois, etc. 14. Division du cours de l'école de ville. »

Programme de méthodique de la Géométrie. — « 1. Importance de la Géométrie dans l'ensemble des matières du cours secondaire. Moyens que l'homme emploie pour mettre en évidence les vérités géométriques : 1) observation directe, 2) mesurage, 3) déduction. Leur place dans l'enseignement primaire. Contenu du cours élémentaire. Sa division. 2. Entretiens intuitifs sur les corps géométriques. Objets et buts de ces entretiens. Exercices de dessin linéaire. 3. Notes méthodiques sur l'enseignement des théorèmes géométriques. Problèmes numériques et problèmes de construction. Leurs buts. 4. Lignes droites. Angles. Lignes parallèles. Circonférence. Exercices de dessin linéaire. 5. Triangles et polygones. Mesure des aires. Secours intuitifs. 6. Mesure des volumes. Secours intuitifs. 7. Applications pratiques de

Géométrie. Leur place dans le cours de Géométrie. 8. Système de *géométrie d'Euclide*. Système du cours secondaire de *Géométrie de Legendre*. Systèmes de l'enseignement primaire de géométrie, proposés par Diesterweg et Falqué. »

Il est aisé de voir que le programme de la méthodique de l'Arithmétique est composé d'après Groubé sans exclure toutefois la méthode concentrique pour la numération et les règles. Nous nous en assurons en y trouvant parmi les manuels recommandés, la « Méthodique de l'Arithmétique primaire » de *A.-J. Goldenberg* basée justement sur la méthode concentrique.

L'institut de maîtres et l'école de ville, tout en formant des types supérieurs au séminaire et à l'école de village, ont cependant moins de différence entre eux que ne nous en présentent leurs programmes de méthodique de la Géométrie.

Les deux types de l'école russe secondaire que nous venons d'examiner appartiennent au vaste groupe des écoles spéciales, et cela, malgré le caractère d'instruction générale qui y prédomine. Les autres écoles du même genre : écoles techniques, industrielles, celles de commerce et d'économie rurale, etc., sont encore plus spécialisées, nous ne nous y arrêterons pas. Nous passerons donc au groupe d'instruction générale des écoles secondaires. Il comprend les établissements d'étude pour les jeunes filles et les jeunes garçons. Nous commencerons par les premiers dont le cours de mathématiques est moins étendu.

Etablissements secondaires des jeunes filles.

Les établissements secondaires de jeunes filles sont répartis entre trois ministères. La plupart des gymnases et progymnases sont attachés à celui de l'Instruction publique ; les gymnases des capitales, quelques-uns de la province et tous les instituts de demoiselles appartiennent aux établissements de l'Impératrice Marie ; enfin le clergé a ses « écoles de diocèse ». Afin d'éviter les répétitions nous donnons un programme d'ensemble pour tous ces établissements.

Arithmétique. — « *Classe élémentaire* (*E. D.* [1]; quatre leçons par semaine. *G. M.*). Calculs oraux et résolution des problèmes dans les limites de la première centaine. Numération écrite jusqu'à cent. Connaissance des mesures russes les plus usitées.

Première classe (*E. D.*, *I. D.* ; quatre leçons par semaine. *G. I. p.*, *G. M.* ; trois leçons par semaine). Étude des nombres dans les limites de la première centaine (*G. I. p.*, *I. D.*). Numération. Opérations sur les nombres entiers abstraits. Opérations arithmétiques sur les bouliers (*G. I. p.*). Connaissance des monnaies et des mesures russes de longueur, de poids, etc. (*G. I. p.*, *I. D.*). Résolution orale et écrite de problèmes.

Seconde classe (*G. I. p.*, *G. M.*, *I. D.* ; 3 (4-*E. D.*) leçons par semaine). Opérations sur les nombres entiers abstraits (suite et fin). Opérations sur les nombres concrets et complexes. Problèmes sur le calcul du temps (*E. D.*). Cours élémentaire des fractions (*G. M.*, *I. D.*).

Troisième classe (*G. I. p.*, *G. M.*, *I. D.* ; 3 (4-*E. D.*) leçons par semaine). Nombres premiers et non premiers. Caractères de divisibilité. Décomposition d'un nombre en facteurs premiers. Plus grand commun diviseur. Plus petit commun multiple. Fractions ordinaires. Fractions décimales (*G. I. p.*).

Quatrième classe (*E. D.*, *G. I. p.*, *G. M.*, *I. D.* ; trois leçons par semaine). Multiplication et division des fractions ordinaires (*E. D.*). Fractions décimales (*E. D.*, *G. M.*, *I. D.*). Fractions décimales périodiques (*E. D.*, *G. M.*, *I. D.*). Résolution de problèmes relatifs à la mesure des aires et des volumes (*G. M.*). Rapports et proportions (*G. I. p.*, *G. M.*, *I. D.*). Résolution de problèmes relatifs à la règle de trois, aux intérêts, à l'escompte, à la règle de société et aux alliages (*G. I. p.*, *G. M.*, *I. D.*). Systèmes les plus remarquables des mesures et des monnaies des pays étrangers (*G. I. p.*). Application de l'Arithmétique à la tenue de livres (*G. I. p.*).

---

[1] *Abréviations conventionnelles employées pour designer les etablissements d'etude : E. D.* Ecole de diocèse ; *G. I. p.*, Gymnases et progymnases du ministère de l'Instruction publique; *G. M.*, Gymnases des établissements du l'Impératrice Marie ; *I. D.*, Instituts de demoiselles.

Cinquième classe (*E. D.*, *I. D.* ; trois leçons par semaine). Rapports et proportions. Résolution de problèmes relatifs à la règle de trois, aux intérêts, à la règle de société et aux alliages. Répétition de tout le cours d'Arithmétique (*E. D.*). Règle conjointe (*I. D.*). Généralisation des problèmes (*I. D.*). Passage de l'Arithmétique à l'Algèbre (*I. D.*).

Septième classe. G. I. p. Revision de tout le cours d'Arithmétique, avec additions nécessaires. »

Algèbre. — « *Cinquième classe* (*G. I. p.*, *G. M.*, *I. D.* : 1 1/2 leçons par semaine). — Exercices servant de passage de l'Arithmétique à l'Algèbre (*G. M.* à Moscou, quatrième classe ; à Saint-Pétersbourg, sixième classe). Caractères algébriques (*G. M.* à Moscou, quatrième classe ; à Saint-Pétersbourg, sixième classe). Détermination de la valeur numérique des quantités algébriques (*G. M.* à Moscou, quatrième classe ; à Saint-Pétersbourg, sixième classe). Réduction des termes semblables. Addition, soustraction, multiplication et division des monômes. Opérations sur les polynômes (*G. M.* à Moscou). Fractions algébriques les plus simples (ibidem). Équations du premier degré à une seule inconnue (ibidem).

Sixième classe (*G. I. p.* ; 2 (1 1/2 *G. M.*) leçons par semaine). Opérations sur les polynômes (*G. I. p.*). Élévation des monômes aux puissances deuxième et troisième. Élévation des polynômes à la puissance deuxième. Extraction de la racine carrée des nombres. Résolution des équations déterminées du premier degré à une seule ou à plusieurs inconnues. Résolution des équations du second degré à une seule inconnue (*G. I. p.*).

Septième classe (*G. I. p.* ; 2 (1 1/2 *G. M.*) leçons par semaine). Mise en équation de problèmes du premier degré et leur résolution (*G. M.* à Saint-Pétersbourg). Notions sur les expressions irrationnelles (*G. M.* à Moscou). Disparition des radicaux de l'équation (*G. M.* à Moscou). Équations du second degré (*G. M.* à Moscou). Élévation des polynômes à la puissance troisième (*G. I. p.*). Extraction de la racine cubique des nombres (*G. I. p.*). Progressions arithmétiques et géométriques (*G. I. p.*, *G. M.* à Moscou). Logarithmes et leurs applications les plus importantes (*G. I. p.*).

Géométrie. — *Première classe* (*G. I. p.*). Étude intuitive des propriétés des lignes. Ligne droite. Circonférence. Angle. Lignes parallèles. Mesure des lignes droites, des arcs et des angles.

Seconde classe (*G. I. p.*). Étude intuitive des figures. Triangles. Quadrangles. Polygones. Figures régulières. Mesures de superficie. Mesure des aires des figures rectilignes (carré et rectangle).

Troisième classe (*G. I. p.*). Étude intuitive des corps géométriques. Mesures de volume. Mesure des surfaces et des volumes des solides les plus simples. Exercices de tracé des figures et des solides.

Cinquième classe (*G. I. p.*, *G. M.*, *I. D.*; 1 1/2 leçons par semaine. *E. D.* sixième classe). Notions géométriques fondamentales. Théorèmes sur les lignes droites et les angles. Égalité des triangles. Relations entre les côtés et les angles du triangle. Propriétés de la perpendiculaire et des obliques. Applications numériques des théorèmes et des problèmes de cette partie du cours. Résolution de problèmes de construction.

Sixième classe (*E. D.*, *G. I. p.*; 2 (1 1/2 *G. M.*) leçons par semaine). Similitude des figures et leurs applications à la résolution des problèmes pratiques. Mesure des aires des figures rectilignes. Cercles. Droites, angles et figures dans le cercle. Mesure de la circonférence. Aire du cercle. Applications numériques à la mesure des aires des figures (*G. I. p.*). Solides : cube. prisme, pyramide, cylindre, cône, sphère (*E. D.*). Mesure des surfaces et des volumes des solides (*E. D.*). »

Septième classe (*G. I. p.*; 2 (1 1/2 *G. M.*) leçons par semaine). Stéréométrie. Applications numériques à la mesure des surfaces et des volumes des solides.

Nous ajouterons que l'école de diocèse n'a que six classes, la préparatoire (élémentaire) exceptée, et que les cours mathématiques des deux dernières classes de l'institut de demoiselles ne présente presque pas de différence avec les mêmes classes du gymnase de l'Impératrice Marie.

Établissements secondaires des jeunes gens.

Les établissements d'instruction générale de jeunes gens sont aussi répartis entre trois ministères : celui des Cultes (les écoles et séminaires ecclésiastiques), celui de l'Instruction publique (les progymnases, les gymnases et les écoles réales) et celui de la Guerre (les corps de cadets). Voici les parties fondamentales du programme de leurs cours de mathématiques.

Arithmétique. — *Classe élémentaire* (*Pg.*, *G.* (¹), *E. r.* ; six leçons par semaine). Quatre opérations sur les nombres entiers. Emploi des bouliers russes. Addition et soustraction sur les bouliers. Résolution écrite et orale de problèmes.

Première classe (*E. e.*, *Pg.* et *G.*, *C. c.* ; 4 (3 *E. r.*) leçons par semaine). Numération. Opérations sur les nombres entiers. Tables des mesures russes. Opérations sur les nombres complexes. Connaissance des fractions les plus simples (*Pg.* et *G.*).

Seconde classe. (*E. e.*, *Pg.* et *G.*, *E. r.*, *C. c.* ; 4 (3 *E. e.*) leçons par semaine). Nombres premiers et non premiers. Théorèmes les plus importants sur la divisibilité des nombres. Caractères de divisibilité par 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 25. Décomposition d'un nombre en ses facteurs premiers. Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple. Opérations sur les fractions ordinaires, abstraites et concrètes. Opérations sur les fractions décimales, abstraites et concrètes (*E. e.* ; troisième classe). Système métrique de mesures. Fractions décimales périodiques (*E. e.*, *C. c.* ; troisième classe). Résolution écrite et orale de problèmes.

Troisième classe (*E. e.*, *E. r.* ; 2 (4 *C. c.*, 1 *Pg.* et *G.*) leçons par semaine). Rapports et proportions. Résolution de problèmes relatifs à la règle de trois, aux intérêts, à l'escompte, à la règle conjointe, à la règle de société et aux alliages (*E. e.* ; quatrième

---

(¹) *Abréviations conventionnelles : E. e.*, Écoles ecclésiastiques ; *S. e.*, Séminaires ecclésiastiques ; *Pg.* et *G.*, Progymnases et gymnases ; *E. r.*, Écoles réales ; *C. c.*, Corps de cadets.

classe), employant les proportions et la méthode de réduction à l'unité. Répétition de tout le cours d'Arithmétique (*E. r.*).

Quatrième classe (*E. e.* ; deux leçons par semaine). Résolution de problèmes relatifs à la règle de trois, aux intérêts, à l'escompte, à la règle de société et aux alliages. Répétition de tout le cours d'Arithmétique.

Septième classe (*C. c.*). Répétition de tout le cours d'Arithmétique avec additions nécessaires.

Algèbre. — *Troisième classe* (*Pg.* et *G.*, *E. r.*, *C. c.* ; deux leçons par semaine). Exercices servant de passage de l'Arithmétique à l'Algèbre. Caractères algébriques. Détermination de la valeur numérique des quantités algébriques. Quatre opérations sur les monômes et sur les polynômes (*C. c.* ; quatrième classe).

Quatrième classe (*E. r.*, *C. c.* ; 3 (2 *Pg.* et *G.*) leçons par semaine). Décomposition d'une expression algébrique en facteurs. Plus petit commun multiple et plus grand commun diviseur de plusieurs monômes ou polynômes. Opérations sur les fractions algébriques. Opérations sur les puissances à exposants négatifs. Rapports et proportions. Résolution de l'équation du premier degré à une inconnue. Mise en équation de problèmes du premier degré à une inconnue. Résolution d'un système de deux (*C. c.* ; cinquième classe) ou de plusieurs (*Pg. G.*, *C. c.* ; cinquième classe) équations simultanées du premier degré. Mise en équations de problèmes du premier degré (*C. c.* ; cinquième classe). Élévation des monômes aux puissances et extraction des racines (*C. c.* ; cinquième classe). Élévation des polynômes au carré (*C. c.* ; cinquième classe). Extraction de la racine carrée d'un polynôme (*C. c.* ; cinquième classe). Extraction de la racine carrée (*C. c.* ; cinquième classe) ou cubique (*Pg.* et *G.* ; cinquième classe) d'un nombre.

Cinquième classe (*E. r.*, *C. c.* ; 3 (2 *Pg.* et *G.*) leçons par semaine). Résolution de l'équation du second degré à une inconnue. Mise en équations de problèmes du second degré. Relations entre les coefficients et les racines de l'équation du second degré. Propriétés du trinôme du second degré. Résolution des systèmes les plus simples de deux équations simultanées du

second degré à deux inconnues. Calcul des radicaux. Opérations sur les puissances à exposants fractionnaires. Propriétés des inéquations du premier degré (*E. r.*; sixième classe, *Pg.* et *G.*; septième classe). Résolution de l'inéquation du premier degré à une inconnue (*E. r.*; sixième classe; *Pg.* et *G.*; septième classe). Résolution de l'équation indéterminée du premier degré à deux inconnues (*E. r.*; sixième classe; *Pg.* et *G.*; septième classe). Progressions (*S. e.*; fin du programme d'Algèbre) et logarithmes (*C. c.*, *Pg.* et *G.*; sixième classe).

Sixième classe (*E. r.*, *Pg.* et *G.*, *C. c.*; deux leçons par semaine). Discussion de l'équation du premier degré à une et à deux inconnues (*Pg.* et *G.*; VII^e^ classe). Discussion de l'équation du second degré (*C. c.*). Analyse combinatoire (*Pg.* et *G.*; VII^e^ classe) Binôme de Newton (exposant entier positif) (*Pg.* et *G.*; VII^e^ classe). Fractions continues. Leurs applications au calcul des logarithmes et à l'extraction de la racine carrée d'un nombre avec une approximation donnée (*E. r.*, *Pg.* et *G.*; VII^e^ classe).

Septième classe (*C. c.*). Revision de tout le cours d'Algèbre.

Géométrie. — *Quatrième classe.* (*E. r.*; 5 leçons par semaine, *Pg.* et *G.* 2 leçons, *C. c.* 3 leçons). Notions sur les corps géométriques, les surfaces, les lignes et le point. Ligne droite. Angles. Perpendiculaires et obliques. Lignes parallèles. Égalité des triangles. Propriétés des triangles. Quadrilatères et polygones. Cercle. Propriétés des cordes, des sécantes et des tangentes. Positions mutuelles de deux circonférences. Mesure des angles (*Pg.* et *G.*, *C. c.*; V^e^ classe). Les principaux problèmes de construction. Exemples et problèmes numériques. Lignes proportionnelles (*Pg.* et *G.*, *C. c.*; V^e^ classe). Similitude des triangles ou des polygones (*Pg.* et *G.*, *C. c.*; V^e^ classe).

Cinquième classe. (*E. r.*; 4 leçons par semaine, *Pg.* et *G.* 2 leçons, *C. c.* 3 leçons). Relations les plus importantes entre les côtés et les autres lignes des triangles et des quadrilatères. Droites proportionnelles dans le cercle. Triangles et polygones réguliers inscrits dans le cercle et circonscrits à un cercle. Notions sur la méthode des limites. Longueur de la circonfé-

rence. Notions sur le calcul du nombre π. Mesure des aires des figures rectilignes et du cercle. Comparaison des aires. Problèmes de construction. Problèmes numériques. Position respective des droites et des plans dans l'espace. Propriétés principales des angles dièdres et polyèdres. Égalité des angles trièdres.

Sixième classe. (*E. r.*; 4 leçons par semaine; *Pg.* et *G.*, *C. c.* 2 leçons). Notions sur les polyèdres réguliers. Mesure des surfaces et des volumes des prismes et des pyramides. Égalité et similitude des prismes et des pyramides. Mesure des surfaces et des volumes des trois corps ronds. Cylindres et cônes semblables. Résolution de problèmes numériques. (*S. e.*; fin du programme de Géométrie). Répétition de tout le cours de géométrie (*E. r.*).

Septième classe (*C. c.*). Répétition de tout le cours de géométrie.

Huitième classe (*G.*). Répétition de tout le cours de Mathématiques avec additions nécessaires.

Trigonométrie rectiligne. — *Sixième classe* (*E. r.*, *C. c.*; 2 leçons par semaine). *Septième classe.* (*G.*; 1 $\frac{1}{2}$ leçons par semaine). Objet de la trigonométrie rectiligne. Rapports trigonométriques. Variation des rapports trigonométriques. Relations entre les fonctions trigonométriques d'un même arc. Expressions du sinus, du cosinus et de la tangente, de la somme ou de la différence de deux angles, d'un demi-angle, et du multiple d'un angle. Rapport entre la somme des sinus de deux angles et leur différence. Notion sur le calcul des tables trigonométriques. Usage des tables trigonométriques. Relations entre les angles et les côtés d'un triangle rectangle. Résolution des triangles rectangles. Relations entre les angles et les côtés d'un triangle obliquangle. Résolution des triangles obliquangles. Calcul des aires. Transformation des formules en expressions calculables par logarithmes. (*E. r.*). Résolution des équations trigonométriques les plus simples (*E. r.*). Mesure des lignes et des angles sur la surface terrestre (*G.*). Instruments destinés à mesurer les angles (*G.*). Application de la trigonométrie rectiligne aux opérations sur le terrain (*G.*).

Partie complémentaire des programmes. — *Dessin linéaire. E. r.* — Classes quatrième, cinquième et sixième.

Dessin technique. E. r. — Troisième classe : 2 leçons par semaine.

Dessin projectif. E. r. — Classe complémentaire : 2 leçons par semaine.

Algèbre. E. r. — Classe complémentaire : 3 leçons par semaine. Expressions imaginaires. Opérations sur les expressions imaginaires. Résolution des inéquations du second degré. Maximum et minimum du trinôme du second degré. Résolution des équations binômes les plus simples. Résolution des équations trinômes ($a\,x^{2p} + b\,x^{p} + c = 0$). Théorèmes sur la divisibilité des polynômes entiers. Abaissement de l'ordre d'une équation. Équations équivalentes. Solutions étrangères.

Application de l'Algèbre à la Géométrie. E. r. — Classe complémentaire. *C. c.* — Sixième classe. Objet de l'application de l'Algèbre à la Géométrie. Nombre linéaire. Expression linéaire. Quantités et expressions de deux ou trois dimensions. Quantité de dimension nulle. Exemples. Homogénéité des équations. Comment l'homogénéité peut cesser d'être apparente. Rétablissement de l'homogénéité. Construction des formules algébriques, rationnelles et irrationnelles. Discussion et construction des racines de l'équation du second degré. Construction des formules contenant les rapports trigonométriques. Exemples et problèmes.

Éléments de Géométrie analytique. C. c. — Septième classe : 2 leçons par semaine. Coordonnées rectilignes. Équations d'un point. Expression de la distance entre deux points. Équation d'un lieu géométrique. Équation de la ligne droite. Discussion de cette équation. Problèmes généraux relatifs à la ligne droite. Circonférence. Ellipse. Hyperbole. Asymptotes de l'hyperbole. Parabole. Transformation des coordonnées. Discussion des courbes représentées par l'équation générale du second degré à deux variables. Tangentes et normales aux coniques. Exemples et problèmes. — *Comput pascal S. e.*

Certains programmes sont accompagnés de notes explicatives dont il est difficile de comprendre le but, vu le caractère vague et suranné des thèses qu'ils renferment. Dans la note destinée aux gymnases et aux écoles réales nous rencontrons par exemple les réflexions suivantes citées comme vérités immuables.

« Les mathématiques sont l'une des bases de l'instruction générale, étant une science précise et abstraite et offrant à ceux qui les étudient un moyen simple et commode pour développer régulièrement leur pensée. L'enseignement des gymnases (mais non celui des écoles réales à ce qu'il paraît puisque leur programme omet toute cette citation) doit surtout songer au progrès intellectuel des élèves. Il s'en suit qu'en enseignant les mathématiques on fait particulièrement attention à la partie théorique du cours ».

« En Algèbre on doit chercher à élargir la conception que les élèves ont du nombre, car il ne faut pas oublier que l'esprit de généralisation domine dans cette science et que c'est là la raison qui en rend si grave le rôle dans le cours d'un établissement secondaire. Il faut expliquer aux élèves que les opérations algébriques ne sont que des transformations équivalentes des formules des opérations en d'autres formules possédant la forme désirée. Les nombres négatifs doivent être envisagés comme des nombres généralisés et il est nécessaire d'expliquer qu'ils sont introduits dans l'Algèbre pour rendre possibles tous les cas de soustraction ».

« En Géométrie on doit avoir pour but principal de faire étudier systématiquement les vérités géométriques. Mais comme la Géométrie nous présente les exercices les plus simples et les plus variés pour l'appropriation de la logique formelle, nous agirons selon le but de son étude en éclaircissant les méthodes de démonstration des vérités géométriques et en ayant soin que les élèves possèdent à fond les méthodes ou formes de discussion employées pour ces méthodes de démonstration ».

On ne laisse pas de faire des emprunts aux manuels ; je cite par exemple cette assertion : « l'enseignement de la Trigonométrie a pour but de résoudre les triangles et c'est dans ce but seulement qu'il faut se servir des fonctions trigonométriques ».

Ce que nous venons d'en faire voir montre suffisamment que

les notes explicatives ne sauraient être de quelque utilité pour un professeur, et pourtant l'état des choses est tel que leur secours serait très désirable.

Ainsi que le montrent les programmes cités, les établissements secondaires en Russie, les séminaires ecclésiastiques exceptés, présentent une espèce de fusion de l'école primaire avec l'école secondaire. La préparatoire et les trois classes inférieures appartiennent à la primaire. Les notes explicatives nous parlent ainsi du cours d'Arithmétique dans ces classes. Dans les écoles de diocèse de filles « le cours systématique d'Arithmétique poursuit un double but, spécialement pratique et généralement instructif. Le premier cherche à habituer les enfants à un calcul prompt, juste et facile, le second à penser logiquement, à s'approprier d'utiles procédés de réflexion et à les appliquer avec conscience aux calculs donnés. » Dans les gymnases et les écoles réales « l'enseignement arithmétique vise, dans les trois premières classes, à ce que les quatre règles soient opérées sur les nombres entiers et fractionnaires d'une manière consciente, rapide et élégante ». En exposant ensuite les moyens pour arriver à ces buts (un exposé rappelant une ordonnance de médecin !) on passe sous silence les méthodes d'enseignement ; mais le contenu des programmes et surtout quelques auxiliaires qui y sont cités (les recueils de problèmes et les manuels composés par Evtouchevsky et Goldenberg) montrent assez que celles-ci ne diffèrent point des méthodes employées dans les écoles de ville et de village. Aucune différence ne saurait donc être constatée entre les deux types de l'école primaire d'une part et son troisième type réuni à l'école secondaire de l'autre. C'est pourquoi nous pouvons nous dispenser de revenir à l'enseignement arithmétique qui s'y donne.

Ainsi l'école secondaire russe a pour objets principaux de son enseignement mathématique : l'Algèbre et la Géométrie élémentaires. Les établissements de garçons y ajoutent encore la Trigonométrie rectiligne (à l'exception des séminaires ecclésiastiques). La courte durée de l'année scolaire, réduite à sept mois si l'on en exclut les vacances et la période des examens, rend tout à fait insuffisant le nombre des leçons destinées à donner le cours établi par les programmes. Dans l'absence des méthodes d'enseignement pouvant faciliter la tâche du professeur, celui-ci voit

échouer ses meilleures intentions et ses plus chères espérances manquent de succès. Force lui est de se renfermer dans un accomplissement formel de ses devoirs. L'étude de la science se trouve alors remplacée par l'étude des manuels satisfaisant aux exigences des programmes et de leurs notes explicatives. La leçon se passe à expliquer le contenu des manuels en y ajoutant parfois la solution des problèmes en guise d'illustration. Hors de la classe les élèves cherchent à retenir les questions expliquées afin de pouvoir les réciter et en tirer parti aux leçons suivantes. Les manuels étant exclusivement basés sur la synthèse, les élèves pour des raisons citées plus haut (pages 243-244) doivent fatiguer leur mémoire bien davantage que ne le demandait l'ancienne méthode dogmatique. Celle-ci avait exigé que les élèves retinssent mot à mot le contenu des théorèmes, des règles et des procédés dans leur application aux problèmes à résoudre. La méthode actuelle, exige de plus qu'on retienne la démonstration dans sa marche précise, et dans tous ses détails. Il est aisé de prévoir où l'on en arrive en surchargeant tellement la mémoire des élèves. Ce qui a été appris par cœur s'échappe aussitôt qu'on n'en a plus besoin. Et les meilleurs élèves des écoles secondaires, en entrant aux Facultés mathématiques des universités ou aux écoles supérieures, techniques et de génie, se sentent insuffisamment préparés pour suivre les cours de mathématiques supérieures.

Le tout offre en somme un triste état de choses. L'Histoire des mathématiques peut seule l'améliorer quand elle aura réussi à étudier en détails le développement des méthodes en Mathématiques.

V.-V. Bobynin (Moscou).

L'ESPACE EST-IL EUCLIDIEN ?

(*Suite*).

IV

Géométrie physique.

Déplacements des corps solides naturels. — Une théorie peut être appréciée à deux points de vue : au point de vue de sa valeur en tant que système logique et au point de vue de sa concordance avec une catégorie de faits physiques.

Nous croyons avoir montré que les Géométries non-euclidiennes constituent des systèmes logiques aussi rigoureux que la Géométrie euclidienne.

Existe-t-il des faits physiques dont la Géométrie soit la théorie ?

Nous avons vu que la Géométrie était la théorie des déplacements sans déformation.

En tant que notion idéale, un déplacement sans déformation peut être légitimement conçu comme euclidien ou non-euclidien à notre gré.

C'est là un siège commode pour l'analyste. Mais une notion subjective a toujours un *substratum* objectif et empirique, et celle de déplacement sans déformation n'a pas été conçue sans germe extérieur par le cerveau humain.

En fait, la notion de déplacement sans déformation n'est pas autre chose que la notion empirique du déplacement des corps solides, notion qui résulte directement, dans tout esprit humain, de l'observation inconsciente du monde extérieur et qui persiste telle quelle chez l'ignorant, tandis qu'elle se transforme chez le savant en notion purement abstraite, ne correspondant qu'approxi-

mativement aux faits physiques, tenus par lui pour plus compliqués.

Nous voici donc conduits à cette question un peu bizarre : « Les corps solides naturels sont-ils ou non-euclidiens? »

M. Poincaré [1] nous donne le moyen de nous débarrasser de cette question par les considérations suivantes :

« La Géométrie euclidienne ...... serait dès aujourd'hui convaincue d'erreur, puisque nous savons qu'il n'existe pas de solides rigoureusement invariables.

« Les axiomes géométriques ne sont donc ni des jugements synthétiques *a priori*, ni des faits expérimentaux.

« Ce sont donc des *conventions*; notre *choix* est guidé par des faits expérimentaux, mais il reste libre et n'est limité que par la nécessité d'éviter toute contradiction ».

Nous nous permettrons de présenter une objection à cette manière de voir les choses.

Les propriétés réelles des déplacements des corps solides naturels dépendent de multiples circonstances physiques : température, pression, usure, etc. Mais, quelque nombreuses que soient les causes susceptibles d'influer sur les propriétés des déplacements, on peut concevoir qu'elles aient été déterminées, et par suite, parvenir à l'idée des déplacements qui auraient lieu, si les causes perturbatrices n'agissaient pas.

Bref, on pourra distinguer les circonstances *topogènes* des circonstances *hylogènes*, suivant l'expression d'Helmholtz, et il sera permis de parler des propriétés *géométriques* des corps solides naturels, pourvu que la manière dont se déplacent ces corps soit indépendante de leur substance. Quant aux effets dus soit à l'usure, soit aux variations de la température et de la pression, on peut concevoir la possibilité de s'en garantir ou d'en tenir compte, puisqu'ils sont dus à des causes non *topogènes*.

Toute détermination expérimentale des lois d'une catégorie de phénomènes serait impossible, si on ne pouvait se soustraire, dans une large mesure, à l'influence des causes indépendantes de celles que l'on étudie, ou bien calculer, avec une approximation connue, les effets de ces dernières.

---

(1) Poincaré. *Revue générale des Sciences*, p. 769-774. 1891.

L'existence de la pesanteur et sa variation avec le lieu empêchent-elles la détermination des lois des forces électriques et, ces lois acquises, suppriment-elles la possibilité de les corriger au moyen d'expériences plus précises, comme le fait s'est produit dans certaines branches de la science ?

Cette possibilité de déterminer les lois de chaque catégorie de phénomènes tient précisément à notre manière de classer les phénomènes par catégories dont chacune correspond à des causes indépendantes des autres.

Nous croyons donc qu'il n'y a aucune absurdité à se demander si les corps solides sont euclidiens ou non-euclidiens.

C'est cette question et pas d'autre qui est en jeu, lorsqu'on suppose que des mesures astronomiques pourraient venir contredire les formules euclidiennes.

Imaginons, par exemple, qu'on ait pu connaître (par quels procédés de communications interplanétaires ?...) le résultat de la mesure directe d'un angle astronomique ayant son sommet sur Mars et que ce résultat différât de la valeur calculée d'autre part par les formules euclidiennes sur des données résultant de mesures faites par les habitants de la Terre.

Supposons que l'on ait d'autre part d'excellentes raisons pour écarter toute explication relative à la propagation de la lumière ou à un ordre de faits analogues.

Devra-t-on conclure que *l'espace* n'est pas euclidien ?

Nullement, l'espace n'a pas de propriétés intrinsèques.

La seule conclusion compatible avec le bon sens est que les instruments goniométriques employés, ou plutôt les instruments qui ont servi à leur graduation, ne satisfont pas aux axiomes euclidiens.

S'ils satisfont à tous ces axiomes, sauf à celui des parallèles, tous les instruments goniométriques, construits indépendamment les uns des autres en des points quelconques de l'espace, doivent donner le même résultat si on s'en sert pour la mesure d'un même angle.

Cela tient aux propriétés suivantes :

1° L'angle 2π est le même en tous les points de l'espace ;

2° Deux grandeurs superposables en un lieu de l'espace le sont en un lieu quelconque et quel que soit le trajet employé

pour chacune d'elles (propriété des déplacements de constituer un groupe d'opérations, ce qui est nécessaire pour établir convenablement l'idée d'égalité) ;

3° Le tout ne peut pas être égal à la partie (¹) (restriction réalisée par l'existence d'un invariant relatif à deux points et entraînant cette conséquence que, si $a = b$, $\frac{1}{n}a = \frac{1}{n}b$).

Si l'on admet ces diverses hypothèses, l'on devra conclure de l'expérience imaginaire relatée plus haut que les déplacements des corps solides sont non-euclidiens, et l'on voit clairement que, si cette conclusion peut être tirée sans qu'aucun corps solide soit transporté de Mars sur la Terre ou inversement, c'est en raison des propriétés admises pour ce déplacement en dehors du postulat des parallèles, propriétés dont les conséquences sont particulièrement importantes en ce qui concerne la mesure des angles.

On peut d'ailleurs se poser bien d'autres questions sur la vraie nature des déplacements des corps solides, car le postulat des parallèles n'est pas le seul axiome qu'on puisse abandonner sans compromettre l'ordonnance logique de la géométrie. On lira avec intérêt, sur cette question des axiomes indépendants, le remarquable mémoire de M. Hilbert (²).

Mais, qu'il s'agisse du postulat des parallèles ou de tout autre axiome, ce n'est pas dans les propriétés des corps solides naturels que nous voyons le principal intérêt de la question relative à la portée physique de la géométrie.

La Géométrie et les Sciences physiques. — En fait, la Géométrie domine toute notre analyse de la nature par suite du fait que tout phénomène est indépendant du lieu où il se produit ; ou, d'une manière plus précise, qu'on peut, sans rien changer à un phénomène, opérer un déplacement sans déformation de l'ensemble des corps qu'il intéresse, toutes autres circonstances (la température notamment) restant les mêmes.

Il en résulte que les conséquences d'une modification aux axiomes de la géométrie peuvent s'étendre à des faits d'un ordre tout différent de celui des propriétés des corps solides.

(¹) Poincaré. *Revue de métaphysique et de morale*, 1899.

(²) Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1899 ; traduit en français par M. Laugel. Gauthier-Villars, Paris, 1900.

La Mécanique, c'est-à-dire la science du mouvement, est essentiellement relative aux déplacements sans déformation, comme si un fait ne nous intéressait qu'en ce qu'il trouble la configuration d'un ensemble de corps ; les énergies potentielles relatives aux diverses forces naturelles s'expriment en fonction des positions relatives des corps mis en jeu (ou, ce qui revient au même, en fonction des distances des points de ces divers corps, car la distance de deux points est le seul invariant indépendant que présente le groupe des déplacements).

Pour pouvoir déterminer clairement le rôle de la Géométrie dans la Mécanique, il faudrait qu'on fût parvenu d'abord à donner aux fondements de cette dernière science une structure logique plus satisfaisante, ensuite à distinguer, dans ces fondements, la partie rationnelle de la partie expérimentale. Ces deux résultats ne paraissent pas près d'être obtenus.

Précisément en raison de cette obscurité, qui s'étend aux principes de la science astronomique, une des principales tributaires de la Mécanique, on peut regarder comme possible l'éventualité qu'une modification de la notion de distance ait pour effet de simplifier certaines lois de l'univers. Cette éventualité est fort bien acceptée par notre esprit, lorsqu'on songe à l'origine précaire de la notion de distance.

Si elle venait à se produire, il n'y a aucun doute qu'on s'empresserait d'adopter cette modification féconde dans les question où elle aurait sa raison d'être.

Cette adoption n'aurait d'ailleurs nullement pour conséquence la disparition de la Géométrie euclidienne, celle-ci conservant tout son intérêt dans le domaine où elle continuerait à être exacte : la Mécanique des corps indéformables n'a-t-elle pas, dans l'état actuel de la science, sa place à côté de la théorie de l'élasticité, qui contredit la réalité de pareils corps ?

Nous croyons donc qu'un examen du rôle joué dans la Mécanique par les principes de la Géométrie présente le plus grand intérêt.

L'édification d'une statique non-euclidienne a été tentée par M. Andrade [1] ; parmi les résultats obtenus, nous citerons

---

[1] ANDRADE, *Leçons de mécanique physique*, Société d'éditions scientifiques, Paris, 1898.

l'impossibilité paradoxale de réaliser le mécanisme particulièrement simple, constitué par un fil flexible et inextensible. Mais on doit remarquer qu'une telle théorie suppose la généralisation préalable des notions fondamentales : force, équilibre, travail, et que la manière dont peut se faire cette généralisation est en partie arbitraire.

Ces quelques observations, quoique fort imprécises, suffisent à montrer que la portée des questions relatives aux déplacements sans déformation s'étend bien au delà des propriétés des corps solides.

L'infini physique. — Nous avons vu que l'idée de l'infini géométrique était essentiellement relative à la notion de distance et pouvait disparaître moyennant certains systèmes de détermination métrique.

De même que nous nous sommes demandé s'il existe une géométrie physique, nous pouvons nous demander si l'idée de l'infini correspond à un fait physique.

On imagine généralement que, si l'on parcourait indéfiniment une ligne droite, on traverserait indéfiniment des mondes plus ou moins semblables à celui dont nous faisons partie.

Il semblerait dès lors que cette idée de l'infini cosmique doive disparaître en même temps que celle de l'infini géométrique.

Cette façon de voir les choses résulte, suivant nous, d'un faux point de vue :

Il est évident d'abord que des considérations sur la notion de distance ne peuvent avoir aucune conséquence pour nos connaissances cosmiques. Celles-ci doivent donc être examinées d'une manière tout à fait indépendante.

Nous avons déjà observé que, dans la science mathématique, les expressions telles que : *infini*, *infiniment petit*, *croissant ou décroissant indéfiniment*, ont des significations rigoureusement et positivement définies, liées à l'importante notion de limite, et qu'elles ne peuvent pas correspondre à des propriétés intrinsèques d'un concept objectif.

L'idée de l'infini cosmique, tout à fait analogue, réside dans celle de la persistance de nos perceptions familières dans un voyage supposé indéfiniment continué dans l'espace.

Cette idée ne repose évidemment sur aucun fait expérimental.

Une notion n'étant plus valable en dehors du domaine de l'observation qui lui a donné naissance, nous ne croyons pas que l'on puisse légitimement donner au mot infini une valeur physique qu'il ne saurait avoir.

La conception de l'univers comme la répétition indéfinie de ce qu'une expérience restreinte nous a fait connaître nous paraît aussi inacceptable que celle qui consisterait à croire que dans un examen des corps solides qui porterait sur des particules de plus en plus petites, persisteraient les propriétés de continuité, d'élasticité, de couleur, etc., relatives à l'observation courante.

Le *prolongement* de nos images représentatives au delà du domaine empirique est une opération familière à l'esprit humain ; mais on sent tout l'arbitraire de ces généralisations transnaturelles, qui sont, je crois, les procédés de création des idées métaphysiques.

V

La Ligne droite.

Définition de la ligne droite. — On a souvent confondu la *définition* de la ligne droite avec l'énoncé de ses propriétés fondamentales, c'est-à-dire de celles d'où se déduisent rationnellement toutes les autres.

Cette confusion est une erreur.

Nous montrerons en effet qu'on peut créer des géométries en prenant pour base des systèmes de lignes choisis arbitrairement dans une large mesure, auxquels nous attribuerons les propriétés du système des lignes droites.

A la base de toute science rationnelle se trouvent des notions primordiales, qu'il est impossible de définir autrement que par le procédé consistant à montrer un objet pour indiquer la signification du mot qu'il représente.

Pour la Géométrie, si l'on conserve les procédés habituels de démonstration des premiers théorèmes, la notion primordiale est évidemment celle du déplacement sans déformation.

On peut bien en énoncer les propriétés fondamentales, comme a cru le faire Helmholtz, comme l'a fait Sophus Lie ; mais

cela ne suffit pas à la *définir*. Il existe en effet une infinité de groupes de transformations ponctuelles de l'espace jouissant des mêmes propriétés que le groupe des déplacements. Chacun de ces groupes est ce que devient le groupe des déplacements dans une transformation ponctuelle univoque de l'espace.

Les lignes droites sont alors transformées en d'autres lignes qui jouissent de toutes leurs propriétés.

Toutes les propositions de la Géométrie restent exactes, à condition de représenter par les mots : égalité, ligne droite, plan, etc., des choses autres que celles que ces mots représentent habituellement.

Une fois acquise la notion primordiale de déplacement sans déformation, la ligne droite peut être *définie*, ou plutôt la notion de ligne droite est comprise dans celle de déplacement sans déformation.

En effet une des propriétés des déplacements sans déformation consiste en ce que, lorsqu'on maintient fixes deux points d'une figure, tous les points d'une certaine ligne passant par ces deux points restent également fixes.

On obtient ainsi des lignes déterminées par deux points, par suite dépendant de quatre paramètres : ce sont les lignes droites.

Au moyen d'un des groupes de transformations dont il vient d'être question, nous obtiendrons de la même manière des lignes déterminées également par deux points, qui ne seraient pas des lignes droites.

Détermination de la ligne droite par deux points. — On vient de voir que la propriété d'être déterminée par deux points ne peut pas constituer une définition de la ligne droite. Cela résulte encore plus clairement, si cela était nécessaire, de la signification du mot « déterminé ».

Une ligne droite est déterminée par la connaissance de deux de ses points et *par le fait d'être une ligne droite*, c'est-à-dire que deux points la déterminent *parmi les lignes droites*.

Le fait pour une ligne d'être déterminée par deux points ne constitue évidemment pas une propriété de cette ligne mais bien une propriété d'un système de lignes, dont elle fait partie.

Mais si le fait d'être déterminée par deux points ne peut pas être une définition de la ligne droite, il peut, dans une certaine manière d'édifier la Géométrie, constituer une propriété fondamentale, autrement dit un axiome.

On sait que la Géométrie projective peut être établie indépendamment de la Géométrie métrique, celle-ci venant alors la compléter par l'introduction du plan et du cercle imaginaire de l'infini. Mais, tandis que les déplacements sans déformation ont paru constituer une notion si naturelle qu'on a couramment appliqué leurs propriétés sans éprouver le besoin de les énoncer, les transformations projectives au contraire sont loin de se prêter facilement à une conception intuitive, et on ne peut guère les placer en qualité de notion fondamentale à la base de la Géométrie.

Il faut alors recourir, pour ce rôle, à la ligne droite.

Dans ces conditions, sans se demander quelle est l'origine empirique de la notion de ligne droite, on la prendra comme notion fondamentale, et on devra alors commencer par énoncer ses propriétés fondamentales.

Observons encore, et pour ne plus y revenir, qu'une transformation ponctuelle de l'espace transformerait le système des lignes droites en un système jouissant des mêmes propriétés et par conséquent susceptible de servir de base à une géométrie, ou plutôt à un ensemble de faits susceptibles d'être exprimés par les propositions de la géométrie projective (puisqu'il ne s'agit, pour le moment, que de cette dernière).

La première propriété fondamentale est que les lignes droites constituent un système à quatre paramètres. L'on doit ajouter, si l'on adopte l'hypothèse admise dans cette étude (§ III), que la condition de passer par deux points *quelconques* donne toujours lieu à une détermination et à une seule.

Cette propriété des lignes droites ne constitue pas une base suffisante pour la géométrie projective. Il faut en outre qu'il existe des plans, c'est-à-dire des surfaces à trois paramètres telles que, si une ligne droite a deux de ses points sur l'une d'elles, elle y soit contenue tout entière.

L'examen de la question montre facilement que l'existence des plans est liée à la propriété suivante des lignes droites :

Si trois lignes droites se rencontrent deux à deux, et qu'une quatrième rencontre les deux premières, elle rencontre aussi la troisième.

La recherche de l'expression analytique de cette condition constitue une étude des plus intéressantes, qui se rattache aux travaux de M. Kœnigs sur les équations différentielles exprimant la condition de rencontre de deux lignes infiniment voisines faisant partie d'un système à un certain nombre de paramètres.

Ce n'est pas ici le lieu de pénétrer plus avant dans cette question.

Remarquons enfin que l'on peut rattacher la détermination d'une ligne droite par deux de ses points à la notion de distance, qui, elle, dépend incontestablement de celle de déplacement sans déformation.

On peut en effet construire une ligne droite déterminée par deux de ses points A et B, en effectuant uniquement des mesures de distance. Il suffit pour cela d'observer que, sauf sur la droite AB, il n'existe pas de point C qui soit le seul à être distant des points A et B des longueurs AC et BC.

On peut, au moyen d'une propriété analogue, déterminer les points d'un plan dont on connaît trois points.

Lignes minimales. — Il faut citer, parmi les propriétés de la ligne droite que l'on a voulu utiliser comme définition, celle d'être le plus court chemin d'un point à un autre. (On remarquera que cette propriété occupe une place à part dans la géométrie et n'est pas utilisée dans les démonstrations).

Cette propriété est démontrable, puisqu'il suffit d'appliquer le calcul des variations à l'intégrale qui représente la longueur d'une courbe, et cela en prenant, pour l'élément linéaire, l'expression euclidienne ou non-euclidienne.

Dans l'ignorance où je suis d'une démonstration synthétique, qui doit probablement exister, j'en esquisserai une dans le but surtout de montrer les éléments de la question.

Il suffit évidemment de prouver que, dans un triangle, un côté est plus petit que la somme des deux autres et, en abaissant du sommet une perpendiculaire sur le côté opposé, on voit faci-

lement qu'il suffit de démontrer que la perpendiculaire est plus courte que les obliques.

Si l'on mène à une droite Δ une perpendiculaire issue d'un point extérieur O, et deux obliques issues du même point et aboutissant à des points équidistants du pied de la perpendiculaire, ces obliques seront égales comme côtés homologues de deux triangles égaux.

En outre, si on s'éloigne d'une manière continue de la perpendiculaire, les longueurs des obliques varient dans un sens permanent. Car, sans cela, on rencontrerait deux obliques égales, et en joignant le point O au milieu de la distance de leur pied, on formerait deux triangles, qui seraient égaux comme ayant leurs côtés égaux deux à deux. De l'égalité des angles homologues, il résulterait qu'on aurait construit une seconde perpendiculaire, ce qui est contraire à un théorème connu.

Il résulte de là que la longueur de la perpendiculaire est minimum ou maximum, ou bien que toutes les droites issues du point O et arrêtées à la droite Δ sont égales et sont des perpendiculaires à cette dernière.

Pour décider entre ces trois cas, il est nécessaire de faire intervenir les propriétés particulières des trois Géométries.

Cette étude étant déjà fort longue, nous laisserons au lecteur le soin de terminer la démonstration, en faisant observer toutefois qu'en Géométrie sphérique, il faut préciser que la propriété du minimum appartient au plus petit des deux segments déterminés par deux points sur une droite.

Rectilinéarité du rayon lumineux. — Nous avons vu qu'une ligne droite peut être déterminée matériellement comme axe de rotation d'un corps solide, ou encore au moyen de mesures directes de distances, c'est-à-dire, dans les deux méthodes, en utilisant les propriétés des corps solides.

Pratiquement, on emploie souvent la propriété des rayons lumineux d'être rectilignes, et l'on a parfois voulu voir dans cette propriété la base de l'idée de ligne droite.

La rectilinéarité du rayon lumineux est, comme l'observe Helmholtz, un fait physiquement démontrable.

Si un rayon lumineux issu d'un point A passe par un point B,

sa rectilinéarité se vérifiera en constatant qu'il continue à passer par ce dernier point, lorsqu'on fait tourner autour de la droite AB l'appareil solide qui le produit. La ligne droite, dans cette expérience, est déterminée, ainsi qu'il convient, comme axe de rotation d'un corps solide.

Au point de vue rationnel, la rectilinéarité d'un rayon lumineux dans un milieu homogène tient évidemment aux deux propositions suivantes :

1° Un milieu est dit homogène, lorsque les propriétés physiques en un point de l'espace situé dans le milieu, ne changent pas dans tout déplacement sans déformation du milieu;

2° Les lois physiques sont indépendantes du lieu, c'est-à-dire sont invariantes par rapport aux déplacements sans déformation.

A propos de l'homogénéité, nous ferons une observation.

On dit quelquefois que l'*espace* est homogène.

Cette façon de s'exprimer est évidemment défectueuse, si l'on prend le mot « espace » dans le sens très-restreint où nous avons dû l'employer dans une question qui exigeait une précision absolue des termes. Mais il n'y a pas grand inconvénient, à condition de ne pas se laisser duper par les mots, à s'exprimer comme si les propositions géométriques représentaient les propriétés d'une entité, qui serait l'espace.

Dans cette manière de parler, purement métaphorique, l'homogénéité de l'espace n'exprime pas une propriété objective, mais est seulement une constatation résultant de la définition de l'homogénéité.

L'homogénéité non-euclidienne ne constitue pas évidemment la même propriété physique que l'homogénéité euclidienne, et c'est une des raisons pour lesquelles nous disions que les principes de la Géométrie ont une portée physique.

Dans tous les cas, les lignes droites sont les mêmes lignes dans les trois Géométries, et c'est pour cela qu'on ne doit pas parler de la ligne droite *euclidienne*; l'incorrection est du même ordre que celle de l'expression : l'espace euclidien.

Comme l'observe Helmholtz, il est probable que, si l'on était conduit à modifier certaines lois physiques en raison de faits non-euclidiens, le rayon lumineux n'en conserverait pas moins la pro-

priété de suivre le plus court chemin et, par suite, dans les milieux homogènes (au nouveau sens que prendrait ce mot), de parcourir des lignes droites.

VI

Qu'est-ce que la Géométrie ?

Le présent article allait être terminé, lorsqu'a paru le numéro de l'*Enseignement mathématique*, contenant la lumineuse vue d'ensemble de M. H. Laurent sur les fondements de la Géométrie. Sa lecture me fait ajouter ce paragraphe à un article déjà long.

Il est un point, beaucoup plus psychologique que mathématique d'ailleurs, sur lequel des géomètres éminents s'expliquent au moyen d'expressions que je ne puis comprendre, c'est celui qui est relatif à la nature même de la Géométrie.

Il s'agit au fond d'une question de mots, notamment des significations différentes que l'on peut donner à certaines expressions telles que : Géométrie, convention, science expérimentale.

Suivant M. H. Laurent, la Géométrie serait un langage, un système d'analyse ayant pour objet de *classer*, *coordonner*, *expliquer les phénomèmes observés dans le domaine de la Géométrie*, c'est-à-dire *les faits géométriques*, par conséquent, choisir entre les types possibles de géométries serait *une question dénuée de sens*.

On a dit, dans le même courant d'idées, que, parmi les Géométries, on avait simplement à se préoccuper de choisir *la plus commode*, et encore « que les axiomes de la Géométrie sont *des conventions* ».

Enfin, nous citerons les deux affirmations contradictoires :

« Il faut se résigner à faire de la Géométrie une science physique et expérimentale [1] ».

« La Géométrie n'est pas une science expérimentale [2] ».

---

[1] H. Laurent. *Les principes fondamentaux de la théorie des nombres et de la Geometrie*, Collection Scientia, Naud, 1902, Paris.

[2] H. Poincaré. *Sur l'ouvrage de M. Hilbert Grundlagen der Geometrie*, Bulletin des sciences mathématiques, 1902, Paris.

Pour que la Géométrie fût un simple casier de coordination pour les faits géométriques (il ne s'agit pas, bien entendu, du système d'analyse qui porte le nom incorrect de Géométrie analytique au lieu de s'appeler, comme il conviendrait, analyse géométrique), il faudrait que ceux-ci existassent en dehors d'elle. Or c'est ce qui n'est pas, et la preuve la plus directe, c'est que M. H. Laurent, pour qualifier leur domaine, n'a pas trouvé d'autre épithète que le mot « géométrique ».

Par cela seul que M. H. Laurent sait quels sont les faits qu'il qualifie de géométriques, il a déjà fait choix d'une géométrie : en particulier, la science de l'égalité euclidienne ne peut pas se confondre avec celle de l'égalité lobatchewskienne.

Et d'ailleurs, qu'on essaie de préciser l'idée de la géométrie jouant le rôle d'un langage par un exemple concret en donnant les représentations (?) d'un fait *géométrique* dans des systèmes différents de géométries !

La Géométrie euclidienne n'est pas *la plus commode* (qu'on essaie d'exprimer pour quel objet), mais bien celle qui étudie des faits d'une catégorie particulière, constitués (comme tout fait) par l'association de notions déterminées, parmi lesquelles certaines se rapportent à des relations possibles entre les autres : ces notions sont celles de point, ligne, surface, intersection, contact, droites, plan, etc., sans oublier l'importante notion de l'égalité géométrique.

Ces notions (et il en est, par suite, de même des faits géométriques) sont précisément caractérisés par la propriété d'être indépendantes de tout déplacement sans déformation.

On voit donc que, en changeant l'idée de déplacement sans déformation, ce n'est pas seulement un système d'analyse que l'on change, mais bien les faits eux-mêmes qu'il s'agit d'étudier.

Les axiomes de la Géométrie, c'est-à-dire les propriétés fondamentales des notions qui constituent l'objet de cette science sont-ils conventionnels?

Si l'on entend exprimer par là que l'esprit humain est libre de construire des édifices logiques sur des bases très différentes entre elles, c'est une naïveté, applicable à toute science rationnelle : à la Mécanique rationnelle et aux diverses branches de la Physique mathématique, par exemple.

Si l'on veut dire que l'on peut arbitrairement changer les axiomes de la Géométrie, tout en conservant le nom de cette science, j'estime qu'il n'est pas raisonnable de prendre le mot « Géométrie » dans cette acception.

L'esprit humain ne crée une idée, un mot que poussé par un mobile, un *intérêt*. Supprimer le mobile et conserver le mot est absurde, antinaturel. Or l'intérêt spécial qui caractérise la Géométrie disparaît si l'on remplace certains axiomes, c'est-à-dire certaines notions, par d'autres.

Au surplus, qu'on essaie d'expliquer d'une manière vraiment positive ce que l'on peut entendre par cette proposition : les principes de la Géométrie sont des conventions.

Il reste à examiner si la Géométrie est une science physique, une science expérimentale.

Ce qui nous importe n'est pas de savoir comment on doit s'exprimer sur ce point, mais bien comment on doit classer la Géométrie parmi les autres sciences.

Je dis qu'elle ne se différencie pas, au point de vue qui nous occupe, de la Mécanique rationnelle et des diverses branches de la Physique mathématique.

Je m'élève tout d'abord contre la distinction faite souvent entre les *êtres de raison* et les objets réels.

En somme, ce qu'atteint notre connaissance, ce sont toujours, des idées, des images : l'idée du corps solide indéformable n'est pas moins *réelle* (?) que celle du corps solide élastique, elle appartient à un domaine d'observation moins attentive, voilà tout.

L'Optique élémentaire est tout aussi physique, expérimentale — si l'on veut employer ces expressions — que l'Optique de Fresnel et celle de Maxwell.

Le *point matériel* de la Mécanique rationnelle n'est pas plus un *être de raison* qu'un objet quelconque.

Les notions qui sont à la base des sciences rationnelles sont soumises aux mêmes lois de formation que celles de nos notions que nous qualifierions le plus volontiers de réelles — si ce mot pouvait avoir un sens dans l'espèce. Elles ne résultent pas d'une opération d'abstraction, elles sont simplement le résultat du premier regard maladroit encore que nous jetons sur la nature, et

elles constituent les matériaux avec lesquels notre esprit construit les idées compliquées qui devront s'accorder avec des expériences plus précises,

Cela admis, on ne voit pas en quoi la théorie de l'égalité des longueurs, des surfaces et des volumes indéformables est d'une autre nature que la théorie élémentaire des actions électriques, l'Optique élémentaire ou toute autre science déductive ayant des principes provenant directement ou indirectement de l'expérience.

Enfin la Gométrie reste justiciable de l'expérience.

La mesure des objets sensiblement indéformables a suffisamment intéressé l'humanité pour donner lieu à la science importante qu'est la Géométrie élémentaire et il est très remarquable que les lois relativement récentes de la Mécanique et de la Physique soient intimement liées à l'idée du déplacement sans déformation, laquelle intervient dans ces lois par la distance, représentant numérique de cette idée comme étant le seul invariant indépendant relatif au groupe des déplacements.

Il ne saurait être indifférent, au point de vue des conséquences physiques, que la distance qui figure dans les lois de la Dynamique ou dans l'expression de l'énergie potentielle due à des forces cosmiques, électriques, électrodynamiques, etc., soit euclidienne ou non-euclidienne.

Or l'unité de plus en plus probable de la conception que l'humanité est appelée à se faire de la Nature nous fait penser que des modifications fondamentales dans la Mécanique entraîneraient des modifications concordantes dans la Géométrie.

A vrai dire, une hypothèse reste à envisager, c'est celle suivant laquelle le rôle essentiel joué par la mesure des distances dans la plupart des branches de la science résulterait d'un phénomène purement subjectif, c'est-à-dire que l'esprit humain, hypnotisé par l'idée du corps solide, en aurait fait l'élément de toute son analyse de la nature et le repère auquel il rapporte toutes les modifications d'ordre mécanique

Mais alors on devrait pouvoir, par de simples définitions de mots, déduire rationnellement de nos conceptions géométriques les notions et les lois fondamentales de la Mécanique, qui d'absolues deviendraient relatives, j'entends anthropomorphiques.

Notre cerveau, libéré de sa polarisation vers l'idée d'indéformabilité, pourrait alors établir une Mécanique qui conserverait sans doute les notions de point et de position, mais qui ne serait pas liée à l'idée exclusive de distance.

Pure hypothèse d'ailleurs, que n'encourage guère l'insuccès des tentatives faites jusqu'ici pour réduire à un clair assemblage ce système à liaisons surabondantes que constituent les principes de la Mécanique, hypothèse très séduisante pour l'analyste en ce qu'elle réduirait le nombre des principes échappant à la pure logique, encore plus séduisante pour le philosophe positif, qui verrait ainsi se dissiper une bonne partie du caractère mystérieux présenté par certaines lois fondamentales de la Mécanique et de la Physique, pour lesquelles aucune explication ne se présente à notre esprit.

G. Combebiac (Limoges.)

PHILOLOGUES ET PSYCHOLOGUES
EN FACE DU PROBLÈME DES PARALLÈLES [1]

PREMIÈRE PARTIE

Contributions philologiques à l'étude des parallèles.

Les parallèles n'ont pas été ainsi nommées parce qu'elles sont incapables de se rencontrer, si loin qu'on les prolonge. Leur nom, et du même coup leur définition, indiquent qu'elles font avec une transversale des angles alternes égaux. On en déduit l'égalité ou la supplémentarité des autres angles.

On considère comme cas particulier les 2 droites perpendiculaires à une troisième.

Une fois ces déductions prochaines établies, on passe de l'hypothèse à la construction effective, en remarquant précisément la différence entre les parallèles définies par la non-rencontre et les parallèles définies par le sens étymologique pur et direct. Deux segments rectilignes qui se coupent par le milieu donnent la clef de la construction cherchée, de sorte que les deux parallèles se trouvent *d'emblée* obtenues, sans postuler la transformation progressive des droites sécantes ou non sécantes (cela est très important.) En vertu de l'axiome qui déclare que *deux droites*

---

[1] Sous ce titre, notre distingué collaborateur M. Raoul Baron nous avait présenté un manuscrit un peu trop étendu pour pouvoir trouver place utilement dans *L'Enseignement Mathématique*. Sur la prière de la Rédaction, il l'a réduit, peut-être en y mettant cette fois un peu trop de réserve. Malgré cette brièveté, les lecteurs seront assurément intéressés par la thèse de l'auteur; elle est nouvelle, originale, et à notre avis d'une profonde justesse.

NOTE DE LA RÉDACTION.

ne peuvent se couper qu'en un point, on démontre que les parallèles ne se rencontrent nulle part, puisqu'elles se rencontreraient en deux points symétriques, après une demi-rotation du système autour du point médian de la transversale incluse.

C'est une erreur historique que de prendre comme théorème fondamental celui-ci : « Quand deux droites sont parallèles, elles font avec une transversale des angles alternes égaux, etc... » Et l'on souligne l'erreur en disant : « *Réciproquement*, si deux droites font avec une transversale des angles... ces droites sont parallèles ». — C'est cela au contraire qui est le point de départ, et qui se démontre immédiatement sans postulat. Le *desideratum* euclidien gît en ceci, savoir : que l'on peut conclure du parallélisme à la non rencontre, tandis que l'on ne peut pas se donner *a priori* des droites non-sécantes pour en conclure à leur parallélisme (étymologiquement parlant).

La linguistique ne se borne pas à des réformes. Elle condamne encore la dénaturation du mot *asymptote* et l'hypothèse gratuite de *deux droites se rencontrant à l'infini sans se couper*. Il y a dans tout ce langage un parti pris d'embrouiller les questions ! Etymologiquement, deux lignes sont « asymptotes », lorsqu'elles ne tombent pas l'une sur l'autre. Asymptote est composé de *symptote* et de *a* privatif. Le prétendu *postulatum* d'Euclide, en réalité son *desideratum*, consiste à savoir si la parallèle propre jouit du monopole de l'asymptotisme propre. En d'autres termes : « Par un point pris en dehors d'une droite, on ne peut mener qu'*une* parallèle » ; mais il n'est pas prouvé du même coup que la parallèle dérangée de sa position *unique va rencontrer* l'autre droite.

Réservant pour la partie philosophique ce second point, je me borne à chercher comment nous pourrions exprimer le Lieu de la *première rencontre*, entre deux droites qui *tout d'abord ne se rencontraient pas* ?

Pouvons-nous supposer avec Lobatscheffsky que, entre la sécante et la non sécante, il y a une position limite commune qui est une simple rencontre, ou un asymptotisme intermédiaire

entre couper et ne pas couper une droite ? — Mais où cela a-t-il lieu ? — A l'infini ? mais l'INFINI n'est pas un LIEU et *a l'infini* n'est pas une locution adverbiale de lieu !

Dira-t-on, avec certain apôtre de la néo-géométrie, « que deux droites qui se rencontrent *au bord du plan*, se rencontrent précisément à l'infini, sans se couper ? » Mais le plan n'a pas de bord. — Reprenons la preuve à rebours et voyons comment deux droites sécantes pourraient devenir non sécantes en passant par une position limite commune entre les deux états.

Par une incorrection nouvelle les non-euclidiens diront que l'on chasse le point de rencontre *à l'infini* et qu'il s'évanouit *en cet endroit* ? ? ?

Le grammairien analyste ne peut tolérer ce puéril jeu de mots : « Vous chassez un point à l'infini... » Cela signifie que vous répétez indéfiniment l'opération qui consiste à faire reculer le point de rencontre. Le plan étant illimité, votre *processus* est éternel et vous n'aboutissez jamais à acculer le point dans ses derniers retranchements. L'expression « à l'infini » est un adverbe de manière ou de temps, mais non un adverbe de lieu, ainsi que je le disais plus haut.

Somme toute : une *sécante* ne devient pas *non sécante*, dans un endroit défini, ni à un endroit défini. — C'est une logomachie abusive ! La mathématique ainsi conçue loin d'être une langue bien faite, aurait pour véhicule l'argot le plus inintelligible. — Voilà ce que disent les philologues.

Le philologue enfin pourrait ajouter, mais à titre d'idée directrice seulement, que le mot PARALLÉLOGRAMME n'est pas autre chose qu'une réduction abrégée de « diagramme des parallèles ». — En tous cas, ce qui est certain et fécond, c'est que le parallélogramme étant défini et construit par le moyen de deux segments rectilignes qui se coupent par le milieu, on en déduit toutes les propriétés de cette figure sans avoir recours à aucun postulat. Suivant que les diagonales sont égales ou inégales, obliques ou perpendiculaires, et en combinant ces cas entre eux, on a de quoi définir le rectangle, le losange et le carré d'une façon admirablement générale, même sur des surfaces non planes.

DEUXIÈME PARTIE

Contributions psychologiques à l'étude des parallèles.

Les astronomes ont découvert et fait admettre l'*équation personnelle*. — Les géomètres auraient pu les devancer de bien des siècles, si toutefois la géométrie est antérieure à l'astronomie. L'intuition géométrique n'est déjà pas identique pour tout le monde. — Le raisonnement géométrique, la preuve géométrique ne signifient rien, en général, c'est-à-dire abstraction faite de la culture intellectuelle des gens et de leur tournure personnelle d'esprit. Cela est la revanche des non-euclidiens : mauvais terminologistes, mauvais logiciens, ils se relèvent aux yeux de tous par le côté *empirique* et le *relativisme* de leur Psychologie. — Mais c'est tout, ou plutôt non, ce n'est pas tout ! Si les Euclidiens eussent tenu la main aux définitions exactes et bien serrées, jamais leurs adversaires n'auraient osé mettre en avant la notion de « deux droites se rencontrant sous un *angle nul !* ».

Ceci d'ailleurs sera une transition entre la philologie et la psychologie : qu'est-ce qu'un Angle ?

Il y a, ce me semble, un vestige de la négligence ici dénoncée, lorsque nous cherchons à comprendre ce que les gens veulent dire en parlant d'un *arc de cercle* ? Il y a des arcs de circonférence et des secteurs de cercle, mais il ne faut en aucun cas confondre l'angle biradial avec l'angle-espace. Le psychologue accuse hautement cette amphibologie : « L'angle est-il une situation relative de deux demi-droites, ou bien une portion définie de l'espace plan absolu ? » — Répondez. Et comme personne ne consent à répondre franchement, le psychologue continue sa grêle de questions :

1° Que voulez-vous dire en annonçant que deux angles adjacents égalent deux droits ?

2° Qu'est-ce que ces deux angles adjacents dont les côtés distincts sont en ligne droite ?

3° Qu'est-ce que cette somme des angles autour d'un sommet commun et égale à quatre droits ?

4° Qu'est-ce enfin et surtout (!) que l'*espace-bande* compris entre deux parallèles ?

Et, comme personne encore ne veut se compromettre là-dessus, nous dirons ceci :

1° L'espace-bande compris entre deux parallèles n'est point un angle *nul*, c'est un INCOMPARABLE à la façon dont Leibniz a cherché ses infiniment petits.

2° Une *bande-espace* est double ou triple d'une autre, comme la différentielle (dy) est double ou triple de l'accroissement unitaire et étalon (dx).

3° Une bande, si large qu'elle soit, ne peut en se répétant devenir une *partie aliquote* de l'espace plan.

4° Aucun *angle-espace*, dans le sens véritable, ne peut rester contenu dans une bande. (Bertrand de Genève).

Nous voici au cœur du sujet psychologique. (Théorie de la connaissance). On peut faire de la géométrie bidimensionnelle sur trois faces principales, ayant avant tout cette propriété, savoir : « Que l'on transportera les figures, d'un endroit en un autre, sans *plissement* ». (Je traduis une phrase de Gauss). L'axiome des axiomes est donc celui-ci : « Transportabilité et superposabilité des figures ». — C'est le *principe majeur de la technicité géométrique*.

Le psychologue est enchanté de voir cette hiérarchie introduite dans les vieux axiomes jaloux les uns des autres, oligarchistes et faussement démocrates ! Il est certain que les axiomes ne se valent pas... (*apodictiquement* parlant). — Ce serait trop facile !

L'Euclidien comprendra que sa géométrie n'est ni plus ni moins vraie que les autres géométries... mais qu'elle est plus commode ! (Poincaré).

L'Euclidien admettra même, en y mettant un peu de bonne volonté, que sa géométrie est *plane*, c'est-à-dire *plate*, *homaloïdale*, *bourgeoise*, *opportuniste*, *tempérée*, comme une foule immense de choses en ce bas mode ! — Psychologiquement l'EUCLIDIANISME est encore conforme à son étymologie, c'est la BONNE CLEF pour ouvrir les serrures moyennes, sans aucune ironie ! — Mais il pourrait très bien se faire que le nom d' « Euclide » fût symbolique en tout cela ?

A ce point de vue : Euclidianisme = Transigeance = Succès! Revenons à la géométrie pure.

Il y a certainement une surface sur laquelle la géométrie euclidienne est vraie. — Cela suffit au psychologue. Si l'on veut que cette surface se nomme « Horisphère », nous la nommerons ainsi afin d'apaiser les passions. Et puis après ?

Théorème. — Par un point P pris en dehors d'une droite et par rapport à une transversale donnée, on peut mener autant de parallèles qu'on sait géométriquement en construire, c'est-à-dire *une seule.* Nous y insistons à dessein : *une seule :*

1° Si le point P est pris sur la transversale même, l'unicité de la parallèle est évidente, puisque toute autre droite ne ferait pas les angles voulus au point P avec la transversale donnée.

2° Si le point P est à la fois en dehors de la droite et de la transversale, il faut démontrer que du point P on ne peut mener à la transversale qu'*une* droite faisant *un* angle défini en grandeur et en direction. — Or, cette démonstration est facile.

Théorème. — Par un point pris en dehors d'une droite, on peut mener autant de droites asymptotes que l'on sait en construire, c'est-à-dire une seule.

Et en effet ce n'est là qu'un corollaire du théorème précédent, si l'on veut bien se rappeler que la *parallèle* est la seule droite *asymptote*, dans le sens propre des termes.

Mais le philosophe fera remarquer que si la seule droite asymptote que nous sachions construire est une parallèle, rien ne prouve qu'il n'y ait pas d'autres droites non parallèles et pourtant asymptotes dont la construction nous échappe ?

J'avoue que cette dialectique donne envie de jeter par terre toute la géométrie et même toute géométrie ! — Exemple.

1° Par un point pris sur une droite on peut élever *une* perpendiculaire, ou *plusieurs* ou *pas du tout.*

2° Par un point pris en dehors d'une droite on peut abaisser *une* perpendiculaire, ou *plusieurs* ou *aucune.*

Le géomètre se révolte aussitôt et demande au nom de quel absurde libéralisme on détruit l'unicité ou la réalité même de la perpendiculaire ?

Ce libéralisme n'est pourtant pas si absurde que cela, attendu que notre procédé pour élever une perpendiculaire est issu de la croyance que l'espace plan est exactement divisible en deux moitiés et chacune d'elles encore en deux moitiés. Lorsqu'on disait jadis, pour établir la possibilité de la quadrature du cercle, qu'un carré inscrit, grandissant jusqu'à devenir un carré circonscrit, devait à un moment critique passer tout juste par une aire égale à celle du cercle, on oubliait que cette croissance *continue* est une superstition ; et que en réalité, l'aire croissante du carré *saute par-dessus* la valeur incommensurable de l'aire circulaire. L'instant précédent donne un carré encore trop petit, l'instant suivant donne un carré déjà trop grand.

Chacun de nous attribue au principe de continuité des vertus diverses. Ainsi, au nom de la continitué *absolue* on élèvera, je suppose, une première perpendiculaire sur une droite. Or, au nom de la même continuité, je défie le géomètre d'en élever une seconde, à côté. Et voilà pourquoi : votre procédé de construction consistant à faire tourner la future perpendiculaire autour de son pied, vous ne parviendrez pas à chasser le point de rencontre à l'infini (voy. plus haut), vous n'atteindrez pas l'angle aigu de parallélisme et encore moins l'angle droit ! Voilà où l'on arrive en usant d'une dialectique à outrance. La géométrie finit par être pleine de *desiderata*.

Conclusions provisoires.

La linguistique et la psychologie nous conduisent à déclarer incorrecte, dans la forme et dans le fond, toute la théorie des parallèles. Il faudrait pouvoir faire abstraction de tout notre psittacisme à l'endroit de ce trop fameux chapitre. Au lieu de rabâcher automatiquement les mots, les phrases et les paragraphes, il faudrait loyalement se demander à quel résultat on prétend arriver soit par la raison pure, soit par l'intuition empirique, soit par l'emploi simultané de la logique et des notions expérimentales directes.

1° Si l'on admet notre première rectification, savoir : que deux droites coplanaires sont parallèles dès qu'elles font des angles définis avec une transversale définie et imposée au constructeur ;

2° Si l'on admet que le *parallélisme* est la seule condition actuellement réalisable d'*asymptotisme* ou de non rencontre ;

3° Si l'on veut bien songer que la *constructibilité* des figures est strictement obligatoire en géométrie propre ;

4° Si l'on veut bien se souvenir que deux lignes se rencontrant sous un angle nul coïncident dans toute leur étendue ;

Alors on abandonnera sans aucun regret le postulat euclidien, pour toujours, et sans vouloir combler le *desideratum* au moyen d'une géométrie non euclidienne.

En revanche, on saura mieux exprimer ce *desideratum*, en remarquant que, par rapport à une transversale définie, deux droites parallèles à une troisiéme sont parallèles entre elles, c'est-à-dire incapables de passer par un même point. Il ne reste donc qu'une lacune véritable, savoir : que deux droites pourraient être parallèles à une troisième, *mais pas par rapport à la même transversale.*

Dans ce cas, le DÉMONSTRATEUR (?) essayera de faire pivoter ses transversales autour des points milieux de la partie incluse, afin de les amener dans le prolongement l'une de l'autre. Bref : il ramènera ce cas au précédent et il en déduira « triomphalement » ! que par un point P pris en dehors d'une droite on ne peut construire qu'une parallèle,par rapport à une transversale *quelconque.*

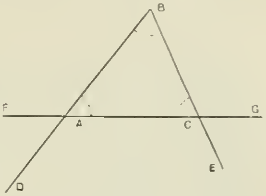
Cela irait à dire que lorsque deux droites sont parallèles par rapport à une transversale, elles le sont encore par rapport à *toute autre transversale.*

Et maintenant il n'est pas sûr du tout que les non-Euclidiens renonceraient à leur système favori, parce que ce système consiste à se passer du *criterium* de la constructibilité, en fondant de toutes pièces une géométrie exempte de contradictions... jusqu'à présent... du moins. Or cet appel à la non-contradiction est un hors-d'œuvre dialectique.

Deux hommes tels que Bertrand de Genève et Lobatscheffsky sont psychologiquement irréductibles. Leurs grammaires sont même incompatibles et je n'ose suivre M. Poincaré dans son audacieux lexique destiné censément à traduire les propositions du système S en celles du système Σ.

J'aimerais mieux, pour mon compte, démontrer d'emblée que la somme des trois angles d'un triangle ne peut être *inférieure* à deux droits (on sait que cette somme ne peut être *supérieure* à deux droits). Je me servirais, toujours à l'usage des gens qui ont ma psychologie, de la notion de l'ANGLE TRONQUÉ.

L'angle tronqué est un espace non fermé et néanmoins délimité par 3 droites. Par le fait, c'est un angle-espace diminué d'un triangle plus ou moins grand. Que cet espace triangulaire soit négligeable ou non, il est évident que l'angle tronqué ne saurait être *plus grand* que l'angle non tronqué dont il dérive.



Dans de telles conditions, la somme des espaces FAD + DACE + ECG ne saurait être supérieure à FAD + DBE + ECG et il en résulte que la somme des angles A + B + C égale au moins deux angles droits (angles-espace).

Telle est la tournure de mon propre esprit : je ne vois pas la faute de logique que je puis commettre en ceci, savoir : « Que la somme des *angles-espace* d'un triangle, n'étant ni supérieure, ni inférieure à deux droits, elle est forcément égale à deux droits. » Je suis évidemment un vulgaire euclidien, puisque cette preuve me suffit. — Mais il est probable que je ne serai pas le seul.

P.-S. — Il se dégage de tout ce qui précède que les définitions fondamentales des *angles*, des *parallèles*, des *espaces-bandes*, des *asymptotes* en général, et d'une foule d'idées géométriques telles que l'ANGLE TRONQUÉ, gagneraient beaucoup à un procès impartial en revision.

J'ai négligé *de parti pris* des questions curieuses sur les cercles parallèles de la sphère, les méridiens et la loxodromie, les hélices du cylindre et du cône, la spirale logarithmique.

Ce que je viens d'exposer rapidement doit suffire pour exciter l'attention des géomètres désireux d'appuyer leur science sur la double base d'une terminologie *impeccable* et d'une psychologie au contraire *très large*.

Raoul BARON (Paris).

SUR LA NECESSITE DU POSTULAT D'EUCLIDE

La question du « postulat d'Euclide » semblait élucidée il y a vingt ans ; l'acceptation totale des idées kantiennes, la considération de l'espace comme notion *à priori* fournissait une explication complète. Il est même étonnant que, dès cette époque, quelque philosophe n'ait point exprimé cette idée si forte que formula depuis M. Poincaré : « Il n'y a que des géométries plus ou moins commodes. »

Depuis quelques années, par suite, peut-être, d'un certain retour à l'impressionnisme, les polémiques ont repris ; il se trouve encore des géomètres — si on peut donner ce nom à tous ceux qui s'occupent de géométrie — qui veulent, sinon démontrer le postulat de la parallèle unique, tout au moins lui trouver une réalité physique. Leur sentiment est-il absurde ? je ne crois pas, et la réponse qui consiste à leur montrer la représentation spatiale physique comme possible dans un système géométrique quelconque est peut-être un peu simpliste. Cet argument ne les satisfera pas parce que, malgré tout, ils rapprocheront l'image de la nature, et que quelque chose les choquera qui sera pour eux peut-être mal défini et à quoi l'on ne saura répondre. Ils défendront leur sentiment, en quoi il est possible qu'ils aient raison, mais par des arguments en général peu satisfaisants.

Cherchons quel est le point où ils pèchent.

Le géomètre crée ses postulats par l'observation de certains éléments fixes ou coordonnés dans l'espace où il agit. Il étend ces propriétés à un espace indéfiniment étendu, et leur donne ainsi la forme géométrique ; puis il les développe par combinaison, induction et syllogisme et crée ainsi une science qu'il applique à l'espace physique. C'est là l'emploi rationnel d'un mode de correspondance bien défini, et l'usage de toute science.

Mais ce qu'on doit se garder de faire, c'est après avoir appliqué cette géométrie à l'espace, de vouloir faire rentrer l'espace dans cette géométrie, et de ne lui point voir d'existence en dehors. C'est là une des erreurs fréquentes chez les géomètres. Je leur dirai en passant qu'ils ne sont point seuls à la faire ; il nous arrive souvent de prendre nos représentations pour des réalités : je lis cette phrase d'un géomètre : « Nous ne pouvons imaginer une courbe sans tangente ». Avons-nous donc à le faire ? S'il existe des fonctions ne présentant point de dérivées, il est probable que ces fonctions ne sont point représentables par une courbe graphique ou que la tangente a de telles courbes si elle existe, n'est point représentable par la dérivée. De même, une géométrie doit-elle représenter tout l'espace ? Elle a été créée sur un nombre fini de postulats ; la réalité n'a aucune raison de n'en point demander un nombre indéfini. Pourtant, parmi ces représentations géométriques, il en est qui nous représentent plus ou moins bien les objets extérieurs ; en somme, il y a une géométrie sinon *plus vraie*, tout au moins *plus satisfaisante*. Est-ce éducation, atavisme..... ? il se trouve que cette géométrie est celle d'Euclide.

Personne n'oserait dire pourtant que le postulat de la parallèle ait une réalité ; ni que cette géométrie soit plus simple puisque la simplicité n'est point sur ce point définie. Mais on peut dire qu'elle conduit à des résultats bien en rapport avec les phénomènes de l'espace ambiant, cela pour la majorité des intelligences.

Chaque géomètre pourrait former sa géométrie : partant de certains postulats, la développer jusqu'à un certain résultat qui le surprenne ; particulariser alors ce résultat s'il trouve ainsi satisfaction et en former un postulat ou bien transformer une des notions antérieurement admises. On pourrait dans ce sens développer le beau mémoire de M. de Tilly fondé sur la notion de distance ; cette méthode suivrait peu le développement didactique d'Euclide, c'est pourquoi j'en proposerai une autre.

Nous aurions pour premier objet de créer sur une surface une ligne géométrique susceptible de mesure, ligne que nous nommerons droite. On devra alors satisfaire aux 3 postulats suivants :

1° Le plan est superposable à lui-même par glissements ; 2° La droite est définie par un point de départ et un point d'arrivée ; 3° La droite est superposable à elle-même par glissements.

De ces trois postulats découlerait la mesure de la droite, puis la définition et la mesure de l'angle. On verrait ensuite qu'une telle géométrie ne permet pas en général de former deux angles adjacents ayant leurs côtés sur une même droite et égaux, c'est-à-dire ne permet pas l'existence de la perpendiculaire, ce qui nous amènerait alors à créer un quatrième postulat.

4° La droite est superposable à elle-même par rotation dans le plan autour d'un de ses points.

Ayant vérifié que ce postulat ne contenait aucun des précédents, nous continuerons le développement : nous définirons la figure symétrique d'une figure donnée (ce qui nous évitera d'admettre la rotation du plan autour d'une droite) et les relations entre une figure A et la symétrique B′ d'une figure B. — Passant alors au quadrilatère trirectangle, nous démontrerons que son angle non droit, aigu ou obtus se conserve pour tout quadrilatère du plan, restant positif en diminuant quand les côtés augmentent s'il est aigu, augmentant et toujours inférieur à 3 droits s'il est obtus.

Nous admettrons alors la notion d'aire ; nous ne pouvons en général mesurer une aire sans passer par des notions infinitésimales, mais nous pouvons connaître l'aire d'un triangle en fonction des angles ; si cette fonction est linéaire, nous aurons mesuré l'aire. Toute la mesure de l'aire est basée sur ce lemme : deux quadrilatères trirectangles qui ont l'angle non droit et un côté adjacent égaux chacun à chacun sont superposables.

Ce lemme n'est point vrai si les quatre angles sont droits. On démontre pour le cas de l'angle aigu ou obtus que l'aire du quadrilatère trirectangle d'angle non droit égal à A est mesurée par K (1 — A). Il en résulte donc dans les deux cas que l'aire totale du plan est finie. C'est là un résultat qui présenté ainsi brusquement surprend ; si on ne peut point l'admettre, on se trouve amené à faire de la géométrie Euclidienne. La géométrie dans l'espace ne demandera que l'admission du postulat de libre mouvement.

Ce qui a été fait a consisté en somme à remplacer le postulat de la parallèle unique par un autre d'allure plus intuitive. On eut pu choisir une marche différente et admettre comme nécessaire la similitude. Le fait de pouvoir construire une image réduite d'une figure semble un fait intuitif. Cette réduction avec

rapport de grandeur constant n'est possible que dans le système Euclidien. Il est vrai que l'on peut considérer que cette constance du rapport ne soit pas une condition nécessaire dans la possibilité d'une représentation réduite. Mais on admettra qu'il faut tout au moins que ces rapports ne soient point très écartés les uns des autres. Cela se peut-il dans un système de géométrie générale. Il y a là un problème d'analyse que je n'ai point résolu. Il se pose aisément en considérant les relations de M. de Tilly entre les 10 distances de 5 points dans l'espace, soit $f(a_1, b_1, \ldots) = 0$ cette relation, elle devient $f(\lambda_1 a_1 \lambda_2 b_1 \ldots) = 0$. Se peut-il que quelle que soit la valeur des λ on n'ait jamais par exemple $\lambda_1 = 2\lambda_2$. Il semble bien par les considérations des surfaces sphériques qu'il n'en soit pas ainsi.

Quel que soit d'ailleurs le résultat, les géomètres ne sauraient y voir un argument en faveur du postulat d'Euclide. La question est toute de sentiment. *Il n'y a pas à savoir si l'espace est Euclidien, mais seulement si les esprits le sont.*

Cette forme d'esprit me semble d'ailleurs générale parce qu'elle se lie à la faiblesse de nos organes sensitifs : nous ne percevons par la vue que des espaces très restreints, nous ne voyons point les grandeurs dès qu'elles dépassent un certain ordre, elles n'existent alors que par leur représentation numérique ; les effets de perspective et de coloration ne sauraient tenir lieu d'un chiffre. Au point de vue de leur forme géométrique : ou bien ce sont des éléments qui se reproduisent par addition, et alors nous les transportons en pensée par glissement les uns à la suite des autres. C'est de cette façon que nous imaginons le plan comme infini. Ou bien nous imaginons une représentation des objets par réduction de rapport, jusqu'à les mettre à même d'être perçus par nous. C'est dans ce sens que nous sommes Euclidiens, que seule nous satisfait la géométrie d'Euclide. « Qu'importe, disons-nous, de savoir que les planètes décrivent une ellipse, si nous ne pouvons nous représenter une telle ellipse. »

Tels sont les arguments que devraient donner les défenseurs du postulat d'Euclide ; je ne sais s'ils l'ont fait. Mais ils ont aussi voulu s'appuyer sur l'expérience, et en cela, je crois qu'ils ont absolument tort. On a déjà vu plus haut, de cette opinion, une raison très générale. M. Poincaré en a donné une fort belle à laquelle il faudrait ajouter quelques mots :

Je crois d'abord qu'il peut y avoir confusion sur le sens du mot expérience. Une expérience, dit-on, ne saurait donner un résultat absolu, elle ne fournit qu'une approximation. Ceci n'est point si le résultat cherché est qualitatif. Bessel a fait cette remarque que la définition du plan par la ligne droite n'était pas *a priori* cohérente ; il a donc fallu que l'existence du plan fut expérimentale. Il est vrai que l'expérience est pour ainsi dire intérieure, que l'on n'aurait point l'idée de la matérialiser, parce que tout résultat obtenu physiquement ne saurait changer notre notion, et même en dépendrait probablement. De même, les raisonnements faits tout à l'heure sur les figures symétriques à l'aide des quatre premiers postulats donnaient une géométrie de la sphère. Nous aurions pu les faire en opérant le retournement de cette sphère autour d'un de ses grands cercles. C'est là un procédé qui serait peut-être choquant *a priori* si le maniement des sphères en tissus élastiques ne nous l'avait montré possible (1). C'est encore là un résultat expérimental tout à fait absolu. Nous pourrions dire que c'est un résultat expérimental *a priori*.

On ne saurait raisonner de même au sujet du postulat d'Euclide (ou du moins de celui que l'on nomme ainsi) parce que, sous quelque forme qu'on le présente, il offre un caractère quantitatif : alors, il est vrai qu'une expérience ne saurait donner un résultat absolu par suite de la nature même de l'expérience. Mais je crois aussi qu'il existe une autre raison, c'est que l'expérience ne saurait donner de résultat. La connaissance qu'elle amènerait au sujet de l'infinité de l'espace, au sujet de sa forme, est trop élevée pour nos esprits. Le fait d'acquérir de telles certitudes de l'extérieur devrait entraîner dans nos idées cosmogoniques une transformation qui ne saurait être aussi brusque. C'est en nous et non en dehors de nous que nous devons trouver la raison d'être de tels faits. Peut-être dira-t-on que cette raison naît d'une métaphysique bien sentimentale. Je n'en disconviendrai pas.

Resterait à traiter une question : le rôle donné aux postulats

---

(1) Il est vrai que la superposition ne se fait pas alors sans déformation. D'ailleurs les raisonnements géométriques ne supposent pas l'*indéformabilité* mais seulement la *superposabilité*. La notion d'indéformable n'entre que dans la représentation graphique du raisonnement.

dans l'enseignement de la géométrie. Nous n'avons point à voir s'il faut enseigner cette science, mais comment on le pourrait faire. Faut-il déplorer cette suite de théorèmes du premier et du deuxième livre, que les enfants savent par cœur? J'ai vu plus tard que, dans la plupart des ouvrages secondaires, ils n'avaient même point l'excuse de la précision. Je me rappelle aussi combien d'enfants révèrent la gloire de transformer en théorème ce « postulatum d'Euclide, que l'on admet sans démonstration », ainsi qu'il était écrit en italique. Cela est fâcheux ; le seul système serait de ramener ces postulats à des notions intuitives sans chercher à les expliciter. Y parviendra-t-on pour le postulat d'Euclide? Je n'ai pu parvenir à le faire, et la méthode employée plus haut serait mauvaise, car le postulat y agit par négation. Telle qu'elle est, je la crois plus satisfaisante que celle qu'on m'enseigna. En dehors de toute transformation, je crois la forme suivante meilleure que celle que l'on donne habituellement : Le postulat suivant : « Le lieu des points équidistants d'une droite est une droite » répond à notre expérience journalière, grossièrement du moins. Je crois qu'il est plus profitable en ce sens de masquer aux enfants les fondements de la science ; tout au moins est-ce aussi honnête que de leur en dire la moitié. Si d'autre part on leur ouvrait l'esprit à la géométrie générale, la notion d'un espace replié sur lui-même ou seulement d'un plan fermé à la façon d'une surface cylindrique leur semblerait tout à fait baroque. Il n'y a pour eux qu'une géometrie vraie.

Dans un cerveau de dix-huit ans les raisons d'agir ainsi disparaissent et je ne juge point mauvais que l'abord des situations dans notre société exige une certaine précision dans les connaissances géométriques. On peut y apprendre au moins à différencier parmi des sensations qui semblent n'avoir pas de lien, celles qui dérivent d'un même principe, c'est là un utile travail d'induction.

Ce qu'il faudrait pouvoir apprendre aussi, ce sont les raisons qui amenèrent Euclide à développer ce seul système. Répondait-il nécessairement à ce sens admirable de beauté et d'équilibre qui, dans l'art, créa une perfection? Quelque Helléniste nous le dira-t-il?

C. Lucas de Pesloüan (Paris).

CHRONIQUE

M. L. Cremona.

La science mathématique vient de faire une perte immense en la personne de l'un des plus illustres géomètres italiens. M. L. Cremona est décédé à Rome dans le courant du mois de juin dernier.

M. Cremona donne l'exemple d'une brillante carrière. Il restera célèbre non seulement par ses travaux scientifiques, mais aussi par les hautes fonctions qu'il a occupées avec une rare distinction dans l'enseignement supérieur et dans les affaires publiques; il était sénateur et fut ministre de l'Instruction publique.

Né à Pavie en 1830, il débuta dans l'enseignement en qualité de professeur au lycée de Cremone, puis à celui de Milan. Ses travaux dans le domaine de la Géométrie ne tardèrent pas à lui faire obtenir une chaire universitaire, celle de Géométrie supérieure à l'Université de Bologne. Il fut ensuite appelé à Rome pour travailler, en qualité de Directeur, à la réorganisation de l'École d'application des Ingénieurs; il fut également professeur à l'Université de Rome. M. Cremona était membre de toutes les académies importantes d'Italie; en outre, la plupart des grandes académies de l'étranger lui avaient conféré le titre de Membre correspondant. D'autre part nous ne saurions oublier que lors de la création de cette Revue, il nous donna son précieux appui moral en honorant *L'Enseignement Mathématique* de son patronage.

Les travaux de Cremona se rattachent principalement à la Géométrie supérieure, pure et appliquée, et à l'Analyse. Doué d'une remarquable habileté dans la Géométrie, il laisse une série de travaux fondamentaux d'une grande valeur, notamment dans la Géométrie projective et dans la théorie des courbes et des surfaces. Sa carrière scientifique demande des études approfondies qui vont sans doute être entreprises de différents côtés; dans cette notice hâtive nous ne pouvons tenir compte des nombreux mémoires insérés dans les périodiques mathématiques; nous devons nous borner à signaler les principales monographies.

1. Introduction à une théorie générale des courbes planes (en italien), Bologne, 1862, édit. allem. 1865.

2. Sur les transformations des courbes planes (en italien), Bologne, 1863-65.

3. Préliminaires d'une théorie géométrique des surfaces (en italien), Bologne, 1867; édit. allem., 1870.

4. Les figures réciproques dans la Statique graphique (en italien), 1872; édit. franç., 1885.

5. Eléments de Géométrie projective, édit. ital. 1873; édit. franç., 1875; édit., allem., 1882; édit. angl., 1894.

6. Eléments de Calcul graphique (en ital.); édit. franç., 1875.

Voici donc qu'en quelques années l'Italie perd trois de ses plus grands savants Brioschi, Beltrami et Cremona. Toutefois ce dernier a encore pu collaborer à la remarquable publication des « Opere Matematiche » de ses deux illustres compatriotes.

H. Fehr.

N. Bougaiev.

La Russie vient à son tour de perdre l'un de ses plus illustres mathématiciens, M. Bougaiev. professeur à l'Université de Moscou. Né à Douchet (Gouvernement de Tiflis), en 1837, Nicolas Bougaiev est mort le 29 mai (11 juin) 1903 à Moscou. Après avoir suivi les cours de l'Université de Moscou et de l'Académie des Ingénieurs à Saint-Pétersbourg, il fut reçu docteur ès sciences mathématiques et nommé professeur à l'Université de Moscou en 1866. Président de la Société mathématique de Moscou, depuis 1891, il fut élu en 1897 membre correspondant de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg. Sa disparition laissera un grand vide, non seulement en Russie, mais dans le monde des mathématiques de tous les pays. Comme M. Cremona, M. Bougaiev a fait partie du comité de Patronage de *L'Enseignement Mathématique*, qui se trouve donc cruellement frappé par la perte de deux de ses plus illustres membres.

Ses principaux travaux, insérés presque tous dans le *Recueil mathématique de Moscou*, ont porté plus particulièrement sur la théorie des nombres et l'analyse. Citons d'abord ses deux thèses : « Convergence des séries » et « Identités numériques se rattachant aux propriétés du symbole E » (thèse de doctorat). Signalons ensuite sa « théorie des dérivées numériques » et ses travaux relatifs aux applications de la théorie des fonctions elleptiques (*Recueil math.*, t. XI et XII).

On lui doit une série d'articles et d'analyses insérés dans les *C. R. de l'Académie des Sciences de Paris* et dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*.

A côté de ses travaux purement mathématiques, Bougaiev s'est aussi occupé de questions philosophiques. Mais il ne fut pas seulement un savant aux idées larges, il fut également un excellent professeur. Il laisse aussi un certain nombre d'ouvrages élémentaires, dont un traité d'Arithmétique et un recueil de problèmes d'Arithmétique.

L. Gegenbauer.

Le 3 juin 1903 est mort à Vienne un mathématicien de grande valeur, M. L. Gegenbauer. Né en 1849, M. Léopold GEGENBAUER était professeur à l'Université de Vienne ; il y enseignait plus particulièrement certains chapitres de la théorie des fonctions et donnait, ces dernières années, le cours général de calcul différentiel et intégral destiné aux étudiants en sciences physiques, chimiques et naturelles et aux actuaires. Ses travaux appartiennent principalement à l'Algèbre supérieure et à l'Analyse.

M. Gegenbauer dirigeait, avec MM. G. v. ESCHERICH et F. MERTENS, les *Monatshefte für Mathematik und Physik*. Sa mort prématurée est une perte sérieuse pour ce journal, comme pour la science mathématique en général. Que nos confrères reçoivent nos plus sincères condoléances.

3e Congrès international des mathématiciens.

Nos lecteurs savent que le prochain congrès international des mathématiciens aura lieu en 1904 à Heidelberg et qu'il sera préparé par les soins de l'*Association des mathématiciens allemands*. Le comité qu'elle a constitué à cet effet vient d'arrêter, dans ses grandes lignes, le programme du Congrès.

I. — Le Congrès aura lieu du 8 au 13 août 1904. Il sera présidé par M. le professeur H. WEBER (Strasbourg). Il comprendra *six sections* qui seront présidées comme suit :

1° Arithmétique et Algèbre : par MM. KNESER et LUROTH ;
2° Analyse : par MM. HILBERT et SCHWARZ ;
3° Géométrie : par MM. BRILL, MEYER et SCHUR ;
4° Mathématiques appliquées : par MM. HAUCK, KLEIN et RUNGE ;
5° Histoire des mathémathiques : par MM. CANTOR et STAECKEL ;
6° Enseignement : par SCHUBERT et TREUTLEIN.

En même temps que ce Congrès le Comité organisera la célébration du centenaire de JACOBI.

II. — Le *Comité local* se compose provisoirement de MM. les professeurs CANTOR et KÖNIGSBERGER et de MM. les Conseillers ELLMER, FUCHS, KRALL et KRIEGER

III. — *Finances*. Le Gouvernement badois a promis son appui financier pour une somme de Mk. 3 000.

La *carte de membre* du Congrès sera délivrée moyennant le paiement de Mk. 20 ; il y aura, en outre, des cartes spéciales, au prix de Mk. 10, pour les personnes accompagnant un membre du Congrès.

La commission des finances se compose de MM. KLEIN, SCHWARZ, WEBER et KRAZER; ce dernier fonctionne en qualité de trésorier du Congrès.

IV. — *Programme* : Lundi, 8 août 1904; 5 h. soir, séance du Comité; 8 h. soir, séance de réception. — Mardi, 9 août; 10-1 h. première séance générale, discours de M. Königsberger; 4 h., organisation des sections; 6 h. banquet. — Mercredi 10 août, 9-11 et 12-2 h. : séances des sections; après-midi et soir, réunion familière libre. — Jeudi 11 août, 10-1 h. ; 2e séance générale (2 ou 3 conférences); 6 h. illumination du château. — Vendredi 12 août ; 9-11 et 12-2 h. séances des sections; après-midi et soir, réunion familière libre. — Samedi 13 août ; 9 h. séance administrative; 10-1, 3e séance générale (2 conférences, clôture du Congrès).

Pendant le Congrès il paraîtra, tous les matins, un journal du congrès contenant la liste et l'adresse des participants et le programme de la journée.

Pour tout ce qui concerne le Congrès, s'adresser à M. le Professeur Docteur A KRAZER, *Karlsruhe*, 1, B., Westendstr. 57.

V. — *Expositions*. Le Comité a décidé d'organiser à l'occasion des congrès une *exposition de modèles mathématiques* et une *exposition des publications mathématiques*. Dans les deux on se bornera, le plus possible, aux travaux présentés aux cours des dix dernières années.

Ces expositions seront organisées, l'une, par MM. DISTELI, v. DYCK et MEHMKE ; l'autre par MM. GUTZMER et KRAZER.

Nous ne pouvons que féliciter le comité de l'excellente résolution de ces deux expositions ; nous le faisons avec d'autant plus de plaisir que nous avons nous-mêmes été de ceux qui ont proposé l'organisation d'une exposition de modèles et instruments mathématiques. Il est à désirer que ces expositions restent ouvertes au moins pendant tout le mois d'août afin qu'elles puissent être visitées par le plus grand nombre possible de professeurs des divers degrés de l'enseignement mathématique.

Congrès international de Philosophie.

Sur la demande de la Commission d'organisation nommée au Congrès de Paris, en 1900, le deuxième Congrès international de Philosophie aura lieu à Genève en 1904, dans la première semaine de septembre, sous la présidence d'honneur de M. Ernest NAVILLE, et sous la présidence effective de M. le professeur J.-J. GOURD. Les thèmes proposés à la discussion seront publiés ultérieurement. Toutes les communications concernant le Congrès doivent être adressées au secrétaire général, M. Ed. Claparède, 11, Champel, Genève.

CORRESPONDANCE

Sur la formule du binôme.

Généralement (surtout parmi les élèves) on s'imagine qu'il est impossible d'établir la formule du binôme sans connaître la théorie des combinaisons. Or, ce sont là deux choses tout à fait indépendantes l'une de l'autre. En effet, laissant de côté certaine démonstration de la formule de Newton, fondée sur la méthode d'induction, et par conséquent peu propre à figurer dans un cours — je prétends qu'on peut réussir, avec des débutants, en procédant comme il suit.

Appelons, comme tout le monde, dérivée d'un polynôme entier $f(x)$, la limite vers laquelle tend.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

quand h tend vers zéro, et cherchons, en particulier, la dérivée de α^m, α désignant une constante, et m un entier positif. De l'identité

$$\alpha(x+h)^m - \alpha x^m = \alpha h\,[(x+h)^{m-1} + (x+h)^{m-2}x + \ldots + x^{m-1}]$$

on déduit

$$\frac{\alpha(x+h)^m - \alpha x^m}{h} = \alpha \sum_{p=0}^{p=m-1} (x+h)^{m-1-p}x^p.$$

Or, quand h tend vers zéro, chaque terme écrit sous le signe Σ a la même limite, x^{m-1}; et comme ces termes sont au nombre de m, leur somme a pour limite mx^{m-1}. Donc la dérivée cherchée est $m\alpha x^{m-1}$.

Ensuite, la dérivée du polynôme $f(x)$ étant la somme des dérivées de ses termes, on en déduira,

$$f'(x) = ma_0x^{m-1} + (m-1)\,a_1x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}$$

et pour les expressions des dérivées suivantes :

$$f''(x) = m\,(m-1)a_0x^{m-2} + \ldots + 2a_{m-2}$$

. . . .

$$f^m(x) = m(m-1)\ldots 2.1.\,a_0\,;$$

Puis :

$$f(x) = f(o) + \frac{x}{1} f'(o) + \frac{x^2}{1.2} f''(o) + \ldots + \frac{x^m}{m!} f^m(o).$$

En particulier, si $f(x)$ est le développement de $(a+x)^m$, ce qui précède montre que l'on a, en changeant x en $a+x$:

$$f'(x) = m(a+x)^{m-1}, \qquad f'(o) = ma^{m-1}$$
$$f''(x) = m(m-1)(a+x)^{m-2}, \qquad f''(o) = m(m-1)a^{m-2}, \text{ etc.}$$

et par conséquent

$$f(x) = a_m + \frac{m}{1} a^{m-1} x + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} x^2 + \ldots + x^m$$

V. Jamet (Marseille).

A propos d'un article sur le calcul des probabilités.

Je demande pardon aux lecteurs de la *Revue* de prolonger devant eux un débat qui touche à peine aux mathématiques bien qu'il y soit question de probabilités, assez simple d'ailleurs pour que chacun puisse se faire une opinion personnelle après quelques minutes de réflexion. Mais MM. Vaschide et Piéron semblant induire de notre discussion que la fréquentation des formules est un obstacle nécessaire à l'intelligence des choses, les mathématiciens ne sauraient m'en vouloir de protester doucement contre cet arrêt de déchéance un peu brutal. En défendant une dernière fois mon point de vue, je n'aurai pas d'arguments nouveaux à présenter; il suffira de soumettre à un examen attentif ceux qui ont été produits de part et d'autre.

Je laisse de côté le premier point visé dans ma lettre puisque aussi bien nous sommes maintenant d'accord et j'arrive de suite à l'argument du joueur à rouge et noire.

Nos auteurs consacrent plusieurs lignes à la définition, qu'ils jugent décisive, du mot *série*. Une série, c'est, d'après eux, une succession de coups d'une même couleur précédés et suivis d'un coup de couleur différente. Pour être plus ou moins heureuse une définition n'en est pas moins essentiellement arbitraire; elle est quelquefois indiquée par cet ensemble d'actions et de réactions qu'exercent les uns sur les autres les mots d'une langue et qui constitue son génie, mais elle n'est jamais imposée par la raison et son seul objet est de préciser et d'alléger le langage. A moins que, comme il arrive quelquefois, le choix d'un mot n'ait justement pour but d'égarer la raison en lui suggérant certaines idées préconçues et irraisonnées sur le rôle spécial de l'objet dénommé par rapport aux objets analogues non dénommés; ici, par

exemple, d'insinuer que l'apparition d'une série nombreuse donne sur les événements futurs des renseignements qui manquent lorsque la série fait défaut. Mais ceci n'est qu'un sophisme; en bonne logique, ce n'est pas en discutant sur la légitimité d'une convention verbale, que j'accepte d'ailleurs comme j'accepterais toute autre, qu'on peut élucider n'importe quel point de fond, la thèse du joueur par exemple.

On peut présenter cette thèse sous la forme suivante. Un joueur assiste au jeu de rouge et noire et voit sortir une noire et six rouges de suite. Si à ce moment il entre au jeu il doit mettre sur la noire, car les séries de plus de six rouges sont fort peu problables.

Pour rétorquer l'argument, il ne suffit pas de dire avec mes honorables contradicteurs que la notion de probabilité s'évanouit pour un cas unique. L'assertion est contestable; d'ailleurs si l'avantage, bien qu'aléatoire, existe pour un coup unique, il se manifestera certainement lorsqu'on répétera l'épreuve. Il n'y a donc là qu'un semblant de réfutation.

Voici ma réponse. Toute question de probabilité repose en dernière analyse sur une convention plus ou moins déguisée, parfois si naturelle qu'elle passe inaperçue, et relative à l'énumération des cas regardés comme également vraisemblables. Il entre ainsi dans la notion même de probabilité, en tant que grandeur, un élément irrationnel ne relevant que du sens commun. De là résulte qu'à moins d'être incohérente, aucune affirmation sur la probabilité ne peut être qualifiée d'impossible ou d'absurde ; tout au plus pourra-t-on l'appeler bizarre et contraire au bon sens.

Devant le sens commun le joueur a tort. Si le hasard règle seul l'arrivée des couleurs et que, pour éviter toute supercherie, on suppose aveugle et sourde la personne chargée de le consulter, il est impossible d'imaginer par quel moyen s'exercerait l'influence supposée des coups joués sur les coups à jouer et, en réalité, l'apparition d'une série si prolongée soit-elle ne donne pas le moindre indice sur la couleur qui va sortir. La répugnance qu'éprouve un cerveau bien fait à admettre le contraire me paraît même empêcher seule nos contradicteurs de se ranger purement et simplement à l'avis du joueur. En tout cas si l'on adoptait le point de vue de ce dernier, on ne pourrait plus supposer constante, comme l'ont fait par inadvertance MM. Vaschide et Piéron p. 16, la probabilité de l'apparition d'une noire quels que soient les coups déjà joués.

Dans la supposition inverse, qui est la nôtre, la probabilité de chaque couleur est $\frac{1}{2}$ à chaque coup. D'où résulte par les principes du calcul des probabilités, que les séries homogènes sont *a priori* d'autant moins vraisemblables qu'elles sont plus longues. Le seul motif invoqué pour démontrer la thèse est justement la rareté de ces séries; mais on ne peut faire état en faveur de la thèse d'une propriété qui est une conséquence de la négative.

Quant à l'analyse employée par MM. Vaschide et Piéron pour mettre en évidence une contradiction inhérente à notre théorie et d'après laquelle les séries de 7, 8, 9 rouges devraient être aussi probables que celles de 6, elle n'est pas exacte.

On a déjà joué 7 coups; si l'on amène noire au 8^e coup, événement de probabilité $\frac{1}{2}$, la série sera de six rouges; si c'est rouge, événement dont la probabilité est aussi $\frac{1}{2}$, la série sera de plus de 6 rouges, on ne saura de combien au juste qu'en continuant la partie. La probabilité de faire une série de 7 rouges sera celle d'amener d'abord rouge puis noire, ou égale à $\frac{1}{4}$. De même, la probabilité de faire une série de 8 rouges sera celle d'amener deux rouges de suite, puis noire, ou égale à $\frac{1}{8}$. La probabilité de faire une série de 9, 10... rouges sera donnée par les nombres $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, etc. Ainsi la probabilité de faire une série de plus de six rouges est $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{1}{2}$ et se trouve égale, comme il fallait, à la probabilité d'amener rouge au 8^e coup.

En résumé la thèse et sa négative sont deux affirmations aussi justes l'une que l'autre au point de vue purement logique. La thèse n'est accompagnée d'aucune preuve, la négative seule satisfait cette obscure intuition du vrai qui est le bon sens. Le bon sens, il est vrai, peut se tromper et doit s'incliner devant les arrêts de l'expérience. Jusqu'à quel point peut-on parler d'expérience en matière de probabilité et quelle est la valeur démonstrative de cette expérience ? C'est là une question délicate d'un haut intérêt pratique et philosophique à peine abordée dans les traités classiques. En attendant la solution définitive de cette question, à laquelle MM. Vaschide et Piéron nous ont apporté une intéressante contribution, il reste au joueur, s'il veut faire triompher son dire, à instituer des essais où l'on comparera les successions de 6 rouges suivies d'une noire aux successions de six rouges suivies d'une rouge. Je doute fort pour ma part que ces dernières soient moins fréquentes que les autres.

C. Cailler (Genève).

BIBLIOGRAPHIE

F. Bohnert. — **Elementare Stereometrie**. — Un vol. cartonné, 183 p., *Collection Schubert:* prix : Mk. 2,40 ; G.-F. Goeschen, Leipzig, 1902.

Nous recommandons cet ouvrage à tous ceux qui enseignent la *Géométrie dans l'Espace*. Ils y trouveront, présentés sous une forme à la fois simple et claire, un certain nombre de problèmes, qui, malgré leur utilité immédiate, n'ont pas encore reçu, dans l'enseignement secondaire supérieur, la place qu'ils méritent.

L'auteur divise son ouvrage en deux parties. Dans la première, après avoir étudié les théorèmes concernant la droite et le plan et qu'il a réunis sous le titre de *Stéréométrie de position*, il passe à l'étude des angles polyèdres, puis il examine le calcul du volume des solides géométriques les plus simples en se basant sur le principe de Cavalieri. Sont encore étudiés les propriétés les plus importantes et les problèmes fondamentaux concernant la sphère et les polyèdres réguliers.

La seconde partie contient le calcul du volume des solides géométriques groupés d'après la classification de Heinze, puis les règles de Simpson et de Guldin et leurs applications. L'ouvrage se termine par un court aperçu des sections coniques envisagées comme sections planes d'un cône de révolution.

H. F.

J. Boussinesq. — **Théorie analytique de la chaleur** mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière. Tome 1er. *Problèmes généraux*. — Un vol. gr. in-8°, XXVII-333 p. ; prix : 10 francs ; Gauthier-Villars, Paris, 1902.

Au début du xixe siècle, Fourier, en découvrant la manière de mettre en équation les problèmes de la théorie analytique de la chaleur et la méthode d'intégration la plus convenable, a fondé l'une des branches les plus simples de la Physique mathématique.

Fourier et tous ceux qui l'ont suivi ont assimilé la chaleur à une substance indestructible sans cesse en mouvement pour passer des corps chauds aux corps froids ; et il a encore envisagé les corps solides comme étant composés d'un nombre immense de molécules, maintenues à d'imperceptibles distances et à des températures diverses et qui se céderaient les unes aux autres de la chaleur suivant la loi de Newton. C'est l'hypothèse du *rayonnement particulaire*. Les principes de la théorie mécanique de la chaleur ont montré, au contraire, que la chaleur est de la nature d'un travail; c'est donc en partie de l'énergie actuelle, ou cinétique, du mouvement vibratoire invisible des molécules des corps, et en partie de l'énergie potentielle développée par les forces en jeu dans ce mouvement.

Dans cette nouvelle manière d'envisager la chaleur, chaque molécule, dans un instant infiniment petit de son mouvement vibratoire, affectera les phases et les vitesses les plus diverses ; la température d'une molécule, qui est quelque chose d'indépendant de ces phases, ne peut avoir une valeur distincte pour chaque point matériel et il n'est plus possible d'attribuer une température propre à chaque molécule ; l'hypothèse du rayonnement particulaire ne saurait plus subsister.

M. Boussinesq s'est proposé d'exposer, dans un traité, dont le premier volume seulement a paru, la théorie de la propagation de la chaleur en se fondant sur les principes de la thermodynamique.

Il faut avant tout préciser la signification de quelques expressions; définir le flux de chaleur, la température d'un corps, etc.

Les molécules des corps sont animées de mouvements visibles quelconques et, de plus, soumises à des vifs mouvements vibratoires irréguliers, mais invisibles, en tant que mouvements, d'amplitude très faibles et de périodes extrêmement courtes autour d'une position moyenne. L'énergie d'un petit élément de volume, à cause de la non-participation des centres de gravité des particules au mouvement invisible, se compose seulement de l'énergie du mouvement visible et de l'énergie (évaluée en calories) du mouvement invisible ou calorifique, dite *chaleur sensible* du corps. Elle pourra se rapporter à l'unité de volume.

Envisageons l'énergie potentielle : la partie qui correspond aux actions mutuelles, qui s'exercent à des distances perceptibles, est constante ; la partie qui correspond aux actions moléculaires (énergie potentielle interne) s'exprime par simple addition des valeurs qu'elle a dans les divers éléments de volume du corps considérés séparément. Elle comprend l'énergie purement élastique et celle dépendant de l'agitation calorifique. C'est la *chaleur potentielle*, qui pourra aussi se rapporter à l'unité de volume.

La somme de la chaleur sensible et de la chaleur potentielle, par unité de volume, sera la *chaleur totale*.

Le travail élémentaire des forces extérieures comprend le travail des pressions ou des actions physiques exercées à la surface du corps dans son mouvement visible et le travail de ces mêmes actions dans le mouvement calorifique.

Ce dernier est, par définition, le *flux de chaleur* entré dans le corps par les divers éléments de sa surface dans l'instant dt.

Si les mouvements visibles sont très faibles, l'énergie actuelle ou potentielle ne comprend à très peu près que la partie calorifique. Alors le principe de la conservation de l'énergie nous donnera, en commun avec l'ancienne théorie, les principes fondamentaux de l'égalité entre les flux de chaleur qui pénètrent dans le corps par sa surface et l'accroissement de la chaleur totale d'un instant à l'autre ; et de l'égalité entre la chaleur gagnée par un corps à travers une partie quelconque de sa surface et celle perdue par la matière extérieure contiguë.

Mais avant d'en développer les conséquences, M. Boussinesq veut approfondir la nature de cette agitation moléculaire invisible et très rapide qui constitue la chaleur ; pour cela il examine, d'une manière qui n'est pas la chose la moins originale de son livre, les phénomènes de la chaleur rayonnante et de la lumière dans l'éther libre.

Qu'est-ce que l'éther, et quelles propriétés devons-nous lui attribuer ?

La résistance extrêmement faible que l'éther oppose aux mouvements des corps célestes nous oblige à le considérer comme un fluide d'une extrême mobilité et d'une densité presque nulle. Lord Kelvin a calculé que la densité de l'éther n'est pas moindre que 10^{-20} de celle de l'eau, et peut atteindre 10^{-15} ou un peu plus.

Mais cette fluidité est-elle conciliable avec la transversalité des vibrations qui constituent la lumière ou la chaleur, puisque les fluides, doués seulement de l'élasticité de volume, ne peuvent pas transmettre des vibrations transversales comme les solides ?

L'excessive brièveté des vibrations lumineuses, qui se succèdent de près d'un quatrillion par seconde, explique l'apparente anomalie. En effet, dès qu'un liquide ou un gaz est agité, sa fluidité est détruite ; des pressions obliques, comme dans un corps isotrope déformé, s'y développent. Les liquides et les gaz, grâce à une évolution imperceptible et appropriée des molécules, reforment sans cesse d'eux-mêmes la parité de constitution ; mais cela exige un certain temps et cette évolution n'est plus possible lorsque les molécules doivent exécuter plus d'un trillion d'imperceptibles vibrations par seconde. Donc, pour ces vibrations, l'éther se comporte comme un solide isotrope. Mais il y a plus : l'uniformité de la propagation des mouvements ondulatoires exige que le milieu où ils se transmettent se comporte comme une masse déformable et continue. On doit encore admettre que les intervalles séparant les molécules d'éther et les distances auxquelles s'exercent les actions en jeu dans le mouvement vibratoire, se réduisent à des fractions extrêmement faibles de la longueur d'ondulation λ ; sans cela les équations aux dérivées partielles de la propagation cesseraient d'être homogènes comme le supposent les lois simples de la physique et elles ne seraient non plus du second ordre.

Le phénomène de la dispersion dans tous les milieux où l'éther est parsemé de molécules pondérables, prouve au contraire qu'il n'en est pas de même de la matière pondérable.

Dans toute théorie de la dispersion, on doit découper dans les corps transparents de petits volumes constitués de même à côté les uns des autres et de dimensions comparables à λ. Alors les variations des déplacements vibratoires sont des différences finies ; leur développement en série de Taylor introduit dans les équations du mouvement des dérivées d'ordre supérieur ; les équations ne sont plus homogènes, ce qui entraîne la variabilité de la vitesse de propagation avec λ, c'est-à-dire la dispersion.

Donc, malgré l'extrême faiblesse de sa densité, l'éther renferme par unité de volume incomparablement plus de particules que n'importe quelle matière pondérable.

Cela exige que nous nous représentions l'éther comme une poussière atomique de points matériels presque sans masse, assez petits et assez rapprochés pour qu'on puisse le considérer comme un fluide continu. Son action sur une molécule pondérable en repos ou en mouvement restera toujours peu sensible pour la mouvoir ou pour la retenir ; il sera très élastique pour l'énorme intensité des actions atomiques, à la manière d'un solide isotrope : il pourra propager les vibrations transversales qui constituent la lumière ou la chaleur rayonnante avec une prodigieuse vitesse, grâce à l'extrême faiblesse de sa densité qui le rend presque dépourvu d'inertie ; mais il ne pourra transmettre des ondes à vibrations longitudinales, surtout si elles sont d'am-

plitude appréciable, comme celles qui constituent le son dans l'air ou dans l'eau.

L'équation qui régit, à une première approximation, la propagation des vibrations transversales de l'éther et dont M. Boussinesq donne aussi une démonstration directe sans rien emprunter à la théorie de l'élasticité, montre *a posteriori* les propriétés déjà admises.

Qu'arrivera-t-il lorsque les ondulations lumineuses ou calorifiques propagées dans l'éther libre arrivent à la surface d'un corps et pénètrent dans ses espaces intermoléculaires ?

L'hypothèse la plus naturelle est de supposer l'éther où baignent les molécules des corps solides ayant la même densité et, par suite, la même élasticité de l'éther libre de même que l'air ou l'eau ne subissent aucune modification appréciable par le fait des poussières qui s'y trouvent disséminées. Les molécules du corps, énormément plus denses que l'éther, et qu'on pourra considérer comme absolument fixes, opposeront une résistance aux vibrations de l'éther lorsqu'il sera animé par une série d'ondes. La résistance opposée par des corps fixes à un fluide qui les entoure et dont les mouvements sont à courte période, se compose de deux parties dont l'une est proportionnelle à l'accélération, l'autre à la vitesse du fluide. Si un projectile traverse l'air ou l'eau, c'est cette seconde partie qui est prépondérante ; tandis que dans le mouvement d'un pendule de faible longueur, c'est la première et sa mise en compte dans l'équation du mouvement ne produit qu'un accroissement fictif de la masse. Pour l'éther, l'accélération absolue moyenne est de l'ordre de $\frac{1}{\tau^2}$, tandis que la vitesse est de l'ordre de $\frac{1}{\tau}$, si τ est la période du mouvement vibratoire ; la résistance est donc proportionnelle à l'accélération. Les équations du mouvement ondulatoire de l'éther d'un corps isotrope transparent ou diathermane se déduisent aussitôt, et l'on arrive, comme pour le pendule, à la conclusion que la résistance des molécules pondérables portera fictivement la densité ρ de l'éther à la valeur $\rho\ (1 + \alpha)$, et de là se motive, d'une manière toute naturelle, l'hypothèse de Fresnel des inégales densités de l'éther dans les divers corps transparents, malgré la constance de son élasticité. La longueur d'ondulation est réduite dans le rapport de $\sqrt{1 + \alpha}$ à 1, et comme elle est encore très grande par rapport aux intervalles moléculaires, α ne doit pas être trop grand ; c'est une première condition pour la transparence ou diathermanéité d'un corps. Une autre condition se trouve en considérant que les molécules pondérables, dans ces corps, n'ont aucune action mutuelle ; c'est-à-dire que chaque molécule se comporte comme si elle était soustraite à l'action des autres ; alors la matière pondérable ne reçoit de l'éther que des quantités absolument négligeables d'énergie actuelle ou de chaleur sensible ; c'est la deuxième condition.

Si ces deux conditions ne se vérifient pas, le corps acquiert opacité ou athermanéité ; le mouvement cesse d'être ondulatoire et devient une agitation irrégulière. Les équations du mouvement ne sont plus linéaires, homogènes et à coefficients constants ; le fait capital de la composition et de la simple superposition des déplacements, leur indépendance mutuelle, cessent d'avoir lieu. L'agitation calorifique est rebelle à notre analyse. Elle est encore possible dans les mêmes hypothèses des corps transparents, c'est-à-dire si le

rayon d'activité des actions moléculaires est assez court et les molécules pondérables assez rapprochées, pour que l'énergie actuelle puisse se communiquer largement à ces molécules sans perdre son caractère ondulatoire.

L'intensité de cette agitation irrégulière est mesurée par l'énergie vibratoire totale, car on ne peut parler non plus, comme pour le son et la lumière, de la hauteur et de la couleur. Voyons si elle produit quelque effet sensible.

Si dans une particule en repos les molécules viennent à osciller calorifiquement, nous aurons des rapprochements et des écartements entre les molécules, qui produiront des répulsions et des attractions. Mais les premières, qui assurent l'impénétrabilité, sont beaucoup plus intenses que les secondes, qui assurent la cohésion ; alors il y aura, sur tout élément plan, un excédent des répulsions et une pression notable intérieure qui produira un mouvement sensible d'expansion, c'est-à-dire une dilatation. Cette dilatation, qui donne une mesure de l'intensité de l'énergie, n'est pas aisément mesurable dans tous les corps ; on ne pourrait même comparer que les intensités d'un même corps sans avoir une échelle unique. La loi physique de l'équilibre de température, par laquelle un corps communique une partie de sa chaleur à ceux qui le touchent et qui sont à l'état de repos interne, jusqu'à ce que l'agitation de ceux-ci ait atteint une certaine limite, permet de faire servir un seul corps pour établir les degrés d'agitation calorifique des corps. En effet, si les deux corps sont de même nature, cette limite, pour le corps primitivement froid, n'est autre chose que l'état du corps chaud à l'état d'équilibre ; alors on pourra comparer les degrés d'agitation de tous les corps de même nature avec ceux d'un autre corps choisi à volonté (thermomètre). La loi expérimentale que deux corps en équilibre de chaleur avec un troisième, le sont entre eux, pourra faire adopter pour tous les corps un même thermomètre ou une même échelle. Chaque degré de cette échelle est une *température*.

Dans chaque question le zéro sera déterminé par la température la plus importante ; l'excédent u sur celle-là de chaque température effective n'aura que des valeurs petites par rapport à la température absolue. Par conséquent la chaleur totale γ par unité de volume sera de la forme

$$\gamma = A + Cu,$$

A étant la valeur de γ à la température absolue du zéro choisi ; C la chaleur spécifique du corps par unité de volume. La variation de la chaleur totale, produite par les changements de température survenus pendant dt, aura pour expression

$$dt \int C \frac{du}{dt}\, d\varpi = d \int \gamma d\varpi$$

et, en vertu de l'équation des forces vives, elle sera égale au flux à travers la surface du corps.

Mais pour exprimer le flux en fonction de u, afin d'obtenir l'équation aux dérivées partielles de la propagation de la chaleur, encore un pas est à faire. Avant tout la propriété que la chaleur totale cédée à un élément de volume par la matière environnante égale la somme algébrique des flux qui traversent ses diverses faces en venant du dehors, presque évidente dans l'ancienne théorie, n'est pas moins vraie ; c'est ce que prouve un raisonnement bien

simple. Lorsqu'on a un état normal, c'est-à-dire si $\frac{du}{dt}$ est fini, la somme algébrique des flux de chaleur venus du dehors à travers les diverses faces d'un élément de volume, est comme infiniment petite comparativement à leur somme arithmétique. C'est le principe de la *quasi-neutralisation* des flux de chaleur.

Deux applications capitales sont les suivantes :

La continuité des flux, pour unité d'aire, relatifs aux éléments plans qui se déplacent dans le corps parallèlement à eux-mêmes.

L'égalité des flux à travers les deux faces de la couche séparative de deux corps ou milieux contigus.

Dès lors on peut faire les considérations bien connues de Cauchy qui introduisent les flux principaux relatifs aux axes coordonnés, le flux maximum ou courant de chaleur, etc.

M. Boussinesq, en poursuivant les recherches de Lamé et Duhamel, a pu obtenir dans la représentation géométrique de la théorie des flux, tout en restant dans le cas le plus général, beaucoup de simplicité et d'élégance.

Les composantes des flux suivant les axes sont des fonctions linéaires des trois dérivées de la température u : on a donc en général neuf coefficients de conductibilité : six indirects et trois directs positifs. Ils se réduisent à trois dans les corps à contexture symétrique, et à un seulement dans les corps isotropes. Le flux maximum ou courant de chaleur, et le flux qui traverse l'élément plan isotherme $u = \cos t$ en venant du côté de la normale positive (pente de température) ne tiennent pas au choix des axes. Ils donnent lieu à considérer deux coefficients de conductibilité ; l'un suivant le courant, l'autre suivant la pente de température. La représentation de ce dernier se fait par l'ellipsoïde principal de Lamé. Pour les axes de cet ellipsoïde, les six conductibilités indirectes sont deux à deux égales et de signes contraires. En particulier, les milieux où ces six conductibilités sont égales deux à deux, se comportent, au point de vue de la propagation de la chaleur comme s'ils étaient symétriques. Dans ce cas il existe un potentiel des flux et l'ellipsoïde de Lamé et son réciproque suffisent, comme on sait, à la représentation de la conductibilité suivant la ligne de pente de température et la ligne du courant. Mais les constructions de Lamé ne suffisent plus dans le cas d'une contexture non symétrique. Alors la considération d'un autre ellipsoïde dont les rayons vecteurs représentent, par leurs carrés, les conductibilités des courants qui ont leur direction (ellipsoïde de conductibilité), permet de donner, de la manière la plus élégante, la construction générale des courants de chaleur, étant donnée, dans une particule, la disposition des éléments plans isothermes, et inversement. Ces constructions se simplifient dans les barres, les plaques minces et les cristaux

On a maintenant tous les éléments pour la recherche, selon les méthodes usuelles, des équations de la propagation de la chaleur dans les corps athermanes sans source intérieure ou dans les corps diathermanes.

L'auteur en effet déduit les équations indéfinies et à la surface dans divers cas d'échauffement par rayonnement, par convection, etc. Il aborde même la question si épineuse de savoir si les équations de la propagation déterminent les températures successives, c'est-à-dire la question de l'existence d'une solution, au point de vue de l'analyse, dans les problèmes de la théorie analytique de la chaleur. L'essai de démonstration esquissé par l'auteur,

emprunte nécessairement encore quelque chose à l'expérience ; mais M. Boussinesq, très justement, observe que :

« Nous sommes loin encore de l'époque (si elle arrive jamais) où la Physique mathématique pourra ne faire appel à l'observation que pour poser les premiers principes de chacune de ses branches et où elle se dispensera de baser purement et simplement sur l'expérience, dans ses démonstrations, le *postulatum* de la variation graduelle de toutes les fonctions qu'elle emploie. »

M. Boussinesq ne veut pas entrer dans le détail des recherches récentes de MM. Poincaré, Stekloff et Le Roy.

En revanche, on peut démontrer rigoureusement l'unité de la solution et aussi que tout problème de la théorie de la chaleur se ramène à deux problèmes fondamentaux : celui du refroidissement simple et celui des températures stationnaires.

Dans le problème général du refroidissement, quelle sera la forme générale de l'intégrale ? Si l'on substitue à l'ensemble des corps un nombre très grand de points fixes, on obtient un système d'équations linéaires du premier ordre, dont la forme de l'intégrale est connue ; alors, par simple induction, on est conduit à l'expression générale de la température et qui se compose par addition de solutions simples d'une forme connue. C'est bien ce qu'il faut demander directement aux équations du problème. Dans les corps à contexture symétrique, les solutions simples ne contiennent aucun facteur trigonométrique ou algébrique en t; elles sont donc de la forme $e^{-mt}u$. Ces exponentielles sont décroissantes et m satisfait à une équation caractéristique à racines toutes réelles. La première solution simple correspond à la plus petite racine m_0. M. Picard, dans un cas particulier, a établi que cette racine est simple ; c'est ce qui arrive encore dans tous les cas connus ; il ne lui correspond donc qu'une seule fonction u. Qu'arrivera-t-il si le temps croît au point de rendre e^{-mt} très petit ? La série formée par les solutions simples, se réduira presque au premier terme

$$c_0 e^{-m_0 t} u_0,$$

qui conserve un même signe dans toute l'étendue du système, comme l'a démontré M. Poincaré.

Ce premier terme exprimera donc la température bien avant qu'elle s'annule physiquement. Son mode de distribution aux divers points, exprimé par u_0 est invariable, indépendant de l'état initial et déterminé uniquement par la constitution géométrique et physique du corps. Non seulement, donc, l'état final ($u = 0$) est indépendant des irrégularités de l'état initial, mais le phénomène s'harmonise aussi dans sa marche, au point de se débarrasser des inégalités accidentelles durant une longue période dès qu'il a atteint ce qu'on appelle, suivant Fourier, son *état pénultième*.

M, Boussinesq, enfin, n'expose pas seulement des théories générales ; il les applique aussi au beau problème de Fourier de la température du sol terrestre, à l'armille, à l'étude comparée du refroidissement de la sphère et du cube, etc.

Je ne me flatte pas d'avoir mis en évidence toutes les beautés du livre de M. Bonssinesq, dans cet exposé nécessairement sommaire.

M. Boussinesq, dans l'exposé de chaque question, veut être, avant tout, physicien : dans les solutions finales, sans de grandes complications de for-

mules, il cherche à lire les grandes lois, suivant le modèle à jamais célèbre de l'œuvre immortelle de Fourier. Il essaie d'expliquer la nature intime des équations différentielles du problème à traiter, il soumet à une discussion approfondie toutes les hypothèses et, chose tout à fait capitale, les développements analytiques lui sont presque toujours suggérés par des considérations mécaniques ou physiques.

Ce sont des qualités que nous voudrions trouver dans tous les traités de Physique mathématique et qui rendent très instructive la lecture de l'ouvrage si éminemment philosophique de M. Boussinesq.

R. Marcolongo (Messine).

Rob. Fricke. — **Hauptsätze der Differential und Integral-Rechnung,** zusammengestellt als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen. Dritte umgearbeitete Auflage. — Un vol. in-8° ; 218 pages ; prix : Mk. 5 ; Friedr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig, 1902.

Ce volume contient le *résumé des éléments de Calcul différentiel et intégral* indispensables aux techniciens. En le rédigeant, M. Fricke a rendu un grand service à une catégorie importante d'étudiants. Nous en voyons la preuve dans la rapidité avec laquelle les deux premières éditions ont été enlevées.

Il va de soi que, bien qu'il soit destiné aux élèves des écoles techniques, ce volume n'a pas pour but de remplacer un traité. Suivant le but que s'est proposé l'auteur, ce résumé est destiné, avant tout, à permettre aux étudiants de suivre plus facilement le cours de Calcul différentiel et intégral et à leur donner un canevas pour le travail de revision.

Voici les titres des cinq sections qui constituent ce volume : Introduction. Les bases du Calcul différentiel. Application du Calcul différentiel. Bases et applications du Calcul intégral. Fonctions de plusieurs variables indépendantes. Introduction à la théorie des opérations différentielles. Appendice : Nombres complexes et fonctions à une variable complexe.

H. F.

Netto (Dr Eug.). — **Lehrbuch der Combinatorik.** — Un vol. cart. in-8°, 260 p. ; prix : Mk. 9. — B.-G. Teubner, Leipzig, 1902.

Depuis la publication de l'ouvrage d'Oettinger, *Lehre von den Combinationen*, 1837, il n'avait paru aucune monographie sur ce même sujet. L'analyse combinatoire s'est pourtant enrichie d'un grand nombre d'importants travaux ; de nouveaux problèmes ont été soulevés, tandis que certains problèmes anciens ont pu être généralisés. Ces matériaux, disséminés dans un grand nombre de revues, viennent d'être réunis et groupés d'une façon méthodique par M. Netto. Il faut reconnaître que cet ouvrage répond à un réel besoin et que nul n'était mieux désigné pour entreprendre un travail aussi aride que le savant professeur de Giessen.

M. Netto présente l'analyse combinatoire comme une science indépendante ayant à résoudre des problèmes qui lui sont propres. Son exposé ne sera pas seulement le bienvenu auprès de ceux qui s'intéressent spécialement à ce domaine, il rendra également de grands services à tous les mathématiciens, car aujourd'hui les notions de l'analyse combinatoire interviennent dans les domaines les plus divers.

L'ouvrage est divisé en treize chapitres. Le premier traite des opérations

combinatoires ordinaires telles qu'on les trouve dans les manuels d'Algèbre ; on y rencontre cependant quelques problèmes plus généraux, que l'on n'a pas coutume de rencontrer dans les ouvrages élémentaires. A ces notions se rattachent, dans le deuxième chapitre, le théorème du binôme et ses extensions dues à Abel et à Burg et le théorème du polynôme.

Dans le chapitre III, consacré aux complexions avec ordre limité, sont traités un certain nombre de problèmes célèbres tels que le *Proteus-Verse*, corrigé par M. Netto, les problèmes des déterminants de Weyrauch et de Longchamps, le problème de M. Cantor-Baur, etc.

L'auteur présente ensuite (chap. IV) la théorie de l'*inversion*, à laquelle vient se rattacher le théorème de Metzler, et la *théorie des séquences*, d'après les travaux de M. Désiré André.

Les trois chapitres suivants traitent des combinaisons et des arrangements relatifs à une somme donnée et des propriétés relatives à la *décomposition d'un nombre en m addendes* satisfaisant à des conditions données. La résolution de ces problèmes repose, en grande partie, sur les travaux de Sylvestre ; elle donne lieu à une série de beaux théorèmes et exercices qui se rattachent plus particulièrement à la théorie des nombres.

Le problème analogue de la *décomposition d'un nombre en m facteurs* est examiné dans le chapitre suivant ; les développements analytiques auxquels il donne lieu fournissent d'intéressants théorèmes et se trouvent appliqués aux problèmes de Möbius et de Scherk.

L'auteur étudie ensuite (chap. IX) les autres opérations combinatoires ; il examine, entre autres, les permutations circulaires, et, dans les problèmes, ceux de Catalan et de Schröder. Puis vient une étude approfondie du problème de Steiner et Kirkmann relatif à la formation de groupes de 3 éléments pris dans n éléments donnés, les groupes étant tels que tout couple de deux éléments figure, et une fois seulement, dans un groupe.

Dans le chapitre suivant, M. Netto présente les principales *applications* de l'analyse combinatoire, puis il groupe, dans le dernier chapitre, les formules fondamentales étudiées dans ce livre.

Dans ce domaine des mathématiques il reste encore bien des problèmes à résoudre ; l'auteur en signale un certain nombre en les accompagnant des indications bibliographiques qui permettront au lecteur de s'orienter sur l'état actuel des recherches.

E. Gubler (Zurich).

Errata. — M. E. Bortolotti nous signale quelques fautes d'impression qui se sont glissées dans son compte rendu bibliographique des *Leçons sur les séries à termes positifs* de M. E. Borel (voir le précédent numéro, p. 226-228).

Pages	227	ligne	17	au lieu de	$\omega^2 e \omega^{-1}$	lire	$\omega^{-2} e \omega^{-1}$
»	228	»	21	»	ε^m	»	ε_m
»	»	»	24	»	p	»	$p = \frac{1}{lg\,(lgn)}$
»	»	»	25	»	$\frac{e^{\frac{1}{lg\,(lgn)}}}{e^{lg\,(lgn)}-1}$	»	$\frac{e^{\frac{1}{lg\,(lgn)}}}{e^{\frac{1}{lg\,(lgn)}}-1}$

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

American Mathematical Monthly (The), publication mensuelle dirigée par B.-F. Finkel et J.-M. Colaw. Springfield (U. S. A.). Vol. IX et X.

Vol. IX. Fasc. 11. — L.-E. Dickson : A matrix defined by the Quaternion Group. — B. Halsted : The length of the circle. — S. Epsteen : An elementary account of the Picard-Vessiot Theory. — A. Henderson : Two simple constructions for finding the foci, etc...

Fasc. 12. — A. Emch : Closed loxodromics of the torus. — G.-A. Miller : On Ball's History of Mathematics. — J. Quinn : A development of the Conic Sections by kinematic methods. — A. Henderson : Suite des études du numéro précédent.

Vol. X, 1903. Fasc. 1. — W.-M. Haskell : On a certain rational cubic transformation in space. — S. Epsteen : Determination of the group of rationality of a linear differential equation. — G.-W. Greenwood : Some fallacies in Text-Books on elementary solid Geometry. — H.-L. Coar : The volume of the sphere. — G.-R. Dean : Derivation of formula for $\operatorname{tang} \frac{A}{2}$ in Spherical Trigonometry.

Fasc. 2. — G.-A. Miller : An elementary example of modular systems. — W. Haskell : Generalization of a fundamental theorem in the Geometry of the Triangle. — G.-R. Dean : Integration as a Summation. — Fl. Cajori : On the chinese origin of the symbol for zero. — A. Henderson : The Derivation of the Brianchon configuration from two spatial Point-Triads.

Fasc. 3. — E. Kasner : The group generated by central symmetries, with application to polygons. — S. Epsteen : Analog of Sylvester's dialytic method of elimination. — A.-B. Pierce : Sufficient condition that two linear homogeneous differential equations shall have common integrals. — R. Dean : Note on the polar of a point as to a Conic. — W. Williamson : Computation of logarithms.

Annals of Mathematics, publiées sous les auspices de la Harvard University par O. Stone, W.-E. Byerly, H.-S. White, W.-F. Osgood, F.-S. Woods. Cambridge, U. S. A. Publication trimestrielle, gr. in-4°. Second Series, Vol. 4, 1902-1903.

N° 2. — J.-W. Bradshaw : The logarithm as a direct function. — P. Saurel : On positive quadratic forms. — E.-A. Hook : Multiple points on Lissajou's curves in two and three Dimensions. — C. Engberg : A special quadri-quadric transformation of real points in a plane.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet von Carl Ohrtmann. Im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung der Herren Felix Muller und Albert Wangerin herausgegeben von Emil Lampe und Georg Wallenberg. Band 31, Jahrgang 1900 (in drei Heften); George Reimer, Berlin, 1901.

Heft 3. — Mechanik. — Mathematische Physik. — Geodäsie, Astronomie, Meteorologie.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, in Monatsheften herausgegeben von A. Gutzmer in Iena. — Band 12, 1903; B.-G. Teubner, Leipzig.

Heft 1. — A. Gutzmer : Chronik der D. M. V. — Fr. Meyer : Bericht über den Stand der Encyklopädie d. math. Wiss. — E. Czuber : Ueber einen Satz der Fehlertheorie u. seine Anwendung. — G. Kowalewski : Ueber die proj. Gruppe der Normkurve u. eine charakteristische Eigenschaft des R_6. — H. Liebmann : Ueber die singularitätenfreie konforme Abbildung geschlossener Flächen auf die Kugel. — W. Haskell : Die Darstellung von gewissen Resultanten in Determinantenform. — E. Jahnke : Ferd. Caspary. — B. Kagan : Nachtrag zu einem Aufsatz über die Postulaten der eukl. Geometrie. — M. Brendel : Das Gauss-Archiv. — Mitteilungen u. Nachrichten.

Heft 2. — H. Schubert : Anzahl-Beziehungen bei Inzidenz u. Koinzidenz mehrdimensionaler linealer Räume. — E. Jahnke : Ueber eine elem. Theorie der Thetafunktionen von ein u. zwei Argumenten. — E. Müller : Zur Theorie der lin. Systeme von Kurven u. Flächen 2. Grades. — R. v. Sterneck : Ueber ein Anologon zur additiven Zahlentheorie. — R. Mehmke : Bemerkungen zur Geometrographie. — H. Liebmann : Berichtigung. — A. Przeborski : P. Pokrowsky-Mitteil. u. Nachr.

Heft 3 et 4. — Fr. Meyer : Ueber Verallgemeinerungen von Sätzen über die Kugel, etc. — L. Schlesinger : J. Bolyai. — C. Brodmann : Der intern. Katalog der naturw. Literatur. — A. Schönflies : Zur Statistik des math. Studiums.— W. Ahrens : Ueber die Aufgaben u. Einrichtungen eines math. Adressbuches. — Mitt. u. Nach.

Heft 5. — J. Lüroth : Ernst Schröder. — K. Geissler : Die geom. Grundvorstellungen u. Grundsätze u. ihr Zusammenhang. — R. Güntsche : Zu H. Mehmkes « Bemerkungen zur Geometrographie ». — Mitt. u. Nachr.

Journal de mathématiques pures et appliquées, publié par C. Jordan, paraissant trimestriellement. Paris, Gautier-Villars. Série 5, t. VIII, 1902, et t. IX, 1903.

Fasc. II. — P.-J. Suchar : Sur les équations différentielles linéaires de second ordre à coefficients algébriques. — A. Zoukis : Sur l'hexacoryphe complet. — H. Poincaré : Sur les cycles des surfaces algébriques.

Fasc. III. — P. Duhem : Sur la stabilité de l'équilibre relatif. — G. Pirondini : Symétrie tangentielle par rapport à une surface de révolution. — De Séguier : Sur les équations de certains groupes. — H. Laurent : Sur les séries de polynômes.

Fasc. IV. — Ed. Maillet : Sur les fonctions entières et quasi-entières.— M. Auric : Essai sur la théorie des fractions continues. — L. Desaint :

Théorèmes généraux sur les points singuliers des fonctions données par une série de Taylor.

Année 1903. — Fasc. 1. — P. APPELL : Sur quelques fonctions de point dans le mouvement d'un fluide. — MM. BEGHIN et ROUSSEAU : Sur les percussions et les systèmes non holonomes. — P. APPELL : Remarques sur les systèmes non holonomes. — M. BEGHIN : Extension du théorème de Carnot au cas où certaines liaisons dépendent du temps. — E. PICARD : Sur l'impossibilité de certaines séries de groupes de points sur une courbe algébrique. — G. HUMBERT : Les fonctions abeliennes singulières et les formes quadratiques.

Journal für die reine und angewandte Mathematik gegründet 1826, von A.-L. CRELLE; herausgegeben von K. HENSEL. G. Reimer, Berlin. Band, 125. 1902.

Heft 1 2. — L.-W. THOMÉ : Ueber eine Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen in der Variations-Rechnung. — L. SCHLESINGER und T. BRODÉN : Bemerkungen zum Riemannschen Problem. — E. NETTO : Ueber Nährungswerthe und Kettenbrüche. — E. LANDAU : Ueber diezu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunction und die Ausdehnung der Tschebyschefschen Primzahltheorie auf das Problem der Vertheilung der Primideale.

Heft III. — A. KNESER : Die Stabilität des Gleichgewichts hängender schwerer Fäden. — W. STEKLOFF : Sur le développement d'une fonction donnée en séries procédant suivant les polynômes de Tchebicheff et, en particulier. suivant les polynômes de Jacobi.

Heft IV. — H. ABEL : Ein Brief von Niels Henrik Abel an Edmund Jacob Külp. — R. ROTHE : Zur Theorie der Differential-Invarianten. — J.-B. GŒBEL : Die Verteilung der Electrizität auf zwei leitenden Kugeln. — P. MUTTE : Ueber rationale Funktionen bilinearen Formen. — H. JUNG : Arithmetischen Beweis eines Satzes über den Grad der Eliminante zweier ganzen Funktionen zweier Veränderlichen. — G. FRISCHAUF : Ueber das Integral der Differentialgleichung $xy'' + y' + xy = 0$. — F.-G. TEIXEIRA : Sur le développement des fonctions doublement périodiques de seconde espèce en série trigonométrique.

Le Matematiche pure ed applicate. Publication dirigée par Cr. ALASIA. Castello, S. Lapi. T. II, 1902.

Septembre-octobre. — F. SEVERI : Risoluzione descrittiva di alcuni problemi spaziali biquadratici. — A. CALEGARI : I determinanti di specie superiore. — C. BURALI-FORTI : Sulle linee funicolari. — G. TZITZÉICA : Sulle superficie minime ortogonali ad una sfera. — L. LO MONACO-APRILE : Sopra una trasformazione cremoniana del terz ordine speciale. — V. RETALI : Sopra una trasformazione cremoniana del terz' ordine speciale. — E. LEBON : Sulla identità di due metodi elementari pel calcolo di π. — ALFA : Dimostrazione di una relazione di condizione negli integrali iperellittici. — Questions, solutions, bibliographie.

Novembre-décembre. — A. CALEGARI : I determinanti di specie superiore. — V. RETALI ; Sopra una trasformazione cremoniana del terz'ordine. — G. PIRONDINI : Proprieta caratteristiche di alcune linee piane a doppia curvatura. —

V. Strazzeri : Sul moto di una sfera che si appoggia a due rette che l'incontrano. — N. Nielsen : Note sur la fonction gamma. — Notes et sujets divers.

Janvier. — G. Pirondini : Proprieta caratteristiche di alcune linee piane a doppia curvatura. — D. Gambioli : Nota su alcuni teoremi sulle frazioni continue e sulle loro applicazioni. — J. de Vries : Quintiche isodinamiche. — Questions diverses. — Problèmes résolus et à résoudre.

Revue Scientifique, dirigée par J. Héricourt. Publication hebdomadaire. Paris, 19, rue des Saint-Pères, 4e série, t. 19.

28 février. — C.-A. Laisant : Éducation scientifique et psychologie.

7 mars. — Ad. Gadot : Ce qu'aurait pu être le mètre.

14 mars. — S. Newcomb : L'univers comme organisme.

18 avril. — B. Portier : Carré magique et cabalistique.

23 mai. — B. Portier : Carré magique à grille.

Revue générale des Sciences pures et appliquées, dirigée par Louis Olivier. Publication paraissant le 15 et le 30 de chaque mois. Paris, Armand Collin, 1903.

30 janvier. — P. Duhem : L'évolution de la Mécanique : Les diverses sortes d'explications mécaniques.

15 février. — P. Duhem : La mécanique analytique.

28 février. — P. Duhem : Les théories mécaniques de la Chaleur et de l'Electricité.

15 mars. — P. Duhem : Le retour à l'atomisme et au cartésianisme.

30 mars. — P. Duhem : Les fondements de la Thermodynamique.

15 avril. — P. Duhem : La Statique générale et la Dynamique générale.

30 avril. — P. Duhem : Les Branches aberrantes de la Thermodynamique.

30 mai. — M. W. Fœrster : La Précession des équinoxes, d'Hipparque à Ptolémée et à Képler.

Revista de Ciencias; rédacteur en chef, F. Villareal : publication mensuelle gr. in-8°. Lima, Impr. de l'École des ingénieurs, 5e année, 1902.

Les mathématiques tiennent une place notable dans cette revue. Voir particulièrement cette année : F. Villareal : Cosmografia. Senos de orden superior. — Cuadrante solar horizontal. — Flexion de las vigas. — Movimiento perpetuo. — Rotacion de la Tierra.

Revue semestrielle des Publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la Société mathématique d'Amsterdam, par P.-H. Schoute, D.-J. Korteweg, J.-C. Kluyver, W. Kapteyn, P. Zeeman ; t. XI, 1re partie ; 1902, avril-octobre ; Delsman et Nolthenius, Amsterdam, 1903.

En même temps que ce fascicule la Revue semestrielle publie la *Table des matières* contenues dans les cinq volumes 1898-1902 suivie d'une table générale par noms d'auteurs.

Zeitschr. für das Realschulwesen, herausgegeben und redigirt von Em. Czuber, Ad. Bechtel und Mor. Glöser, XXVIII, Jahrg., 1903 ; Alf. Hölder, Wien.

N° 1. — K. Reissenberger. Der höhere Lehrerstand und seine Stellung in der gelehrten Welt.

N° 2. — K. Iwrdy : Ein Beitrag zum krystallogr. Unterrichte in der VII. Klasse der österr. Realschulen.

N° 3. — (Ne contient pas de mathém.).

N° 4. — J. Obenrauch : Platons erste ebene Kurve dritter Ordnung.

N° 5. — Vl. Misar : Versuch einer Zusammenstellung der von Schülern in der Mathematik am häufigsten begangenen Fehler.

N° 6. — (Ne contient pas de math.).

Zeitschrift für Mathematik und Physik, begründet durch O. Schlömilch, gegenwärtig herausgegeben von R. Mehmke und C. Runge, 48ter Band ; B.-G. Teubner, Leipzig, 1903.

Heft 1. — R. Gans : Ueber Induktionen in rotierenden Leitern. — Radakovic : Ueber die Bewegung eines Motors unter Berücksichtigung der Elastizität seines Fundaments. — L. Matthiessen : Ueber Linsen u. Linsensysteme. — A. Grünwald : Robert Balls lineare Schraubengebiete. — F. Jung : Zur geom. Behandlung des Massenausgleiches bei vierkurbeligen Schiffsmaschinen. — H. Heimann : Die Festigkeit ebener Platten bei konstanter Belastung.

Heft 2. — A. Francke : Zeichnerische Ermittelung der Kräfte im Kreisbogenträger mit u. ohne kämpfergelenke. — A. Francke : Der Spitzbogenträger mit Scheitelgelenk. — R. Müller : Zur theorie der gestreckten Koppelkurve. — R. Müller : Zur Lehre von der Momentanbewegung eines starren ebenen Systemes. — R. Müller : Zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks. — J. v. Vieth : Ueber Zentralbewegung. — L. Kann : Zur mech. Auflösung von Gleichungen. — A. Föppl : Lösung des Kreiselproblems mit Hilfe der Vektoren-Rechnung. — P. Roth : Die Festigkeitstheorien u. die von ihnen abhängigen Formeln des Maschinenbaues.

Heft 3 et 4. — H. Grassmann : Die Drehung eines kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt. — A. Franke : Kontinürliche Parabelträger. — R. Gans : Ueber die num. Auflösung v. part. Differentialgleichungen. — J. Horn : Zur Theorie der kl. Schwingungen. — C. Runge : Zerlegung u. Zusammensetzung von Drehungen auf graphischen Wege. — C. Runge : Zerlegung empirisch periodischer Funktionen in Sinuswellen. — O. Dietrichkeit : Höher-stellige Logarithmen-Tafeln. — Th. Schmidt : Ueber ein kinematisches Modell. — F. Meisel : Zur theorie des Foucaultschen Pendelversuches. — H. Heimann : Beispiel zum Satze von Minimum der Reibungsarbeit. — A. Klingatsch : Die Bestimmung des künstigen Punktes für das Rückwärts-Einschneiden. — Fr. Schilling : Ueber den Pohlkeschen Satz.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht begründet 1869 von G.-C.-V. Hoffmann, herausgegeben von Dr H. Schotten, 34ter, Jahrgang, 1903. B.-G. Teubner, Leipzig et Berlin.

Heft 2. — H. Wieleitner : Ueber die math.-phys. Lehraufgabe u. die Ausbildung der Fachlehrer im Königreich Bayern. — E. Grimseal : Die einfachen. Maschinen, insb. der Hebel im Physikunterricht. — Kl. Mitteilungen.

Heft 3 et 4. — Hertter : Die Kegelschnitte. — J. Jung : Zur Behandlung der Versicherungslehre im Unterricht. — E. Eckhardt : Neue Ableitung u. geom. Darstellung vom Kreisumfang u.-inhalt. — Kl. Mitt.

A.-H. Bucherer. — **Elemente der Vektor-Analysis,** mit Beispielen aus der theoretischen Physik. — Un vol. cart., in-8°, 91 p. ; prix : Mk 2,40 ; B.-G. Teubner, Leipzig, 1903.

Mart. Girndt. — **Raumlehre** für Baugewerkschulen und verwandte Gewerbliche Lehranstalten. I. *Lehre von den ebenen Figuren.* — Un vol. cart. gr. in-8°, 96 p., 2e édition ; prix : Mk 2,40 ; B.-G. Teubner, 1903.

Alf. Gutknecht. — **Integrallogarithmus.** — Thèse de doctorat présentée à l'Université de Berne, une broch. in-8°, 50 p., K.-J. Wyss, Berne, 1903.

C.-H. Muller u. Presler. — **Leitfaden der Projektions-Lehre.** Ein Uebungsbuch der konstruirenden Stereometrie. — Un vol. in-8°, cartonné (Ausgabe A., Mk 4. — ; Ausg. B., Mk 2) ; B.-G. Teulner, Leipzig, 1903.

Maur. d'Ocagne. — **Exposé synthétique des principes fondamentaux de la Nomographie.** — Un fasc. gr.-in-4°. 63 p. avec 31 figures ; prix : 3 fr. 50 : Gauthier-Villars, Paris, 1903.

P. Schlee. — **Schülerübungen in der elementaren Astronomie** (Heft 2 der *Sammlung naturwissenschaftlich-pädagogischer Abhandlungen*). — Une broch. gr. in-8°, 15 p. ; prix : Mk. 0,50 ; B.-G. Teubner, Leipzig, 1903.

W. Voigt. — **Thermodynamik.** Band I. *Einl.* : Thermometrie, Kalorimetrie, Warmeleitung. *Erster Teil* : Thermisch-mechanische Umsetzungen (Sammlung Schubert t. XXXIX). — Un vol. cartonné in-8°, XV-360 p. : prix : Mk. 10 ; G.-I. Gœschen, Leipzig, 1903.

Ern. Wölffing. — **Mathematischer Bücherschatz,** systematisches Verzeichnis der wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher und Monographien des 19. Jahrhunderts auf dem Gebiete der mat. Wissenschaften. I. *Teil* : **Reine Mathematik,** mit einer Einleitung : Kritische Uebersicht über die bibliogr. Hilfsmittel der Mathematik. — Un vol. relié, gr. in-8°, XXXVI-416 p. ; prix : Mk. 14 ; B.-G. Teubner, Leipzig, 1903.

Le Gérant : C. NAUD.

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY

A PROPOS D'UN RÉCENT EXPOSÉ DES PRINCIPES

DE LA GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE

1. — La Géométrie non-euclidienne, descendue des régions hyperboréennes où elle semblait confinée, commence, depuis quelques années, à entrer dans le domaine des connaissances communes. Tous ceux qui s'occupent actuellement de Mathématiques et de Philosophie savent que, pendant longtemps, on a discuté au sujet du principe des parallèles et qu'aujourd'hui, à côté de la géométrie classique, on considère d'autres géométries logiquement compatibles.

A la diffusion de ces idées parmi les jeunes savants ont contribué les cours que quelques-uns des plus éminents géomètres ont fait dans les Universités italiennes et allemandes et surtout les exposés systématiques des *recherches sur les fondements de la Géométrie*, qui ont paru depuis quelques années.

Ces exposés ont non seulement élargi le domaine de la Géométrie non-euclidienne, mais ils ont encore contraint les esprits bien organisés à suivre les édifices variés et admirables qui ont été inspirés par la renaissance scientifique, caractéristique du XIX^e siècle, et à se rendre compte des connexions qui existent entre les branches les plus élevées des Mathématiques et d'intéressants problèmes de Psycho-physiologie [1].

C'est pourquoi un exposé rapide, simple, élémentaire des principes de la Géométrie non-euclidienne sera toujours bien accueilli.

---

[1] La connexion entre les Mathématiques, la Philosophie et les sciences expérimentales est amplement traitée et discutée d'une façon tout à fait nouvelle et personnelle dans le récent volume de H. Poincaré : *La Science et l'Hypothèse* (Ed. Flammarion). Dans ce volume sont réunis et coordonnés dans un but unique, les divers articles que l'illustre savant a publiés depuis 1890, dans les revues de Philosophie et de Mathématiques.

Mais prenons garde : en se pressant on risquerait d'être obscur pour les commençants et la trop grande simplicité peut se confondre avec l'inexactitude ! La tâche de celui qui se propose d'écrire un petit traité sur les fondements de la Géométrie n'est pas aisée, s'il veut tenir compte des exigences scientifiques et didactiques, qui semblent souvent inconciliables !

2. — Le livre récent de M. Barbarin : *La Géométrie non-euclidienne* (1) ne répond que partiellement au but auquel il semble destiné. L'exposé, réduit souvent au seul énoncé des théorèmes, est peut-être trop rapide (2) ; les notices historiques, qui en de tels sujets sont d'une importance capitale, présentent de notables lacunes ; les observations critiques sur les définitions et sur les postulats d'Euclide ne sont pas très nettes et précises.

Dans l'exposé schématique des *principes*, l'auteur indique les deux méthodes qu'on peut suivre pour le développement élémentaire du sujet dont il s'occupe, et montre ensuite comment ces méthodes concordent dans les résultats.

Suivant la première, l'auteur limite ses considérations à une *région normale* de plan, région dans laquelle *deux points déterminent sans exception une droite*, il discute les trois cas que présente le quadrilatère birectangle et isocèle de Saccheri, et il en déduit les théorèmes sur la somme des angles d'un triangle.

Passant ensuite de la région normale au plan complet, il détermine trois systèmes géométriques, caractérisés par les propriétés suivantes :

Système euclidien. — a) *Par un point passe une seule parallèle*, etc. ; b) *Deux droites ne peuvent enclore une portion de plan.*

Système de Lobatscheffskij. — a) *Par un point passent deux parallèles*, etc.; b) *Deux droites ne peuvent enclore une portion de plan.*

---

(1) Paris, C. Naud, 1902, 79 pages.

(2) Il est juste de faire remarquer que ce livre faisant partie de la *Collection Scientia*, M. Barbarin s'est vu forcé de faire de nombreuses coupures afin de ne pas dépasser les 80 pages mises à sa disposition. La Rédaction.

Système riemannien. — a) *Il n'existe pas de parallèles;* b) *Deux droites renferment toujours une portion de plan.*

En suivant la méthode d'Euclide et de Lobatscheffskij, et l'hypothèse que dans le plan entier est valable le principe de la détermination unique de la droite passant par deux points, l'auteur déduit les théorèmes de Legendre sur la somme des angles des triangles (¹) et par conséquent les deux premiers systèmes rappelés ci-dessus.

De l'hypothèse que deux droites aient plus d'un point commun, il déduit que la somme en question surpasse deux angles droits, et en conséquence il obtient le système de Riemann.

Ces conclusions et d'autres analogues, qui souvent se rencontrent dans les écrits relatifs à la Géométrie non-euclidienne, ne nous semblent pas pleinement justifiables : ils représentent plutôt le fruit d'une étude insuffisamment profonde des principes de la Géométrie, ou, peut-être encore, une tentative, non conforme à la nature du sujet, d'éviter certaines difficultés qu'il vaudrait mieux montrer dès le principe. Il nous semble donc opportun de mettre en relief tout ce qu'elles contiennent de non rigoureux.

3. — Limitons-nous ici à la Géométrie élémentaire du plan.

Deux voies se présentent, ainsi que l'indique M. Barbarin. La plus simple, celle d'Euclide, Lobatscheffskij, Bolyai, part d'un système de postulats valable dans le plan complet, et par elle on démontre un premier groupe de propositions; ensuite on retrouve les diverses branches qui donnent naissance aux divers systèmes géométriques. Alors, si l'on admet que le postulat relatif à la détermination de la droite ne souffre aucune exception, on se trouve en présence non seulement des deux types de Géométrie, euclidienne et de Lobatscheffskij, comme le supposent M. Barbarin (Cfr. l'ouvrage en question, p. 25) et d'autres auteurs, mais encore d'un troisième type qui a été mis en lumière par M. Klein dès 1872 et appelée par lui *Géométrie elliptique* (²).

(¹) Ces théorèmes, sous une forme un peu différente, appartiennent à Saccheri; on pourrait les appeler *théorèmes de Saccheri*.

(²) La Géométrie elliptique fut découverte par Cayley en 1859. Elle apparut alors avec la Géométrie *hyperbolique*, comme une généralisation projective de la métrique ordinaire. M. Klein mit en évidence le lien qui existe entre les *metriques projectives* de Cayley et la Géométrie de Lobatschefskij et Bolyai.

En Géométrie elliptique, la droite est une ligne fermée et la somme des angles d'un triangle est supérieure à deux droits. Il s'ensuit que le premier théorème de Legendre sur la somme des angles d'un triangle ne se déduit pas seulement du postulat : *deux droites ne peuvent enclore un espace,* comme l'affirme M. Barbarin, mais de ce postulat combiné avec ceux qui font de la droite une *ligne ouverte.*

On doit rechercher la raison pour laquelle la Géométrie elliptique paraît être négligée ou inconnue dans la difficulté que le plan elliptique présente à la représentation intuitive.

Celui-ci, contrairement à ce qui arrive pour le plan euclidien et pour les deux autres non-euclidiens, n'est pas brisé par ses droites en deux feuillets et l'on ne peut y distinguer deux faces. Le plan elliptique ne possède donc pas les caractères des surfaces *simplement connexes* et *bilatères*, que l'intuition sépare difficilement de la représentation concrète du plan.

Une forme géométrique qui réalise la connexion et les propriétés graphiques du plan elliptique, c'est l'*étoile de droites* de la Géométrie projective, tandis que l'*étoile de rayons* (1) de la Géométrie élémentaire répond aux caractères du plan de Riemann. La considération des deux étoiles, l'une à côté de l'autre, éclaircit assez bien le lien qui existe entre le plan elliptique et celui de Riemann (2).

Nous pouvons nous imaginer pour cela deux étoiles, l'une de droites, l'autre de rayons, ayant le même centre. Il est clair qu'à toute droite de la première correspondent deux rayons de la seconde, que toute figure appartenant à la première est formée de deux figures symétriques de la seconde et que, sous certaines restrictions, les propriétés métriques des deux formes sont les

(1) Nous appelons rayon la demi-droite.

(2) Nous avons conservé ici le nom *plan de Riemann* au plan dont parle M. Barbarin. Mais ce nom peut convenir également au plan elliptique. Riemann, dans son mémoire, fait de la géométrie infinitésimale, ou mieux de la géométrie dans un domaine limité. Il parle, en passant, de l'espace complet dans sa nouvelle géométrie, mais nous ne savons pas comment il a conçu cet espace par rapport à sa connexion. Il vaudrait mieux appeler *géometries riemanniennes* les deux géométries compatibles avec l'hypothèse de l'angle obtus et les distinguer l'une de l'autre par les adjectifs *elliptique* et *doublement elliptique*. La Géométrie que M. Barbarin et d'autres appellent Géométrie de Riemann, serait dite *Geometrie doublement elliptique*. (Cfr. Klein. *Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie*. 1893.)

mêmes. De telle sorte que, si l'on s'accorde à regarder deux rayons opposés de l'étoile de rayons comme formant un seul élément, elle s'identifie avec l'étoile elliptique.

Les mêmes considérations étant valables pour les deux plans elliptiques et de Riemann, cela nous montre que le premier d'entre eux, à côté de l'autre, doit être conçu comme *plan double*. La *courbe de rebroussement* du plan double sera reconnue facilement pour une conique imaginaire.

4. — L'autre voie qui permet de résoudre le problème des fondements est la voie de Riemann, qui limite l'étude des propriétés géométriques de l'espace à la région finie, accessible aux vérifications expérimentales.

A une telle méthode se rattache le principe de la région normale, employé par M. Barbarin dans son exposé.

Dans la région normale sont valables, sans exception les postulats ordinaires de détermination, d'ordre, de congruence ou de mouvement, et, en général, toutes les propositions indépendantes du principe des parallèles, qu'on peut démontrer dans une portion limitée et simplement connexe de plan euclidien.

Après la discussion des trois cas auxquels donne lieu le quadrilatère de Saccheri et après avoir complété l'étude des propriétés les plus notables de la région normale dans les trois hypothèses de l'angle droit, de l'angle aigu, de l'angle obtus, se présente naturellement le passage de la région normale à la forme complète à laquelle elle appartient.

Guidé par l'intuition, on est conduit à admettre que, autour de chaque point de la forme, il est possible de circonscrire une région normale, où sont valables les propriétés de la région primitive. *Cela s'appelle affirmer l'homogénéité de la forme.*

Alors, dans le cas où le quadrilatère de Saccheri aurait ses deux derniers angles droits, *le problème est ramené à la recherche de toutes les formes possibles à deux dimensions, dont les régions normales jouissent de toutes les propriétés appartenant à une région limitée de plan euclidien.*

Le plan d'Euclide fournit une solution, mais non la seule. Le cylindre ordinaire et une certaine quadrique réglée de

l'espace elliptique [1] répondent aux mêmes conditions requises.

Le même problème, dans le cas où serait valable dans la région normale l'hypothèse de l'angle obtus, admet une solution plus simple, parce que, comme l'a démontré Killing [2], il n'y a que le plan elliptique et le plan de Riemann qui soient compatibles avec le principe de la région normale.

Finalement, dans le troisième cas, où l'on admet l'hypothèse de l'angle aigu, les choses se compliquent.

En plus du plan de Lobatscheffskij, diverses catégories de formes se présentent, répondant toutes aux deux principes rappelés ci-dessus : leur détermination se relie à l'une des plus brillantes théories modernes : *la théorie des fonctions automorphes* [3].

Ces quelques considérations sur les nouvelles formes spatiales, connues sous le nom de *formes de Clifford-Klein*, montrent clairement la non-équivalence des deux méthodes ébauchées ici pour la construction de la Géométrie plane.

Si l'on veut écarter les formes de Clifford-Klein, il est nécessaire d'introduire un nouveau postulat, que l'on découvre facilement en comparant entre eux le plan euclidien et le cylindre. En effet, sur le plan euclidien, le principe de détermination de la droite, postulé pour la région normale, s'étend à toute la forme sans exception ; sur le cylindre, au contraire, deux points d'une même génératrice appartiennent à autant de droites (géodésiques) que l'on veut.

En postulant donc, en plus des lois de la région normale et d'homogénéité, que le principe de la détermination de la droite, d'abord attribué à la région normale, est valable sur la forme

---

[1] La quadrique en question fut découverte par Clifford (Cfr. *Preliminary Sketch on Biquaternions*; *Lond. M. S. Proc.*, IV, p. 381-395). On peut l'engendrer, dans l'espace elliptique, par la rotation d'une droite autour d'un axe gauche, ou encore par la rotation d'un cercle autour de la polaire du centre. Par rapport à la mobilité sur elle-même, elle se présente avec les caractères du cylindre de révolution, et par rapport à la connexion, avec ceux de la surface annulaire du tore.

[2] Cfr. Killing. *Ueber zwei Raumformen mit constanter positiver Krümmung*. Crelle, LXXXVI, p. 72-83. — Ueber die *Clifford-Klein'schen Raumformen*, Math. ann. XXXIX.

[3] Le lecteur qui désire quelques renseignements plus amples sur cette question, peut lire les ouvrages suivants : Klein. *Zur Nicht-Euklidische Geometrie* ; Math. Ann., XXXVII, p. 544-572. — Killing. *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*. Bd. I.

complète, *on exclura les formes de Clifford-Klein et, en outre, le plan de Riemann.*

Les seules formes compatibles avec le nouveau postulat sont donc :

a) Le plan euclidien ou parabolique ;

b) Le plan de Lobatscheffskij-Bolyai ou hyperbolique ;

c) Le plan de Cayley ou elliptique.

Et le plan de Riemann ?... Pour celui-ci, l'existence des points opposés, par lesquels passent des droites en nombre infini, contribue à rendre la forme peu apte à représenter le concept intuitif du plan ; néanmoins, la possibilité de glisser comme les autres sur lui-même par un groupe de ∞^3 transformations congruentes, conduit à le considérer en même temps que les précédents.

Le système de postulats qui conviennent aux quatre géométries en question peut être résumé ainsi :

a) *Principe de la région normale.* — Il existe une région limitée, simplement connexe, dans laquelle sont valables les postulats de détermination, d'ordre, de congruence, etc.

b) *Principe d'homogénéité.* — Autour de chaque point il est possible de délimiter une région normale.

c) *Principe du déplacement généralisé.* — A tout déplacement de la région normale est coordonné un déplacement de la forme complète, qui transforme toute figure en une autre congruente (1).

Il est manifeste que les quatre géométries en question vérifient le système de postulats *a*), *b*), *c*) ; la réciproque, à savoir qu'il n'existe pas d'autres géométries compatibles avec lesdits postulats, a été démontrée par Killing (Cfr. ouvrages cités).

5. — Revenant au livre de M. Barbarin, il est clair qu'en se proposant de ne pas préjuger l'existence possible de couples de points ne déterminant pas la droite et d'utiliser le concept de région normale, l'auteur devait mieux coordonner et mettre en relief les divers postulats, réunis par nous dans les principes *a*) *b*), *c*).

(1) Le principe *c*) pourrait être remplacé par un postulat qui semble plus général : *Toutes les droites sont congruentes.* Interprété physiquement, ce dernier exprime *l'isotropie de l'espace.*

Le principe de la région normale réunit l'ensemble des propositions élémentaires susceptibles d'une vérification expérimentale, les deux autres, au contraire, n'expriment pas de résultats que l'expérience puisse confirmer : ils expriment plutôt une extension que l'intellect donne aux résultats des expériences effectuées dans la région normale.

Nous ajouterons que la solution proposée à la fin du numéro précédent s'adapte bien à l'empirisme que professe l'auteur lorsqu'il parle de la forme géométrique de l'univers (Cfr., ch. VIII).

L'expérience seule, dit-il, devra indiquer la forme réelle de notre espace : les inexactitudes auxquelles sont sujettes toutes les vérifications empiriques ne permettent pourtant pas une réponse absolue. L'espace par suite pourra être euclidien ou non, pourvu que, dans ce dernier cas, le paramètre (inverse de la courbure de Riemann) soit très grand.

Le choix du concept euclidien pour représenter l'espace physique, ne s'imposerait donc qu'en vertu du *criterium d'économie*.

Ici se présente spontanément la question psychologique d'expliquer le *sentiment de nécessité* qui accompagne la formation des concepts géométriques, sentiment qui se justifie mal dans un ordre d'idées purement empirique, où les connaissances dues à l'expérience semblent susceptibles de modes divers de détermination.

Comment se fait-il donc que, tandis que plusieurs géométries physiques nous apparaissent logiquement possibles et compatibles, notre intuition demeure enfermée dans une forme fixe euclidienne ?...

La question a été résolue par KANT, qui considère l'intuition spatiale comme étant imposée *à priori* à la structure mentale de tout sujet, et qui dénie toute réalité à l'espace. Mais cette dernière affirmation est repoussée par l'empirisme, lequel, partant de la réalité objective de l'espace, essaie de reconstruire l'intuition au moyen des sensations !...

Pour diminuer le conflit existant entre la doctrine kantienne et la doctrine empirique, le professeur E. Enriques, de l'Université de Bologne, a proposé une solution qui repose sur ce concept fondamental : *Les concepts* (point, ligne, surface, etc...) *d'où part la Géométrie naissent par association de différents groupes de*

sensations. Ces associations, effectuées suivant la structure logique de la pensée, supposent comme conditions logiques les postulats (1).

Bien que de telles conditions, prises objectivement, ne puissent être valables qu'avec une certaine approximation, subjectivement, l'existence des concepts en question, comme objet de la pensée exacte, nécessite la validité rigoureuse des postulats.

Février 1903.

ROBERTO BONOLA (Pavie).

(Traduit de l'italien par M. Combebiac.)

---

(1) Cfr. ENRIQUES. *Sulla spiegazione psicologica dei postulati della Geometria*. Rivista Filosofica, 1901.

THÉORIE DES PARALLÈLES EUCLIDIENNES

Pour éviter des répétitions il sera entendu dans ce qui va suivre que nous raisonnons sur un même plan.

Si une droite CD (fig. 1) s'éloigne d'une droite AB — c'est-à-dire si les perpendiculaires MP, M_1P_1... abaissées des points de CD sur AB vont en croissant — elle continuera à s'en éloigner dans le même sens, et à s'en rapprocher dans le sens contraire, tant qu'elle n'atteindra pas AB. Rencontrera-t-elle AB dans le sens où elle s'en rapproche ? Ce n'est pas évident *a priori*, car quand on se pose cette question, le cas des asymptotes se présente aussitôt à l'esprit. Nous y répondrons plus loin, n'ayant pas besoin d'élucider ce point pour établir la théorie qui fait l'objet de ce travail, et c'est précisément en cela qu'elle est intéressante.

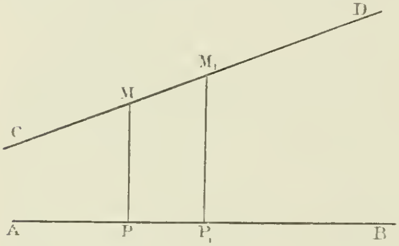


Fig. 1.

Nous retenons seulement le fait de la constance de l'éloignement ou du rapprochement qui, d'après le concept que nous avons de la ligne droite, ne peut pas ne pas s'imposer à l'esprit. Il est d'ailleurs susceptible de pouvoir être vérifié par une expérimentation directe.

Nous pouvons donc en faire un axiome ou postulat au même titre que les autres axiomes ou postulats de la ligne droite dont on ne saurait sérieusement contester qu'il n'aient leur origine dans l'observation ou l'expérience.

Cette origine nous échappe par suite de l'habitude, les propriétés de la ligne droite ayant été épurées depuis longtemps, et

étant devenues des données d'intuition. Mais une analyse un peu profonde ne permet pas de la méconnaître.

Or en n'admettant que les propriétés de la ligne droite considérée en elle-même, on ne définit pas complètement cette ligne. Il faut y ajouter une propriété du même ordre concernant sa manière d'être par rapport à une autre droite, propriété qui ne peut se déduire des premières, comme c'est établi aujourd'hui, que nous savons certaine dans le monde extérieur accessible à nos observations et sans laquelle le développement logique de la géométrie ordinaire est impossible. Seulement on doit chercher une façon de présenter cette propriété qui entraîne immédiatement notre adhésion, et ce n'est le cas, ni de la forme donnée par Euclide dans son postulat V, ni de celle qui lui a été substituée.

La forme suivante répond à ce but.

Axiome. — *Si deux droites se rapprochent dans un sens, elles s'éloignent constamment dans le sens contraire*, et inversement (tant qu'elles ne se coupent pas).

Ainsi énoncé, cet axiome s'impose immédiatement à nous comme vrai. Nous ne pouvons concevoir, en effet, sans faire violence à notre esprit, que deux droites se rapprochent après s'être éloignées, ni qu'elles s'éloignent après s'être rapprochées.

Définition. — Une droite est dite *parallèle* à une autre quand tous ses points sont à la même distance de cette autre.

Théorème I. — *Deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles l'une à l'autre.*

Soient deux droites AB, CD perpendiculaires à une troisième EF (fig. 2). En faisant tourner le demi-plan (R) autour de EF pour l'appliquer sur le demi-plan (S), HB viendra sur HA et KD sur KC. Si donc les droites AB, CD se rapprochaient ou s'éloignaient dans la région (R), elles se rapprocheraient ou s'éloigneraient dans la région (S), ce qui est contraire à l'axiome posé plus haut. Les perpendiculaires abaissées par exemple de CD sur AB sont égales. Mais on peut remarquer que ces perpendiculaires sont aussi perpendiculaires à CD. Soit en effet une perpendiculaire MP abaissée d'un point quelconque M de CD sur AB, on a

MP = KH. Joignons MH et PK. Les deux triangles PHK, HMP sont égaux comme ayant un angle droit égal compris entre côtés égaux, d'où PK = MH. Par suite les deux triangles HKM, PMK

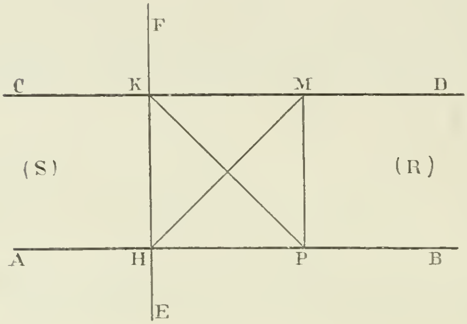


Fig. 2.

ont leurs trois côtés égaux et sont égaux. On en déduit $\widehat{HKM} = \widehat{PMK}$. Le premier étant droit, il en est de même du second. Les distances de chacune des deux droites AB, CD à l'autre sont donc les mêmes.

Ainsi se trouve nettement établie l'existence de deux droites parallèles.

Théorème II. — *Par un point pris à l'extérieur d'une droite, on peut mener une parallèle à cette droite, et on ne peut en mener qu'une.*

Soient la droite AB et le point C (fig. 3). Menons CD perpendiculaire à AB, et EF perpendiculaire à CD au point C. La droite EF sera parallèle à AB, d'après le théorème I, et c'est la seule.

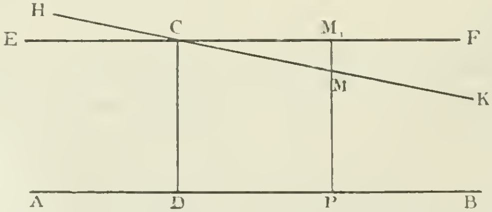


Fig. 3.

Considérons en effet une autre droite HK passant par le point C et faisant avec EF un angle aussi petit qu'on le veut. Une partie de cette droite fera avec CD un angle aigu, soit CK cette partie. Abaissons d'un point M de CK la perpendiculaire MP sur AB, et désignons par M_1 le point où MP prolongé rencontre EF. On a $MP < M_1P$, et comme $M_1P = CD$, il s'ensuit $MP < CD$. Donc HK n'est pas parallèle à AB.

Corollaire. — *Quand deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.*

Théorème III. — *Deux droites AB, CD parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.*

On démontrera facilement que AB et CD sont perpendiculaires à une même droite.

Les autres théorèmes dérivant des parallèles : égalité des angles alternes-internes, somme des angles d'un triangle, etc., se démontreront comme d'habitude ; mais on pourra les démontrer de la manière suivante.

Soient deux parallèles AB et CD et la sécante EF (fig. 4). Menons KR perpendiculaire sur AB et HP perpendiculaire à CD.

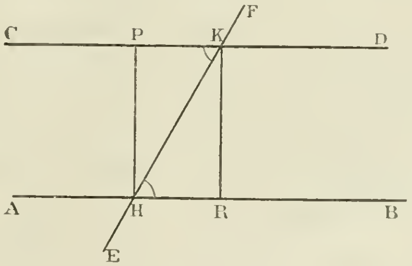


Fig. 4.

Les deux triangles rectangles HKP, HRK sont égaux, car $HP = KR$. Donc $\widehat{KHR} = \widehat{HKP}$.

En remarquant que la figure HRKP a quatre angles droits et que la somme des angles du triangle HPK égale la somme des angles du triangle HRK, on voit que la somme des angles d'un triangle rectangle égale deux angles droits.

Pour démontrer qu'il en est de même de la somme des angles d'un triangle quelconque, il suffira de mener une hauteur qui soit située à l'intérieur du triangle, ce qui est toujours possible.

Nous ajouterons pour compléter cette théorie que *deux droites parallèles ne se rencontrent pas*, ce qui découle de définition même, et que *deux droites qui ne sont pas parallèles se rencontrent.*

On pourra trouver diverses démonstrations de cette dernière proposition.

En voici une :

Soit la droite CD non parallèle à AB. Menons d'un point M de CD la perpendiculaire MP à AB, et la parallèle EF à AB passant par M.

La droite CD forme avec MP deux angles inégaux dont l'un aigu et l'autre obtus (fig. 5). Supposons que $\widehat{PMD}$ soit l'angle

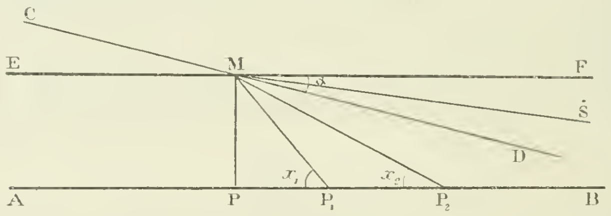


Fig. 5.

aigu. Prenons sur AB, à partir de P dans le sens AB, $PP_1 = MP$, $P_1P_2 = MP_1$... et désignons par x_1, x_2... x_n les angles $\widehat{PP_1M}$, $\widehat{P_1P_2M}$... égaux respectivement aux angles $\widehat{P_1MF}$, $\widehat{P_2MF}$... comme alternes-internes.

On a

$$x_1 = \frac{1^{dr}}{2}, x_2 = \frac{x_1}{2} = \frac{1^{dr}}{2^2}, x_3 = \frac{1^{dr}}{2^3} \dots x_n = \frac{1^{dr}}{2^n}.$$

Il sera donc possible, en appelant α l'angle $\widehat{DMF}$, de trouver un angle x_n, tel que l'on ait $x_n < \alpha$.

La sécante correspondante MS fera avec MF un angle plus

petit que α, et sera dès lors comprise entre MD et MF. Comme elle rencontre AB, MD rencontrera aussi nécessairement AB.

Pour rester logique on devra définir une parallèle à un plan : *une droite qui reste à la même distance du plan.*

De même, un plan sera dit *parallèle* à un autre si tous ses points sont à la même distance de cet autre.

Ces définitions venant à la suite des théorèmes sur les droites et plans perpendiculaires, on démontrera facilement qu'*une droite et un plan*, ou que *deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.*

Cette théorie des parallèles nous paraît beaucoup plus satisfaisante que la théorie classique actuelle.

Elle nous a été suggérée par la lecture de l'excellent livre de M. de Freycinet : *De l'expérience en géométrie.* Nous n'avons fait que la développer et la préciser pour la rendre applicable à l'enseignement.

Il importe de débarrasser les bases de la géométrie ordinaire de la considération de la rencontre ou de la non-rencontre de deux droites en présence du développement des géométries non-euclidiennes qui forment des systèmes cohérents, logiquement coordonnés, où on n'a relevé aucune contradiction, par conséquent très intéressants au point de vue spéculatif, mais dans lesquels, la correspondance entre les formes conçues et les formes réalisées est moins grande que dans le système euclidien, parce qu'ils négligent une donnée fondamentale d'expérience.

La ligne droite, telle que la conçoivent les néo-géomètres n'est plus celle du sens commun.

Commolet (Paris).

LES LIMITES ET L'ATOME

On appelle ordinairement *limite* d'une quantité variable, en Géométrie, une quantité fixe dont la variable peut s'approcher indéfiniment, sans jamais pouvoir l'atteindre. Cette condition imposée à la limite, de ne pouvoir jamais être atteinte par la variable, est formulée en termes trop absolus. Ne sait-on pas que la tangente en un point A d'une courbe est la limite des positions que prend une sécante, issue du point A, lorsqu'elle a tourné autour de ce point, de manière à ce qu'un second point d'intersection de la sécante avec la courbe vienne se confondre avec le premier ? La parallèle menée par un point O à une droite n'est-elle pas la limite des positions que prend la perpendiculaire abaissée du point O sur la droite, lorsqu'on la fait tourner autour de ce point d'un angle droit ? Et dans ces deux cas, du moins, n'est-il pas visible que la variable atteint sa limite, et exactement ?

Il est vrai que, si l'on cherche à atteindre cette limite en appliquant à la variable une construction géométrique, on n'y réussira pas. Si, par exemple, après avoir mené par le point A d'une courbe une première sécante, on détermine la seconde en joignant le point A au milieu de l'arc que sous-tend la première ; si l'on opère de même sur la seconde pour avoir la troisième, et ainsi de suite ; on obtiendra des sécantes qui s'approcheront de plus en plus et même indéfiniment de la tangente ; mais, aucune moitié d'un arc ne pouvant être nulle, jamais la sécante ne deviendra tangente. De même, dans le cas de la parallèle, si l'on joint le point O à des points de la droite de plus en plus éloignés de la perpendiculaire, on obtiendra des obliques faisant avec cette perpendiculaire un angle de plus en plus grand et même indéfiniment voisin de 90 degrés, mais, les points ne pouvant pas être à

l'infini sur la droite, jamais l'oblique ne deviendra ainsi la parallèle.

Ce qui arrive là n'est pas un fait accidentel, mais une règle générale : toute construction géométrique permet d'atteindre l'indéfiniment petit ou l'indéfiniment grand, mais jamais zéro ni l'infini ; par conséquent, toute limite dont la definition renferme implicitement toute l'idée de l'infini ou de zéro, — et c'est ici le cas —, échappe à la possibilité d'être atteinte par une opération géométrique exécutée sur la variable.

Au contraire, si l'on a recours à un mouvement de rotation, la limite est atteinte à la suite des valeurs indéfiniment croissantes de la variable, absolument comme l'une quelconque d'entre elles succède à la précédente.

A quoi cela tient-il ? Les résultats dus à une construction géométrique sont nécessairement discontinus et par suite ne représentent qu'un certain nombre des valeurs possibles de la variable, tandis que le mouvement de rotation, étant continu, nous les donne toutes, sans exception. Il nous donne non seulement les valeurs de la variable qui sont fournies par l'opération graphique ou fictive, mais encore toutes les valeurs intermédiaires dont cette opération ne laisse aucune trace. En outre, quand la rotation a permis d'amener la droite mobile sur la valeur extrême que peut atteindre la construction géométrique, rien n'empèche de continuer le mouvement de la droite qui a été utilisé jusque là et de franchir la limite que la construction est impuissante à dépasser. C'est ainsi que, dans le premier cas considéré, le second point de la sécante mobile vient se confondre avec le premier et la limite zéro se trouve atteinte à la suite de l'indéfiniment petit ; dans le second cas, à la suite d'obliques indéfiniment longues, l'infini se présente nécessairement, au moment où l'angle que font ces obliques avec la perpendiculaire devient droit.

Appliquons cette remarque à d'autres exemples classiques.

La circonférence d'un cercle est la limite du périmètre d'un polygone régulier inscrit au cercle et dont le nombre des côtés augmente indéfiniment.

Supposons qu'on parte du carré inscrit, et, qu'en divisant en deux unités l'arc sous-tendu par son côté, on ait inscrit l'octogone régulier, puis le polygone régulier de 16, 32..... côtés ; on par-

viendra ainsi, au moins mentalement, à un polygone régulier dont les côtés seront indéfiniment petits. Mais il est clair que l'opération, même poussée par la pensée aussi loin qu'on voudra, ne peut pas nous donner un côté de longueur nulle, autrement dit, la construction géométrique ne permet pas d'atteindre la limite zéro. Si, au contraire, on fait tourner autour du centre de la circonférence un des deux rayons qui aboutissent aux extrémités d'un côté du carré, de manière à ce qu'il se rapproche de l'autre supposé fixe, on voit immédiatement que l'extrémité du rayon mobile passera, d'une part, par le milieu de tous les arcs intermédiaires à ceux-là, que l'opération graphique ou fictive n'a pas envisagés. En outre, quand la rotation aura amené le rayon mobile à passer par l'extrémité du plus petit côté que puisse atteindre la construction géométrique, rien ne s'oppose à ce que le mouvement qui a été utilisé jusque-là, soit continué, de manière à réduire ce côté extrême et l'arc qu'il sous-tend à égaler la limite zéro.

L'asymptote à une branche d'hyperbole peut être regardée comme la limite des sécantes menées par le centre et dont le point d'intersection s'éloigne à l'infini. Mais il est clair qu'une détermination géométrique de pareilles sécantes, ne peut donner, comme dans les exemples précédents, que des sécantes indéfiniment grandes, tandis que, en faisant tourner une droite autour du centre de l'hyperbole, on a la certitude d'obtenir successivement toutes les sécantes possibles, et même, au delà de la sécante indéfinie la plus grande que puisse fournir la construction géométrique, l'asymptote qui en est la limite.

Le mouvement de rotation dont nous venons de signaler l'utilité dans le plan, n'est pas moins précieux dans l'espace. Considérons, en effet, un cône droit circulaire; coupons-le par un plan qui passe par deux génératrices opposées ; puis, par un point quelconque pris sur l'une des génératrices, menons une droite qui soit perpendiculaire à leur plan et une autre qui soit parallèle à la génératrice opposée. Le plan que déterminent la parallèle et la perpendiculaire est, comme on le sait, parallèle à la génératrice opposée : la section faite dans le cône par ce plan est donc une *parabole*. Si l'on fait maintenant tourner ce plan autour de la perpendiculaire comme axe et vers le

sommet du cône, la section obtenue devient une *ellipse*, puis un *cercle*, puis encore une ellipse, et enfin une *droite limitée*; si on fait tourner ce même plan en sens contraire, la section obtenue devient une *hyperbole*, puis une *droite illimitée*. Le cercle peut donc être considéré comme la limite d'une ellipse, et la parabole comme la limite soit d'une ellipse, soit d'une hyperbole. Or la limite est ici atteinte effectivement, on le voit, par le mouvement de rotation d'un plan, en raison même de la continuité de ce mouvement, comme toutes les circonstances précédemment signalées.

Mais si l'on cherche, en dehors de tout mouvement et en partant d'une propriété géométrique, à établir que le cercle ou la parabole est une limite de l'ellipse, ou encore que l'hyperbole a pour limite soit une parabole soit une droite illimitée, le résultat est tout différent.

Vous pouvez doubler, tripler quadrupler, etc. la distance des deux foyers d'une ellipse, par exemple en fixant l'un d'eux et le sommet voisin, vous obtiendrez ainsi des ellipses s'allongeant et s'approchant indéfiniment de la forme parabolique, mais jamais le second foyer ne pourra être transporté à l'infini, et, par suite, jamais l'ellipse ne sera transformée en parabole. De même, si vous réduisez la distance focale à sa moitié, son tiers, son quart, elle n'égalera jamais zéro, et, par suite, l'ellipse ne deviendra jamais un cercle. Même chose pour l'hyperbole.

En résumé, ce qui précède nous montre qu'une figure variable susceptible de s'approcher indéfiniment d'une limite, l'atteint régulièrement, si le rapprochement résulte d'un mouvement continu de rotation, qui est toujours possible, et qu'au contraire elle ne l'atteint jamais, si le rapprochement résulte d'une construction géométrique. Nous sommes donc en droit de conclure, ainsi que nous l'avons dit en commençant, que cette condition imposée à une limite, de ne pas pouvoir être atteinte par la variable, est trop absolue, et qu'il sera permis, à un aussi juste titre, de remplacer dans la définition les quatre derniers mots « sans jamais pouvoir l'atteindre », par ceux-ci : « au point de se confondre avec elle », puisqu'une figure variable qui arrive à sa limite ne doit en rien et en aucun cas se distinguer de cette limite.

Comment se fait-il que quelques savants aient cherché à trans-

former en principe général cette prétendue impossibilité pour une variable d'atteindre sa limite, et à l'expliquer, par l'existence, dans la définition de l'une, d'un ou plusieurs éléments incompatibles avec la définition de l'autre? pas assez incompatibles néanmoins pour les empêcher de se rapprocher l'une de l'autre, à ce point que, si l'on prend la limite pour valeur de la variable, l'erreur commise devienne rigoureusement nulle? Comment surtout est-il venu à l'esprit d'un géomètre d'introduire dans la définition d'une limite cette condition parfaitement inutile et démentie par tous les exemples qu'on connaît? il faut, pour en découvrir l'origine, se reporter à la pratique initiale du Calcul différentiel.

Leibniz, l'inventeur de ce calcul, appelait limite d'un rapport le rapport de l'accroissement infiniment petit dy d'une fonction à l'accroissement infiniment petit dx de la variable. D'après cette définition, le rapport $\frac{dy}{dx}$ est égal à la dérivée $f'(x)$ de la fonction, et l'on a l'égalité $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, d'où l'on tire pour la valeur de la différentielle (diminutif de différence) de la fonction : $dy = f'(x)\,dx$. Mais cette formule n'est pas absolument exacte, attendu que la dérivée $f'(x)$ d'une fonction n'est pas égale au rapport $\frac{dy}{dx}$ quand les termes de ce rapport sont très petits, mais bien quand ils sont rigoureusement nuls.

Pour parer à l'inconvénient qui en pourrait résulter, quelques géomètres ont imaginé de conserver dans cette formule les termes dy et dx en les regardant comme de purs symboles de zéro. Grâce à cette convention, la formule redevient exacte et peut être introduite dans le Calcul différentiel. D'autres géomètres ont procédé d'une manière toute différente. Puisque $f'(x)$ est égal à $lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$, on peut poser $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, et, par suite, $\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha\,\Delta x$, α étant une quantité qui s'évanouit en même temps que Δx devient nul. Cette formule nous montre que l'accroissement d'une fonction correspondant à un accroissement quelconque de la variable est composé de deux parties : la seconde tend vers zéro en même temps que Δx ; la première est ce qu'on nommera la différentielle de la fonction et qu'on représentera par dy. Comme d'ailleurs la différentielle de la variable, ou dx, ne se distingue pas de son accroissement Δx, on

pourra écrire la relation suivante $dy = f'(x)\,dx$, dire qu'elle est vraie pour toute valeur finie ou indéfiniment petite de l'accroissement de la variable, et lui appliquer toutes les règles du Calcul différentiel.

Toutefois il y a une valeur pour laquelle cette formule est en défaut ; c'est la valeur limite $dx = 0$, qui est nécessaire pour la définition de la dérivée et de toutes les dérivées, et qu'il est impossible de ne pas introduire finalement dans les formules, quand on voudra passer aux limites. La rigueur de ce procédé resterait donc, en définitive, plus apparente que réelle si ceux qui l'ont imaginé s'en étaient tenus là. Ils ont alors inventé, pour échapper à ce défaut de rigueur, d'imposer à la définition d'une limite cette condition bizarre qu'une variable ne peut jamais atteindre sa limite. Grâce à ce subterfuge, on n'a plus à s'inquiéter de ce qui se passe à la limite dans le Calcul infinitésimal ; les infiniment petits sont toujours décroissants et ne s'évanouissent jamais, quoique pouvant approcher d'aussi près qu'on le veut de zéro.

Nous avons vu, sur de nombreux exemples géométriques, que cette condition est faussement imposée à la limite des grandeurs variables. Elle n'est pas davantage acceptable, lorsqu'il s'agit de la définition d'une dérivée ou d'une différentielle de fonction : on s'en assure, comme nous l'avons fait pour la définition d'une tangente. Ce qui importe, c'est de faire voir comment, avec l'atome, peuvent se résoudre toutes les difficultés ; nous allons brièvement l'indiquer.

D'après la théorie de l'atome, il y a toujours un accroissement ε de la variable indépendante, qui est le plus petit auquel puisse correspondre un accroissement η de la fonction ; le rapport $\frac{\eta}{\varepsilon}$ est, par définition, la dérivée de la fonction, de telle sorte qu'on a l'égalité vraie : $\frac{\eta}{\varepsilon} = f'(x)$. Dans cette relation, les deux termes η et ε ne sont pas des symboles de zéro, ni des quantités indéterminées, mais des atomes correspondants, c'est-à-dire des réalités concrètes et déterminées, qui, en raison de leur état atomique, semblent mieux appropriées que toute autre à l'idée qu'on doit se faire du mode de génération d'une courbe ; dans la génération d'une courbe, ce rapport $\frac{\eta}{\varepsilon}$ représenterait l'atome de direction.

De cette définition on déduit immédiatement les propriétés générales des dérivées, celle des fonctions inverses, celle d'une fonction dont la dérivée est constante, celle des fonctions qui ont la même dérivée, celle du maximum et du minimum d'une fonction ; etc. Si, après cela, on veut bien avoir présente à l'esprit cette vérité que, dans le calcul, ce qui est plus petit que l'atome ε est nul ou de nul effet pour l'accroissement de la fonction, on trouvera sans peine la dernière valeur de ε, qui est $(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$, la dérivée de x^m, de la fonction exponentielle et logarithmique, des fonctions trigonométriques directes et inverses, enfin de toutes celles qu'on est convenu de désigner sous le nom de fonctions simples.

Voici en outre une conséquence très importante de cette définition de la dérivée par les atomes, définition qui est identique au fond à celle de Leibniz : si l'on a formé une équation entre des indéfiniment petits de différents ordres, et qu'on veuille en dégager la relation propre à ceux qui sont de l'ordre le moins élevé, il suffira de supprimer tous les termes où figurent les autres, comme étant nuls ou de nul effet ; en d'autres termes, il est permis, dans un calcul d'indéfiniment petits d'un certain ordre, de négliger à volonté tous les indéfiniment petits d'un ordre supérieur. On voit, d'après cela, quels avantages sont attachés à la substitution de l'atome à la place de zéro dans toutes les questions de limite, comme à la substitution de l'indéfini à la place de l'infini : toutes les contradictions que nous avons signalées, toutes les difficultés qu'on rencontre à se mettre en face de zéro et de l'infini ou à vouloir les éviter, disparaissent avec l'atome et son inverse qui est l'indéfiniment grand.

J.-F. Bonnel (Lyon).

SUR LES DIVISIONS HOMOGRAPHIQUES

Introduction. — Quand on développe la théorie des divisions homographiques au moyen de l'équation algébrique fondamentale

$$xx' - \lambda x - \mu x' + \nu = 0$$

on est amené à considérer deux origines O et O' pour compter les segments x, x'.

En disant que l'équation doit être satisfaite quelles que soient les origines, on admet le fait comme évident *à priori*. Cependant nous croyons bon, dans l'intérêt des débutants de la géométrie synthétique, de donner une forme plus concrète et plus précise à ce principe, en l'énonçant comme un théorème dont la démonstration simple conduit d'une manière palpable aux propriétés connues des coefficients λ, η et ν.

Tel est le but que nous nous proposons dans les lignes qui suivent.

Définition. — On appelle divisions homographiques des suites de points telles qu'à chaque point de l'une correspond un point et un seul de l'autre.

Équation. — Il existe donc entre les segments x et x' déterminés sur deux bases l et l', par deux points homologues et comptés depuis deux origines données, une équation du premier degré de la forme :

$$xx' - \lambda x - \mu x' + \nu = 0.$$

Les coefficients λ, μ, ν sont déterminés par trois paires de points homologues fondamentaux.

Théorème : *Étant donné 3 paires de points homologues fondamentaux, la position des éléments d'une quatrième paire sur les bases est indépendante des origines.*

Démonstration. — Soit O et O' les origines, a, a' ; b, b' et c, c' les 3 paires de points homologues fondamentaux. Désignons les segments comme suit :

$$Oa = t \qquad ab = m \qquad ac = n$$
$$O'a' = t' \qquad a'b' = m' \qquad a'c' = n'.$$

L'équation de définition s'appelle :

$$xx' - \lambda x' - \mu x' + \nu = 0.$$

Calculons d'abord les coefficients λ, μ et ν en formant les 3 équations correspondant aux points donnés ; nous avons :

$$tt' - \lambda t - \mu t' + \nu = 0$$
$$(t + m)(t' + m') - \lambda(t + m) - \mu(t' + m') + \nu = 0.$$
$$(t + n)(t' + n') - \lambda(t + n) - \mu(t' + n') + \nu = 0.$$

Les solutions λ, μ et ν seront

$$\lambda = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad \mu = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad \nu = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Formons ensuite ces déterminants

$$\Delta = \begin{vmatrix} -t & -t' & +1 \\ -(t+m) & -(t'+m') & +1 \\ -(t+n) & -(t'+n') & +1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -tt' & -t' & +1 \\ -(t+m)(t'+m') & -(t'+m') & +1 \\ -(t+n)(t'+n') & -(t'+n') & +1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -t & -tt' & +1 \\ -(t+m) & -(t+m)(t'+m') & +1 \\ -(t+n) & -(t+n)(t'+n') & +1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -t & -t' & -tt' \\ -(t+m) & -(t'+m') & -(t+m)(t'+m') \\ -(t+n) & -(t'+n') & -(t+n)(t'+n') \end{vmatrix}$$

Développons et simplifions :

$$\begin{aligned}
\Delta &= m'n - mn',\\
\Delta_1 &= t'(mn' - m'n) + m'n'(m - n),\\
\Delta_2 &= t(mn' - m'n) + mn(n' - m'),\\
\Delta_3 &= tt'(mn' - m'n) + tm'n'(m - n) + t'mn(n' - m').
\end{aligned}$$

On peut encore écrire évidemment :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\Delta_1 &= \Delta t' + m'n'(m - n),\\
\Delta_2 &= \Delta t + mn(n' - m'),\\
\Delta_3 &= \Delta_1 t + \Delta_2 t' - \Delta tt'.
\end{aligned}\right.$$

Prenons maintenant un 4e point d sur l, donnant

$$x = t + p \text{ avec } p = ad.$$

Son homologue d' sur l' donne

$$x' = t' + p' \text{ avec } p' = a'd'.$$

La valeur x' se déduira de celle de x d'après l'équation fondamentale :

$$xx' - \lambda x - \mu x' + \nu = 0.$$

On aura :

$$x' = \frac{\lambda x - \nu}{n - \mu}.$$

Introduisons les valeurs des déterminants :

$$x' = \frac{\frac{\Delta_1}{\Delta}x - \frac{\Delta_3}{\Delta}}{x - \frac{\Delta_2}{\Delta}} = \frac{\Delta_1 x - \Delta_3}{\Delta x - \Delta_2}.$$

Avec les segments p, t, p' et t', on a :

$$p' + t' = \frac{\Delta_1(t + p) - \Delta_3}{\Delta(t + p) - \Delta_2}.$$

Développons ensuite p'

$$\begin{aligned}
p' &= \frac{\Delta_1(t + p) - \Delta_3}{\Delta(t + p) - \Delta_2} - t'\\
&= \frac{\Delta_1 t + \Delta_1 p - \Delta_3 - t't\Delta - t'p\Delta + t'\Delta_2}{\Delta t + \Delta p - \Delta_2}.
\end{aligned}$$

En tenant compte des valeurs (1) et en simplifiant, on obtient :

$$p' = \frac{m'n'(m-n)p}{p(mn'-m'n)-mn(n'-m')}.$$

D'où il résulte que la position du point d' par rapport aux points a', b' et c' est indépendante des valeurs t et t', c'est-à-dire indépendante des origines O et O' sur les bases l et l'. C. q. f. d.

Remarque. — Puisque la position des éléments des paires nouvelles est indépendante des origines primitivement choisies, on peut prendre celles-ci d'une manière arbitraire sur les bases, en observant que les 3 paires fondamentales déterminent chaque fois des nouvelles valeurs de λ, μ et ν.

Calcul des coefficients. — Nous avons eu

$$\lambda = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad \mu = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad \nu = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

En introduisant les valeurs tirées des déterminants, on obtient :

$$\lambda = \frac{\Delta t' + m'n'(m-n)}{\Delta} = t' + \frac{m'n'(m-n)}{m'n'-m'n},$$

$$\mu = \frac{\Delta t + mn(n'-m')}{\Delta} = t + \frac{mn(n'-m')}{mn'-m'n},$$

$$\nu = \frac{\Delta_1 t + \Delta_2 t' - \Delta tt'}{\Delta} = tt' + \frac{tm'n'(m-n) + t'mn(n'-m')}{mn'-m'n}$$

ou

$$\nu = \lambda t + \mu t' - tt'.$$

Cas particuliers : 1° d *tombe en* b *ou en* c.

On a alors

$$p = m \text{ ou } p = n.$$

Supposons donc $p = n$; on obtient :

$$p' = \frac{m'n'(m-n)n}{n(mn'-m'n)-mn(n'-m')} = n'.$$

On voit que d' tombe sur l'homologue de c, soit c'.

De même avec b et b'.

2° *Les origines sont une paire de points homologues comme* a, a'.

Dans ce cas les valeurs t et t' sont nulles et on obtient

$$\lambda = \frac{m'n'(m-n)}{mn'-m'n},$$

$$\mu = \frac{mn(n'-m')}{mn'-m'n},$$

$$\nu = 0.$$

L'équation générale devient :

$$xx' - \lambda x - \mu x' = 0,$$

ou

$$x' = kx,$$

avec

$$k = \frac{\lambda}{x-\mu} = \frac{m'n'(m-n)}{(mn'-m'n)x - mn(n'-m')}.$$

On voit que x' s'annule avec x

4° L*e conjugué d'un point comme* b *est à l'infini.*

Dans ce cas on a $m' = \infty$.

Les valeurs λ, ν et p' ne présentant pas de remarques particulières.

La valeur μ prend la forme : $\mu = t + m = \overline{Ob}$.

Si on faisait de même $n = \infty$, c'est-à-dire si on prenait c à l'infini, on aurait

$$\lambda = t' + n' = \overline{O'c'}.$$

Les points conjugués des points à l'infini portent le nom de *points limites*.

On en conclut que les coefficients λ et μ sont donnés par les distances des points limites de chaque base à l'origine correspondante.

En outre, si les points limites étaient les origines, on aurait :

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0.$$

D'où

$$xx' = -\nu = tt'$$

t et t' désignant les distances de ces points aux points a et a'.

5° *On prend* d *à l'*∞.

Le conjugué d' du point d_x donne alors la distance

$$p' = \frac{m'n'(m-n)}{mn' - m'n} = \lambda - t'.$$

Cette valeur peut du reste être déduite directement du cas précédent.

L. Crelier (Bienne, Suisse).

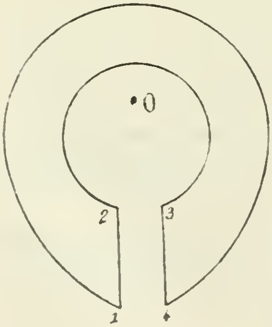
LA FORMULE DE STOKES

Rappelons que le théorème de Stokes se résume dans l'identité

$$\int_0^s (X dx + Y dy + Z dz)$$

$$= \int_s \left\{ \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) l + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) m + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) n \right\} dw$$

dans laquelle le premier membre est une intégrale curviligne et le deuxième une intégrale de surface limitée par le contour de la première ; X, Y, Z sont des fonctions de x, y, z, finies et continues sur la surface, admettant des dérivées finies et continues aux mêmes endroits ; l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale à l'élément dw de la surface.



Nous poserons

$$x = f(u, v),$$
$$y = g(u, v),$$
$$z = h(u, v),$$

de telle sorte que ce soient

$$x = f(v_1, u), \text{ etc.}$$
$$x = f(v_2, u), \text{ etc.}$$

les équations des courbes 1-2 et 3-4, et

$$x = f(v, u_1), \text{ etc.}$$
$$x = f(v, u_2), \text{ etc.}$$

celles des courbes 2-3 et 1-4.

Nous aurons évidemment

$$\int_0 X dx + Y dy + Z dz = {}_{(v_1)}\int_{u_1}^{u_2} \left(X \frac{\partial x}{\partial u} + Y \frac{\partial y}{\partial u} + Z \frac{\partial z}{\partial u}\right) du$$

$$- {}_{(v_2)}\int_{u_1}^{u_2} \left(X \frac{\partial x}{\partial u} + Y \frac{\partial y}{\partial u} + Z \frac{\partial z}{\partial u}\right) du + {}_{(u_1)}\int_{v_2}^{v_1} \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v}\right) dv$$

$$- {}_{(u_2)}\int_{v_2}^{v_1} \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v}\right) dv.$$

Mais d'un autre côté, on a

$$\frac{\partial}{\partial v} \int_{u_1}^{u_2} \left(X \frac{\partial x}{\partial u} + \ldots\right) du\, dv$$

$$= \int_{u_1}^{u_2} \sum \left\{\left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}\right) \frac{\partial x}{\partial u}\right\} du\, dv + \int_{u_1}^{u_2} \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\, du\, dv.$$

L'intégration par parties donne d'ailleurs

$$\int_{u_1}^{u_2} \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\, du\, dv = \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v}\right)_{u_2} dv$$

$$- \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v}\right)_{u_1} dv$$

$$- \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}\right) \frac{\partial x}{\partial v}\, du\, dv$$

$$- \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}\right) \frac{\partial y}{\partial v}\, du\, dv$$

$$- \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}\right) \frac{\partial z}{\partial v}\, du\, dv.$$

En faisant les substitutions et les réductions on aura

$$\frac{\partial}{\partial v} \int_{u_1}^{u_2} \left(X \frac{\partial x}{\partial u} + \ldots\right) du\, dv = \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v}\right)_{u_2} dv$$

$$- \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v}\right)_{u_1} dv$$

$$+ \int_{1}^{u_2} \left\{\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) \frac{D(x_1 y)}{D(u_1 v)} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) \frac{D(y_1 z)}{D(u_1 v)} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) \frac{D(z_1 x)}{D(u_1 v)}\right\} du\, dv.$$

En intégrant cette expression entre les limites v_1 et v_2 on a

$$
\begin{aligned}
&{}^{(v_1)}\int_{u_1}^{u_2}\left(X\frac{\partial x}{\partial u}+\dots\right)du-{}^{(v_2)}\int_{u_1}^{u_2}\left(X\frac{\partial x}{\partial u}+\dots\right)du\\
&+{}^{(u_1)}\int_{v_2}^{v_1}\left(X\frac{\partial x}{\partial v}+\dots\right)dv-{}^{(u_2)}\int_{v_2}^{v_1}\left(X\frac{\partial x}{\partial v}+\dots\right)dv\\
&=\int_{v_2}^{v_1}\int_{u_1}^{u_2}\left\{\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\frac{D(x,y)}{D(u,v)}+\dots\right\}du\,dv.
\end{aligned}
$$

Le premier membre est l'intégrale le long du contour ; le deuxième celle relative à la surface y comprise.

En désignant par l, m, n, les cosinus directeurs de la normale, on a

$$
\begin{aligned}
&\int_0 (X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)\\
&=\int_S\left\{\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)l+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)m+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)n\right\}dw.
\end{aligned}
$$

Il faut rapprocher maintenant les deux courbes 1-2 et 3-4, et réduire le petit contour 2-3 à un point.

Otto A. Silva (Rio de Janeiro).

L'ALGÈBRE DU CALCUL

Depuis son origine, il y a plus de deux siècles, on a cherché à donner au Calcul infinitésimal une base purement arithmétique. Avant d'exposer une méthode des plus simples pour atteindre ce but, *sans limites ni infinitésimales*, nous allons démontrer que la méthode en vogue est non seulement incommode mais erronée, en tant qu'elle repose sur la contradiction dont on s'est servi pour établir la loi de la dérivation partielle, loi d'autant plus fondamentale qu'elle contient celles de l'addition et la multiplication des dérivées comme cas particuliers : ce que l'on n'a pas même remarqué.

Si par exemple $u = f(v, \omega)$, où $v = \sin x$, $\omega = e^x$, on obtient $\left(\dfrac{du}{dv}\right)$ en regardant la première comme variable, la seconde comme constante : ce qui est impossible, *à moins que x ne soit en même temps variable et constant...*

Nous ne tarderons pas à préciser en le généralisant le vrai procédé de la dérivation partielle, déguisé sous cette sophistique puérile, en posant cette notation et ces définitions préalables.

1. Par

$$\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d}$$

il est entendu que $a = c$, $b = d$, en distinguant toujours une fraction d'un quotient, ainsi :

$$\frac{x + x}{1 + 1} \equiv \frac{2x}{2}.$$

2. Par

$$u = u_v,\ u = u_{v,w}\ u = u_{v_x}.\ \text{etc.}$$

on entend u est fonction de v, u est fonction de v et de w, u est fonction de v, qui est fonction de x, etc.

3. Soit

$$\begin{aligned} \alpha_1\beta_1 \ldots \omega_1 + \alpha_2\beta_2 \ldots \omega_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n \ldots \omega_n &= \\ u_1 \quad + \quad u_2 \quad + \ldots + \quad u_n \quad &= \overset{1}{u} \end{aligned} \tag{a}$$

et nommons cette série ou son équivalent symbolique $\overset{1}{u}$ (dont le *module*, 1, indique que *tous* les n termes y sont compris) un *résultant.*

Si $n = p + q$, et si l'on supprime les termes d'ordre q, de sorte que l'on ait

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_p = \overset{(1)}{u} \tag{b}$$

où le module $(1) = p : n$, le résultant se dit *partiel* par rapport au premier.

Ainsi l'on a en général

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{nM} = \overset{M}{u} \tag{c}$$

en posant

$$M = \frac{p + qo^{m-1}}{p+q} \tag{d}$$

où m est un entier à déterminer. Le cas où $m > 1$ et par conséquent $qo^{m-1} = o$ est analogue à celui d'un déterminant (qui n'est qu'une espèce de résultant) où l'on multiplie des termes par des éléments-zéro.

4. Toute autre série, *ayant même nombre de termes*,

$${}_1u + {}_2u + \ldots + {}_{nM}u = \underset{M}{u} \tag{e}$$

se nomme, ainsi que la première, un *co-résultant.*

5. Si tout terme de la série est fonction de x, on la nomme *résultant en x*, en l'écrivant ainsi

$$\begin{aligned} u_{x_1} + u_{x_2} + \ldots + u_{x_{nX}} &= \overset{X}{u_x} \\ {}_1u_x + {}_2u_x + \ldots + {}_{nX}u_x &= \underset{X}{u_x} \end{aligned} \tag{f}$$

où le module se conforme à la lettre de la sous-fonction ; et tout résultant se dit *homonyme* ou *hétéronyme* selon que la fonction et la sous-fonction sont identiques ou non, en entendant d'ailleurs que tout produit d'un résultant homonyme ou hétéronyme se dit aussi homonyme ou hétéronyme.

6. Si en particulier pour toute valeur de x

$$\frac{\overset{X}{u_x}}{\underset{X}{u_x}} = \frac{u}{x}$$

où u est fonction de x, on nomme le résultant *co-résultant de u par rapport à x*. Et il est évident que si par exemple $u = u_{v_x}$ et l'on peut trouver des co-résultants de u par rapport à v, et de v par rapport à x, on en aura aussi trouvé de u par rapport à x, ainsi

$$\frac{u}{x} = \frac{u}{v}\,\frac{v}{x} = \frac{\overset{V}{u_v}}{\underset{V}{u_v}}\,\frac{\overset{X}{v_x}}{\underset{X}{v_x}} = \frac{u_{x_1}}{{}_1u_x} = \frac{\overset{X}{u_x}}{\underset{X}{u_x}}.$$

7. *Définition.* — Si $u = u_{v_x}, {}_{\omega_x}, \ldots, {}_{z_x}$, où u est fonction immédiate de v, w.. et v, w.. sont des fonctions immédiates de x, et

$$\frac{u}{x} = \frac{u}{v}\,\frac{v}{x} = \frac{u}{w}\,\frac{w}{x} = \ldots = \frac{u}{z}\,\frac{z}{x}$$

$$= \frac{\overset{V}{u_v}}{\underset{V}{u_v}}\,\frac{\overset{X}{v_x}}{\underset{X}{v_x}} = \frac{\overset{W}{u_w}}{\underset{W}{u_w}}\,\frac{\overset{X}{w_x}}{\underset{X}{w_x}} = \ldots = \frac{\overset{Z}{u_z}}{\underset{Z}{u_z}}\,\frac{\overset{X}{z_x}}{\underset{X}{z_x}}$$

$$= \frac{\overset{V}{u_v}\,\overset{X}{v_x} + \overset{W}{u_w}\,\overset{X}{w_x} + \ldots + \overset{Z}{u_z}\,\overset{X}{z_x}}{\underset{V}{u_v}\,\underset{X}{v_x} + \underset{W}{u_w}\,\underset{X}{w_x} + \ldots + \underset{Z}{u_z}\,\underset{X}{z_x}} = \frac{\overset{1}{u_x}}{\underset{1}{u_x}}$$

et si dans tout module $M = \dfrac{p + qo^{m-1}}{p+q}$ on suppose p le nombre des termes *homonymes*, m le nombre des *sous-fonctions immédiates* d'une fonction donnée, de sorte que

$$\frac{\overset{V}{u_v}\,\overset{1}{v_x} + \overset{W}{u_w}\,\overset{1}{w_x} + \ldots + \overset{Z}{u_z}\,\overset{1}{z_x}}{\underset{V}{u_v}\,\underset{1}{v_x} + \underset{W}{u_w}\,\underset{1}{w_x} + \ldots + \underset{Z}{u_z}\,\underset{1}{z_x}} = \frac{\overset{1}{u_x}}{\underset{1}{u_x}} \qquad (g)$$

les co-résultants à droite se nomment respectivement *la dérivée et le dérivant de u par rapport à x*, et en même temps tout résul-

tant particulier dont ils se composent se nomme *la dérivée* ou *le dérivant* (total ou partiel selon le cas) *de sa fonction respective par rapport à sa sous-fonction.*

8. De la formule (g) toutes les règles ordinaires de la dérivation se déduisent au premier coup d'œil; et il est à remarquer que quelles que soient les valeurs de v, w, etc., on a toujours

$$V.1 + W.1 + \ldots + Z.1 = 1 \qquad (h)$$

c'est-à-dire *le résultant des modules est le module du co-résultant.*

9. Ainsi pour $u = u_{v_x}$, où m_u, le nombre de sous-fonctions immédiates de u, est l'unité, on a

$$\frac{\overset{1}{u}_v \overset{1}{v}_x}{\underset{1}{u}_v \underset{1}{v}_x} = \frac{\overset{1}{u}_x}{\underset{1}{u}_x} \qquad (A)$$

d'où, en posant $u = v$,

$$\overset{1}{u}_u \overset{1}{u}_x = \overset{1}{u}_x, \quad \underset{1}{u}_u \underset{1}{v}_x = \underset{1}{u}_x$$

et par conséquent $\overset{1}{u}_u = \underset{1}{u}_u = 1$, etc.

De même pour $u = u_{v_{w_x}}$, $m_u = m_v = 1$, et l'on a

$$\frac{u}{x} = \frac{u}{v}\,\frac{v}{\omega}\,\frac{\omega}{x} = \frac{\overset{1}{u}_v \overset{1}{v}_w \overset{1}{w}_x}{\underset{1}{u}_v \underset{1}{v}_w \underset{1}{w}_x} = \frac{\overset{1}{u}_x}{\underset{1}{u}_x}$$

et ainsi de suite.

10. Pour $u = u_{v_x, w}$, $m_u = 2$, et l'on a

$$\frac{\overset{(1)}{u}_v \overset{1}{v}_x + \overset{(1)}{u}_\omega \overset{1}{w}_x}{\underset{(1)}{u}_v \underset{1}{v}_x + \underset{(1)}{u}_\omega \underset{1}{w}_x} = \frac{\overset{1}{u}_x}{\underset{1}{u}_x} \qquad (B)$$

d'où en posant $\omega = x$,

$$\overset{(1)}{u}_v \overset{1}{v}_x + \overset{(1)}{u}_x = \overset{1}{u}_x$$

et, pour $\overset{1}{u}_x = 0$, $\overset{1}{v}_x = -\overset{(1)}{u}_x : \overset{(1)}{u}_v$.

11. Pour $u = v + w$, on a

$$\frac{u}{x} = \frac{u}{v}\,\frac{v}{x} = \frac{u}{w}\,\frac{w}{x}$$

$$= \frac{v + w}{v}\,\frac{\overset{1}{v_x}}{\underset{1}{v_x}} = \frac{v + w}{w}\,\frac{\overset{1}{w_x}}{\underset{1}{w_x}}$$

$$= \frac{\overset{1}{v_x} + \overset{1}{w_x}}{\dfrac{v\underset{1}{v_x} + w\underset{1}{w_x}}{v + w}} \equiv \frac{\overset{1}{u_x}}{\underset{1}{u_x}} \equiv \frac{\overset{1}{v + w}}{\underset{1}{v + w}} \qquad (C)$$

en divisant le dénominateur par $v + w$ au lieu de multiplier le numérateur, pour ne pas être en contravention avec la définition du § 4, puisque le produit de deux binômes est quadrinôme tandis que leur quotient est binôme. Et puisque

$$\overset{1}{u_x} = \overset{1}{v_x} + \overset{1}{w_x},$$

$$\overset{1}{u_v} = \overset{1}{v_v} + \overset{1}{w_v}, \quad \overset{1}{u_\omega} = \overset{1}{v_\omega} + \overset{1}{w_\omega},$$

$$\overset{(1)}{u_v} = \overset{1}{v_v} + \overset{1}{w_v}\,0, \quad \overset{(1)}{u_\omega} = \overset{1}{v_\omega}\,0 + \overset{1}{w_w}$$

en multipliant tout terme *hétéronyme* par o^{2-1}. Par conséquent $(1) = \frac{1}{2}$, et

$$\overset{\frac{1}{2}}{u_v}\overset{1}{v_x} + \overset{\frac{1}{2}}{u_\omega}\overset{1}{w_x} = \overset{1}{v_x} + \overset{1}{w_x}$$

ce qu'il faut constater. De même pour le dérivant. Et en général

$$\frac{\overset{\frac{1}{n}}{u_v}\overset{1}{v_x} + \ldots + \overset{\frac{1}{n}}{u_z}\overset{1}{z_x}}{\underset{\frac{1}{n}}{u_v}\underset{1}{v_x} + \ldots + \underset{\frac{1}{n}}{u_z}\underset{1}{z_x}} \equiv \frac{\overset{1}{v_x} + \ldots + \overset{1}{z_x}}{\dfrac{v}{u}\,\underset{1}{v_x} + \ldots + \dfrac{z}{u}\,\underset{1}{z_x}}$$

12. Pour $u = vw$ on a

$$\frac{u}{x} = \frac{u}{v}\,\frac{v}{x} = \frac{u}{w}\,\frac{w}{x}$$

$$= \frac{vw}{v}\,\frac{\overset{1}{v_x}}{\underset{1}{v_x}} = \frac{vw}{w}\,\frac{\overset{1}{w_x}}{\underset{1}{w_x}}$$

$$= \frac{w\overset{1}{v_x} + v\overset{1}{w_x}}{\underset{1}{v_x} + \underset{1}{w_x}} \equiv \frac{\overset{1}{u_x}}{\underset{1}{u_x}} \equiv \frac{\overset{1}{v \times w}}{\underset{1}{v \times w}} \qquad (D)$$

Et en général

$$\frac{\overset{\frac{1}{n}}{u_v}\,\overset{1}{v_x} + \dots + \overset{\frac{1}{n}}{u_z}\,\overset{1}{z_x}}{\underset{\frac{1}{n}}{u_v}\,\underset{1}{v_x} + \dots + \underset{\frac{1}{n}}{u_z}\,\underset{1}{z_x}} = \frac{w \dots z\overset{1}{v_r} + \dots + v \dots y z}{\underset{1}{v_r} + \dots + \underset{1}{z_r}}$$

13. Pour $u = v : w$ on a

$$\frac{\overset{1}{v_x} : w - v\overset{1}{w_x} : w^2}{\underset{1}{v_x} - \underset{1}{w_r}} = \frac{\overset{1}{u_r}}{\underset{1}{u_x}} = \frac{\overset{1}{v} : w}{\underset{1}{v} : w}$$

D'où deux corollaires importants.

α. *La dérivée d'une constante est nulle.*
Ainsi

$$\overset{1}{1} = \overset{1}{v . v} = \frac{\overset{1}{v}}{v} - \frac{v\overset{1}{v}}{v^2} = 0$$

$$\overset{1}{n} = \overset{1}{1} + \overset{1}{1} + \dots + \overset{1}{1} = 0 + 0 + \dots + 0 = no$$

De même $\overset{1}{m} = mo$, et $\overset{1}{n : m} = \frac{n}{m}\,o$. Donc $\overset{1}{c} = c.o$. Q.E.D.

β. *Le quotient de deux fonctions évanouissantes est le quotient de leurs dérivées.* Puisqu'une constante a la même valeur pendant deux instants consécutifs, et qu'il est impossible de changer de signe en moins de deux instants, toute fonction qui change de signe en passant par zéro est constante : et comme le quotient de deux constantes est constant, $\frac{v}{w}$ est constant, en écrivant ainsi la fraction pour la distinguer de $v : w$, dont la valeur est *générale*. En égalant et différentiant ces deux expresions on a

$$v : w = \frac{v}{w}$$

$$\frac{\overset{1}{v}}{w} - \frac{v\overset{1}{w}}{w^2} = \frac{v}{w}\,0$$

d'où

$$\frac{\overset{1}{v}}{v} - \frac{\overset{1}{w}}{w} = 0$$

et

$$\frac{v}{w} = \frac{\overset{1}{v}}{\overset{1}{w}}, \text{ Q. E. D.}$$

14. En appliquant ces règles aux fonctions fondamentales x^n, a^x, sin_x, etc, on a

$$\frac{x^n}{x} = \frac{x_1^{n-1}}{1} = \ldots = \frac{x_n^{n-1}}{n!} = \frac{nx^{n-1}}{n} = \frac{\overset{1}{u_x}}{\underset{1}{u_x}} \qquad (\alpha)$$

Ainsi

$$\frac{x^n}{x} = \frac{x^{a+b}}{x} = \frac{x^a x^b}{x}$$

$$\frac{nx^{n-1}}{n} = \frac{(a+b)x^{a+b-1}}{a+b} = \frac{x^b a x^{a-1} + x^a b x^{b-1}}{a+b}.$$

$$\frac{a^x}{x} = \frac{a^x \mathrm{A}}{x\mathrm{A}} = \frac{\overset{1}{u_x}}{\underset{1}{u_x}} \qquad (\beta)$$

où $\mathrm{A} = \log a$, et $x\mathrm{A} = \mathrm{U}_x\ \mathrm{A}_x = \mathrm{U}_x$. Ainsi

$$a^x = 1 + \mathrm{A}x + \mathrm{A}^2 \frac{x^2}{2} + \ldots$$

$$\overset{1}{a^x} = 0 + \mathrm{A} + \mathrm{A}^2 x + \ldots = a^x \mathrm{A}.$$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\cos x}{x \cot x} = \frac{\overset{1}{u_x}}{\underset{1}{u_x}}. \qquad (\gamma)$$

Ainsi

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

$$\overset{1}{s_x} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \cos x$$

Et ainsi de suite.

15. Pour *la dérivation successive* on emploie le module n ou (n), selon que l'opération est totale ou partielle. Ainsi

$$\overset{2}{u}_{v_x} = \overset{2}{u}_{x_v} - \overset{1}{u}\,\overset{2}{v}_x\,\overset{1}{x}_v$$

$$\overset{(2)}{u}_{v_x} = \overset{(2)}{u}_{x_v}.$$

On démontre la première égalité en différentiant les identités

$$\overset{1}{u}_v = \overset{1}{u}_x \overset{1}{x}_v, \quad \overset{1}{u}_x = \overset{1}{u}_v \overset{1}{v}_x$$

la première par rapport à x, la seconde par rapport à v, ce qui donne

$$\overset{2}{u}_{v_x} = \overset{2}{u}_v \overset{1}{v}_x = \overset{2}{u}_x \overset{1}{x}_v + \overset{1}{u}_x \overset{2}{x}_v \overset{1}{v}_x$$

$$\overset{2}{u}_{x_v} = \overset{2}{u}_x \overset{1}{x}_v = \overset{2}{u}_v \overset{1}{v}_x + \overset{1}{u}_v \overset{2}{v}_x \overset{1}{x}_v$$

d'où

$$\overset{1}{u}_x \overset{2}{x}_v \overset{1}{v}_x + \overset{1}{u}_v \overset{2}{v}_x \overset{1}{x}_v = 0.$$

16. Pour *l'intégration successive*, opération qui ne paraît pas reconnue dans les mathématiques, on emploie le module n, en nommant toute fonction *l'intégrale de sa dérivée* ou *l'intégrant de son dérivant* par rapport à une sous-fonction quelconque ; c'est-à-dire $u = \overset{1-1}{u} = \underset{1-1}{u}$. Ainsi dans ce que l'on peut nommer le développement intégro-différentiel ou *intérentiel*

$$\bar{u} \equiv \overset{0}{u}_x \overset{0}{w}_v + \overset{1}{u}_x \overset{-1}{w}_v + \overset{2}{u}_x \overset{-2}{w}_v + \,..$$

on n'a qu'à mettre $w = 1$ pour avoir

$$u_{x+v} = u_x + \overset{1}{u}_x v + \overset{2}{u}_x \frac{v^2}{2!} + \,..$$

le soi-disant théorème de Taylor. De même on a

$$u \equiv \underset{0}{u}\underset{0}{w} + \underset{1}{u}\underset{1}{w} + \underset{2}{u}\underset{2}{w} + \,..$$

17. Deux fonctions v, ω se nomment *paronymes* si l'on a $\overset{1}{v} = \underset{1}{\omega}$. Ainsi $\overset{1}{\overline{x^2 : 2}} = x = \underset{1}{e^x}$.

18. Quant à la notation que nous avons ébauchée, elle se rattache évidemment à celle de Newton, d'ailleurs vague et défectueuse, à laquelle nous avons cherché à donner une base rationnelle, en regardant la dérivée tout simplement comme *la*

somme des numérateurs d'un nombre convenu de fractions égales, idée aussi étrangère en elle-même à l'algorithme de Newton qu'au *du* : *dx* de Leibniz, qui n'a aucun sens, et que l'on ne rend intelligible qu'en le transformant en *du* : *x*, ou *d*, coefficient algébrique, est le *dérivant* de la fonction, comme nous venons de le définir. Ainsi

$$\overset{1}{u}_x = \underset{1}{u}_x \frac{u}{x}$$

puisque toute tangente (pour nous rappeler l'origine géométrique de ce genre de calcul) n'est que le quotient $u : x$ multiplié par un *tenseur* arithmétique qui dépend de la forme de *u*. Et c'est au moyen de cette fonction *auxiliaire*, dont le logarithme bien entendu n'est qu'un cas particulier, que l'on parvient à établir les règles du Calcul, et à remplacer par un mécanisme simple et symétrique un pêle-mêle de procédés artificiels dont l'empirisme et la sophistique font le scandale de la science. En effet comme l'addition mène à l'idée de la multiplication, et celle-ci à l'idée du logarithme, ainsi

$$ {}_0a + {}_1a + \,..\, + {}_na = na $$
$$ a_0 \times a_1 \times \,..\, \times a_n = a^n $$

d'où ${}_0a = oa$, $a_0 = a^o$, on n'a qu'à généraliser le logarithme pour arriver à l'idée du dérivant, qui à son tour mène à celle de la dérivée.

W. Renton (Newcaste, Angleterre).

REMARQUES SUR LES VARIATIONS D'UN POLYNOME

I

Si l'on donne à une racine d'un polynôme entier l'accroissement $\Delta\alpha$, les accroissements correspondants des coefficients du polynôme deviennent :

$$\text{(A)} \quad \begin{aligned} \Delta a_0 &= 0 \\ \Delta a_1 &= -a_0\,\Delta\alpha \\ \Delta a_2 &= -(a_1 + a_0\,\alpha)\,\Delta\alpha \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Delta a_\nu &= -(a_{\nu-1} + a_{\nu-2}\alpha + a_{\nu-3}\alpha^2 + \ldots + a_0\alpha^{\nu-1})\,\Delta\alpha \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Delta a_\mu &= -(a_{\mu-1} + a_{\mu-2}\,a + a_{\mu-3}\,\alpha^2 + \ldots + a_0\,\alpha^{\mu-1})\,\Delta\alpha. \end{aligned}$$

Nous voyons cela, soit en divisant le polynôme donné par $x - \alpha$ et multipliant ensuite le quotient par $(x - \alpha - \Delta\alpha)$, soit en ayant égard aux relations entre les racines et les coefficients.

En observant que

$$a_\mu + \alpha\,(a_{\mu-1} + a_{\mu-2}\,\alpha + a_{\mu-3}\,\alpha^2 + \ldots + a_0\,\alpha^{\mu-1}) = 0$$

nous écrivons les relations (A) comme il suit :

$$\text{(B)} \quad \begin{aligned} \Delta a_\mu &= \frac{a_\mu}{\alpha}\,\Delta\alpha \\ \Delta a_{\mu-1} &= \left(\frac{a_\mu}{\alpha^2} + \frac{a_{\mu-1}}{\alpha}\right).\Delta\alpha \\ \Delta a_{\mu-2} &= \left(\frac{a_\mu}{\alpha^3} + \frac{a_{\mu-1}}{\alpha^2} + \frac{a_{\mu-2}}{\alpha}\right).\Delta\alpha \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Delta a_1 &= \left(\frac{a_\mu}{\alpha^\mu} + \frac{a_{\mu-1}}{\alpha^{\mu-1}} + \frac{a_{\mu-2}}{\alpha^{\mu-2}} + \ldots + \frac{a_1}{\alpha}\right).\Delta\alpha \end{aligned}$$

Des relations (A) on déduit la formule de récurrence

(C) $$\Delta a_\nu = -a_{\nu-1}\Delta\alpha + \alpha\,\Delta a_{\nu-1}$$

d'où suivent divers corollaires pour les variations des coefficients correspondants à la variation de la racine α.

1. — Quand une racine positive devient négative et que dans un groupe de coefficients de même signe du polynôme, un quelconque d'entre eux diminue absolument ou change de signe, tous ceux qui le précèdent changent nécessairement de signe.

Démonstration. — Supposons que nous ayons

$$a_{\nu-2}<0 \quad a_{\nu-1}<0 \quad a_\nu<0$$
$$\alpha>0 \quad \Delta\alpha<0 \text{ mais } |\Delta\alpha|>\alpha \quad \Delta a_\nu>0.$$

de la relation (C) nous tirons alors

$$-a_{\nu-1}\Delta\alpha+\alpha.\Delta a_{\nu-1}>0.$$

ou

$$\alpha.\Delta a_{\nu-1}>a_{\nu-1}\Delta\alpha.$$

ou

$$\alpha.\Delta a_{\nu-1}>|a_{\nu-1}|.|\Delta\alpha|.$$

et comme

$$\alpha<|\Delta\alpha|$$

il s'ensuit

$$\Delta a_{\nu-1}>|a_{\nu-1}|,$$

donc

$$a_{\nu-1}+\Delta a_{\nu-1}>0.$$

Pareillement de

$$\Delta a_{\nu-1}>0$$

on déduit que

$$a_{\nu-2}+\Delta a_{\nu-2}>0.$$

On démontre de la même manière la proposition correspondante, quand nous avons

$$a_{\nu-2}>0,\quad a_{\nu-1}>0,\quad a_\nu>0.$$

2. — Si dans un groupe de termes de même signe un quelconque

d'entre eux, le dernier excepté, ne change pas de signe, il en sera de même pour le suivant, car autrement le précédent ne pourrait garder son signe.

3. — Le changement d'une racine positive en négative détruit au moins une variation.

Démonstration. — Les coefficients du premier groupe conservent leur signe, puisqu'il en est de même du premier (car $\Delta\alpha_0 = 0$) (voir remarque 2). Ceux du dernier groupe, au contraire, changeront tous de signe, puisqu'il en est de même du dernier terme

$$\text{car } (a_\lambda + \Delta a_\lambda).a_\lambda < 0,$$

comme on déduit des relations (B), puisque

$$(a_\lambda + \Delta a_\lambda)a_\lambda = a_\lambda^2 \left(1 + \frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right)$$

mais

$$\left|\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right| > 1$$

d'où

$$1 + \frac{\Delta\alpha}{\alpha} < 0.$$

(voir remarque 1).

Quant aux autres groupes, trois cas peuvent se présenter :
1° ou tous les termes du groupe conservent leur signe ;
2° ou tous changent de signe ;
3° ou bien présentent une seule variation, de sorte qu'ils peuvent se subdiviser chacun en deux autres groupes, dont le second aura des coefficients ayant conservé leur signe (c'est-à-dire de même signe que les coefficients correspondants du polynôme donné).

Tout cela se voit d'après la remarque 1.

Soit ν le nombre des groupes consécutifs du polynôme donné.

Ils présentent $\nu - 1$ variations, cherchons le nombre maximum des variations des coefficients correspondants du nouveau polynôme. Je dis que ce nombre maximum sera $\nu - 2$.

Car on aura ce nombre maximum en supposant que chaque groupe du polynôme donné à partir du deuxième jusqu'à l'avant-dernier fut subdivisé en deux autres groupes. Le nombre des groupes nouveaux, ainsi produits, sera $2(\nu - 1)$.

En représentant les groupes du polynôme donné par

$$(1) \qquad L, \quad M, \quad N. \quad P\ldots \quad J, \quad K$$

$$\text{et par } L' \quad \widehat{\mu, \mu'} \quad \widehat{\nu, \nu'} \quad \widehat{\rho, \rho'\ldots} \quad \widehat{\sigma, \sigma'} \quad K' \qquad (2)$$

ceux du nouveau polynôme (c'est-à-dire par L' le groupe des coefficients correspondants à ceux du (L), par μ, μ' les groupes en lesquels fut subdivisé (M e. c. t., etc.). L'on voit que le signe des coefficients du groupe (μ) coïncide avec celui du groupe L, de même le signe des coefficients du groupe (ν) coïncidera avec celui du groupe (μ') et ainsi de suite.

Donc les groupes (2) coïncideront deux à deux en un groupe du nouveau polynôme et par conséquent ce dernier aura $\nu - 1$ groupes, c'est-à-dire $\nu - 2$ variations.

4. — De ce qui précède l'on déduit aussi le théorème de Descartes; car, pour chaque changement d'une racine positive en négative, il faut qu'un nombre impair de variations se perde; ce nombre impair de variations doit donc exister auparavant dans le polynôme. Du reste, après le changement des racines positives en négatives, le polynôme ne présentera pas un nombre impair de variations, car, autrement, il aurait une racine positive.

5. — Dans ce qui précède l'on supposait

$$|\Delta\alpha| > \alpha,$$

mais il est facile de montrer que les propositions précédentes seront vraies aussi pour

$$\Delta\alpha = -\alpha;$$

l'on verra ainsi que, si un coefficient négatif devient positif, le coefficient suivant, s'il est positif, conservera son signe.

6. Soit le polynôme

$$a_0 x^\mu + a_1 x^{\mu-1} + \ldots + a_{\rho-1} x^{\mu-\rho+1} + a_\rho x^{\mu-\rho} + \ldots + a_{\sigma-1} x^{\mu-\sigma+1} + a_\sigma x^{\mu-1}$$
$$+ \ldots + a_{\tau-1} x^{\mu-\tau+1} + a_\tau x^{\mu-\tau} + \ldots + a_{\nu-1} x^{\mu-\nu+1} + a_\nu x^{\mu-\nu} + \ldots + a_\mu.$$

dans lequel nous supposons les coefficients

$$
\begin{array}{ll}
a_0,\ a_1, \ldots\ a_{\rho-1} & \text{positifs} \\
a_\rho,\ a_{\rho+1}, \ldots\ a_{\sigma-1} & \text{négatifs} \\
a_\sigma,\ a_{\sigma+1} \ldots\ a_{\tau-1} & \text{positifs} \\
a_\tau,\ a_{\tau+1}, \ldots\ a_{\nu-1} & \text{négatifs}.
\end{array}
$$

e. c. t.

Si dans le changement d'une racine positive en racine négative ou nulle nous avons

$$
(E) \qquad
\begin{array}{l}
a_{\sigma-1} + \Delta a_{\sigma-1} > 0 \\
a_\sigma \quad + \Delta a_\sigma \quad > 0 \\
a_{\nu-1} + \Delta a_{\nu-1} > 0 \\
a_\nu \quad + \Delta a_\nu \quad > 0 \\
\dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

c'est-à-dire si le dernier terme de chaque groupe négatif devient positif, et que le premier de chaque groupe positif reste positif, alors le polynôme donné n'a d'autre racine positive que α; car le nouveau polynôme aura tous les termes positifs et cela parce que le dernier terme de chaque groupe négatif devenant positif, il s'ensuit que tous ceux du groupe qui précèdent, deviendront positifs; de même le premier terme de chaque groupe positif restant positif, il s'ensuit que tous ceux du groupe qui lui suivent resteront positifs.

Les inégalités (E) peuvent aussi s'écrire comme il suit

$$
\begin{array}{l}
a_{\sigma-1} - (a_{\sigma-2} + a_{\sigma-3}\alpha + \ldots + a_0\alpha^{\sigma-2}).\Delta\alpha > 0 \\
a_\sigma \quad - (a_{\sigma-1} + a_{\sigma-2}\alpha + \ldots + a_0\alpha^{\sigma-1}).\Delta\alpha > 0 \\
a_{\nu-1} - (a_{\nu-2} + a_{\nu-3}\alpha + \ldots + a_0\alpha^{\nu-2}).\Delta\alpha > 0 \\
a_\nu \quad - (a_{\nu-1} + a_{\nu-2}\alpha + \ldots + a_0\alpha^{\nu-1}).\Delta\alpha > 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

et comme la proposition précédente est vraie aussi pour

$$\Delta\alpha = -\alpha,$$

il s'ensuit que, pour que α soit la seule racine positive de polynôme, il suffit que

$$
(\varepsilon) \qquad
\begin{array}{l}
a_{\sigma-1} + a_{\sigma-2}\alpha + a_{\sigma-3}\alpha^2 + \ldots + a_0\alpha^{\sigma-1} > 0 \\
a_\sigma \quad + a_{\sigma-1}\alpha + a_{\sigma-2}\alpha^2 + \ldots + a_0\alpha^{\sigma} \quad > 0 \\
a_{\nu-1} + a_{\nu-2}\alpha + a_{\nu-3}\alpha^2 + \ldots + a_0\alpha^{\nu-1} > 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

mais comme de la première des inégalités (τ) suit la seconde (d'après nos suppositions) et de la troisième, la quatrième, les conditions (τ) se réduisent aux seules suivantes :

$$a_{\sigma-1} + a_{\sigma-2}\alpha + a_{\sigma-3}\alpha^2 + \dots + a_0\alpha^{\sigma-1} > 0$$
$$a_{\nu-1} + a_{\nu-2}\alpha + a_{\nu-3}\alpha^2 + \dots + a_0\alpha^{\nu-1} > 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

et en général, on montre de même que le nombre de variations que présentent les expressions

$$(a_{\varrho-1} + \Delta a_{\varrho-1},\ a_\varrho + \Delta a_\varrho,\ a_{\sigma-1} + \Delta a_{\sigma-1},\ a_\sigma + \Delta a_\sigma,\ a_{\tau-1} + \Delta a_{\tau-1},\ a_\tau + \Delta a_\tau,\ a_{\nu-1} + \Delta a_{\nu-1},)\dots$$

est précisément égal au nombre de variations que présentera le nouveau polynôme.

7. — Suivant Laguerre un nombre positif α est la limite supérieure des racines positives, si tous les polynômes suivants sont positifs

$$a_0 \ (\equiv a'_0),$$
$$a_0\alpha + a_1 \ (\equiv a'_1)$$
$$a_0\alpha^2 + a_1\alpha + \alpha^2 \ (\equiv a'^2)$$
$$a_0\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + \alpha_3 \ (\equiv a'_2)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_0\alpha_\mu + a_1\alpha^{\mu-1} + \dots + a_\mu \ (\equiv a'_\mu)$$

Nous pouvons exprimer cette proposition encore d'une autre manière.

Soit le même polynôme que celui de la sixième observation : Je dis qu'il suffit d'avoir

$$a_0\alpha^{\sigma-1} + a_1\alpha^{\sigma-2} + \dots\dots + a_{\sigma-1} > 0$$
$$a_0\alpha^{\nu-1} + a_1\alpha^{\nu-2} + \dots\dots + a_{\nu-1} > 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

pour que α soit la limite supérieure des racines positives. Car alors la série

$$a_0,\ a_0\alpha + a_1,\ a_0\alpha^2 + a_1\alpha + a_2,\ a_0\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + \alpha_3, \dots\dots$$

sera aussi composée de termes positifs et cela parce que nous observons qu'aussi pour ces polynômes est vraie la formule de réduction

$$a'_n = a'_{n-1}\,\alpha + a_n ;$$

par conséquent, quand $a'_{\sigma-1}$ est positif, a'_σ sera aussi positif, de même $\alpha'_{\sigma-2}$, car

$$a'_\sigma \quad = a'_{\sigma-1}\,\alpha + a_\sigma,$$

et

$$a'_{\sigma-1} = a'_{\sigma-2}\,\alpha + a_{\sigma-2}.$$

(Nous avons supposé $a_\sigma > 0 \qquad a_{\sigma-2} < 0$).

De même nous pouvons modifier la proposition de Laguerre, d'après laquelle la limite supérieure du nombre des racines positives du polynôme donné, plus grandes que α, est le nombre de variations de la série des expressions

$$a_0,\ a_0\alpha + a_1,\ a_0\alpha^2 + a_1\alpha + a_2, \ldots\ldots, a_0\alpha^\mu + a_1\alpha^{\mu-1} + \ldots\ldots \alpha_\mu$$

Pour cela nous montrerons d'une manière analogue, que ce nombre est le même avec le nombre des variations de la série des polynômes

$$\begin{array}{l} a_0\alpha^{\rho-1} + a_1\alpha^{\rho-2} + \ldots\ldots + a_{\rho-1} \\ a_0\alpha^{\sigma-1} + a_1\alpha^{\sigma-2} + \ldots\ldots + a_{\sigma-1} \\ a_0\alpha^{\tau-1} + a_1\alpha^{\tau-2} + \ldots\ldots + a_{\tau-1} \\ a_0\alpha^{\nu-1} + a_1\alpha^{\nu-2} + \ldots\ldots + a_{\nu-1} \\ ) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\end{array}$$

8. — Deux polynômes complets, ayant $m - 1$ racines communes et une différente, différeront au moins dans la moitié des coefficients; car s'ils ne diffèrent pas dans le coefficient du terme dont le rang est n, ils différeront dans celui du rang $n + 1$, comme on voit de la relation

$$\Delta a_{\nu+1} = + \alpha . \Delta a_\nu - a_\nu . \Delta\alpha.$$

mais

$$a_\nu \neq 0 \text{ et } \Delta\alpha \neq 0$$

donc

$$\Delta a_{\nu-1} \neq 0.$$

II. Changement des variations d'un polynôme en multipliant par $(x+a)^2+b^2$.

Considérons l'opération :

$$a_0 x_\mu + a_1 x^{\mu-1} + a_2 x^{\mu-2} + \ldots + a_{\mu-2}x^2 + a_{\mu-1}x + a_\mu \text{ (polynôme complet).}$$
$$x^2 + 2\alpha x + (\alpha^2+b^2)$$

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
a_0 & x^{\mu+2} + a_1 & x^{\mu+1} + a_2 & x^\mu + a_3 & x^{\mu-1} \ldots + a_{\mu-2} \\
 & \quad + 2\alpha a_0 & \quad + 2\alpha a_1 & \quad + 2\alpha a_2 & \quad + 2\alpha a_{\mu-3} \\
 & & \quad + (\alpha^2+b^2)\alpha_0 & \quad + (\alpha^2+b^2)a_1 & \quad + (\alpha^2+b^2)a_{\mu-4}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l|l}
x^4 + a_{\mu-1} & x^3 + a_\mu & x^2 & x \\
\quad + 2\alpha a_{\mu-2} & \quad + 2\alpha a_{\mu-1} & \quad + 2\alpha a_\mu & \\
\quad + (\alpha^2+b^2)a_{\mu-3} & \quad + (\alpha^2+b^2)a_{\mu-2} & \quad + (\alpha^2+b^2)a_{\mu-1} & \quad + (\alpha^2+b^2)a_\mu.
\end{array}$$

1. — Soit $\alpha > | b |$ et $a_\mu . a_{\mu-1} > 0$ alors le nouveau polynòme présentera un nombre de variations moindre ou, au plus, égal à celui du polynôme donné.

Démonstration. — Exprimons par

$a_0, a_1 \ldots, a_\rho$ le premier groupe des termes positifs.
$a_{\rho+1}, a_{\rho+2} \ldots, a_\tau$ le deuxième groupe des termes négatifs.
$a_{\tau+1}, a_{\tau+2} \ldots a_\sigma$ le troisième groupe des termes positifs.
e. c. t.

Nous observons que, aux $\rho+1$ premiers termes positifs du multiplicande correspondent $\rho+1$ premiers termes positifs du produit.

Du a_ρ jusqu'à a_τ il se présente une variation au multiplicande; je dis qu'il se présentera une, au plus, dans les termes correspondants du produit; parce que dans la série

$$a_{\rho+1} + 2\alpha a_\rho + (\alpha^2+b^2)a_{\rho-1},\ a_{\rho+2} + 2\alpha . a_{\rho+1} + (\alpha^2+b^2)a_\rho,$$
$$a_{\rho+3} + 2\alpha a_{\rho+2} + (\alpha^2+b^2)a_{\rho+1} \ldots,\ a_\tau + 2\alpha . a_{\tau-1} + (\alpha^2+b^2)a_{\tau-2}$$

tous les termes à partir du troisième jusqu'au dernier sont négatifs parce qu'ils se composent de termes négatifs. Les coefficients qui se composent de négatifs et positifs sont le premier et le second coefficient de la série précédente.

Or, quand le premier est négatif, nous avons

$$| a_{\rho+1} | > 2.\alpha.a_\rho$$

d'où aussi

$$2 \cdot \alpha \cdot |a_{\rho+1}| > (\alpha^2 + b^2) a_\rho,$$

parce que

$$\alpha > |b|;$$

par conséquent

$$|a_{\rho-2} + 2\alpha a_{\rho+1}| > (\alpha^2 + b^2) \cdot a_\rho,$$

c'est-à-dire que le second est aussi négatif; quand, au contraire, le premier est positif, alors quel que soit le second nous aurons une variation. Nous voyons de même que, comme les termes du multiplicande $a_\tau, a_{\tau+1}, \ldots, a_\sigma$ présentent une variation, les termes correspondants du produit présentent aussi, au plus, une variation, etc. L'on déduit ainsi la règle suivante : Du premier terme du produit jusqu'à celui qui précède l'avant-dernier, nous avons, au plus, autant de variations que le multiplicande.

Il reste encore à examiner dans le produit les trois derniers termes, c'est-à-dire

$$a_\mu + 2\alpha a_{\mu-1} + (\alpha^2 + b^2) a_{\mu-2},\ 2\alpha a_\mu + (\alpha^2 + b^2) \alpha_{\mu-1},\ (\alpha^2 + b^2) a_\mu.$$

D'après ce que nous avons démontré, le produit présente, jusqu'au terme dont le rang est $\mu + 1$ autant de variations que le multiplicande, ou moins. Or, si d'abord il en présente autant que le multiplicande, le terme qui a le rang $\mu + 1$ aura le même signe avec celui qui a le rang $\mu + 1$ du multiplicande, autrement le produit présentera, jusque-là, au moins une variation de moins, parce qu'il ne peut en présenter davantage, c'est-à-dire le coefficient $a_\mu + 2\alpha . a_{\mu-1} + (\alpha + b^2) a_{\mu-2}$ aura le même signe avec a_μ par conséquent aussi avec $(\alpha^2 + b^2) a_\mu$ et aussi avec $2\alpha\, a_\mu + (\alpha^2 + b^2) a_{\mu-1}$ car, nous avons supposé que

$$a_\mu a_{\mu-1} > 0,$$

donc les trois derniers termes du produit ne présentent aucune variation; si maintenant le produit présente jusqu'au terme qui a le rang $(\mu + 1)$ moins de variations que le multiplicande, alors les variations du produit seront, au plus, aussi nombreuses que celles du multiplicande, car les trois derniers coefficients du produit peuvent présenter, au plus, une variation, puisque

$$a_{\mu-1} a_\mu > 0.$$

2. — Tout polynôme entier multiplié par

$$(x+\alpha)^2+b^2$$

où

$$\alpha > | b |$$

et

$$\alpha \leqq \left| \frac{a_\mu}{a_{\mu-1}} \right|$$

peut bien perdre, mais jamais gagner des variations.

La démonstration est analogue à la précédente ; il suffit d'ajouter ici l'observation que l'avant-dernier coefficient du produit

$$2\alpha\, a_\mu + (\alpha^2+b^2)\, a_{\mu-1}$$

aura le même signe que le dernier, d'après nos conditions.

III. Recherche approximative d'une racine positive d'un polynôme avec le premier terme positif et les autres négatifs

1. — On sait qu'une équation avec une seule variation a une racine positive α et qu'un polynôme multiplié par $x - \alpha$ acquiert au moins une nouvelle variation, il s'en suit que si nous divisons le premier membre de l'équation donnée par $x - \alpha$, nous aurons un polynôme avec des termes tous de même signe.

Soit maintenant un tel polynôme :

$$a_0 x^\mu - a_1 x^{\mu-1} - a_2 x^{\mu-2} - a_3 x^{\mu-3} \ldots\ldots$$

si nous le divisons par $x - a$, nous aurons tous les coefficients du quotient positifs

$$a_0, \quad a_0\alpha - a_1 > 0, \quad a_0\alpha^2 - a_1\alpha - a_2 > 0.$$

De l'inégalité

$$a_0\alpha - a_1 > 0$$

l'on déduit que

$$\alpha > \frac{a_1}{a_0},$$

de même de l'inégalité

$$a_0\alpha^2 - a_1\alpha - a_2 > 0$$

l'on déduit que

$$\alpha^2 - \frac{a_1}{a_0}\alpha - \frac{a_2}{a_0} > 0$$

mais, pour cela, il faut que α soit un nombre plus grand que la racine positive de l'équation

$$x^2 - \frac{a_1}{a_0} . x - \frac{a_2}{a_0} = 0$$

(parce que $\alpha > 0$) d'où

$$\alpha > \frac{a_1}{2a_0} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 + \frac{a_2}{a_0}}$$

qui est plus grande que $\frac{a_1}{a_0}$.

IV. Limites de racines

On connaît les relations entre les racines et les coefficients, c'est-à-dire

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots\ldots = -a_1$$
$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \ldots\ldots = +a_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha\beta\gamma\ldots\ldots\gamma = (-1)^\mu a_\mu$$

Nous pouvons en déduire des règles pour trouver des limites des racines ; par exemple :

1. — Si dans un polynôme du degré μ avec des racines toutes réelles, nous avons

$$| a_{\mu-1} | > a_\mu$$

il y aura nécessairement une racine en valeur absolue moindre que μ.

Démonstration. — La somme des produits des racines $\mu - 1$ à $\mu - 1$ donne en valeur absolue le terme $| a_{\mu-1} |$. La valeur absolue du produit des racines est $| a_\mu |$. Des produits $\mu - 1$ à $\mu - 1$, le plus grand en valeur absolue est celui qui n'a pas la racine la plus petite ; et si nous multiplions ce produit par μ, nous aurons un nombre plus grand que $| a_{\mu-1} |$ et par conséquent que $| a_\mu |$; tandis que si le même produit est multiplié par la racine a plus petite, nous aurons le terme $| a_\mu |$.

D'où l'on voit que μ est plus grand que la plus petite racine.

2. — Dans un polynôme qui a toutes les racines positives

et

$$| a_\mu | > | a_{\mu-1} | ,$$

il y a nécessairement une racine positive plus grande que le degré du polynôme.

Démonstration. — La somme des produits des racines $\mu - 1$ à $\mu - 1$ est égale à $| a_{\mu-1} |$, tandis que le produit de μ racines est égal à

$$| a_\mu |$$

Des produits $\mu - 1$ à $\mu - 1$ le moindre sera celui qui n'a pas la plus grande racine. Donc ce produit, multiplié par μ, nous donnera un nombre plus petit que $a_{\mu-1}$ et par conséquent plus petit que a_μ.

D'où il suit que le nombre μ est plus petit que la plus grande racine.

P. Zervos (Athènes).

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

Semestre d'hiver 1903-1904.

PREMIÈRE PARTIE (1)

ALLEMAGNE

Berlin. (*Universität*). — SCHWARZ : Analyt. Geom., 4 ; Kegelschn., 2 ; Th. d. analyt. Funkt., 4 ; Colloq., 2 ; Sem., 3. — KNOBLAUCH : Diff. rechn., 4 ; Ueb., 1 ; Th. d. ellipt. Funktionen, 4. — LEHMANN-FILHÈS : Integralrechn., 4.—Hansens Methode d. Berechnung allg. Störungen, 1. — LANDAU : Th. d. Determinanten, 4 ; Funktionenth., 4 ; Transcendenz von e u. π, 1. — SCHUR : Th. d. algebr. Gleich., 4 ; Th. d. lin. Diff.-gleich., 4 ; FROBENIUS : Zahlenth., 4 ; Sem., 3. — SCHOTTKY : Th. d. Abelschen Funktionen, 3 ; Potentialth., 3 ; Sem., 3. — MARCUSE : Allg. Himmelsk., 1 1/2 ; Fehler bei Sinneswahrnehmungen bei Präzisionsmessungen, 1 ; Ortsbest., 1 ; Sem., 1 1/2. — FOERSTER : Th. d. Raummessung, 2 ; Geschichte d. arab. u. mittelalterl. Astronomie ; Gesch. u. Th. des Fernrohres, 1 ; Sem. f. wissensch. Rechnen.— BAUSCHINGER : Mechanik des Himmels, 3 ; Chronologie, 1 ; Einrichtung u. Gebrauch d. Planetentafeln ; Sem. f. wissensch. Rechnen. — HELMERT : Figur u. Schwerkraft d. Erde, 1 ; Methode d. kl. Quadrate, 1. — BATTERMANN : Ausgleichungsrech., 1 1/2. — PLANK : Allg. Mechanik, 4 ; Uebgn. in d. analyt. Mechanik. — WEINSTEIN : Thermodynamik, 3 ; Physik d. Erde, 1.

Breslau. (*Universität*, 15 Okt. ; 15 März). — ROSANNES : Algebr. Gleichungen, 4 ; Elem. der Funktionth., 2 ; Ueb. des math.-phys. Sem., 1. — STURM : Diff. rechnung u. Elem. der Integralrechn., 4 ; Th. der geom. Verw., II, 3 ; Uebgn. des math.-phys. Sem. — FRANZ :

(1) Cette première Partie contient la liste, aussi complète que possible, des cours de Mathématiques supérieures qui se donneront l'hiver prochain dans les Universités et Ecoles supérieures d'*Allemagne*, des *Iles-Britanniques* et de la *Suisse*. Nous publierons en novembre les extraits des autres programmes qui nous parviendront avant le 15 octobre.

LA RÉDACTION.

Astronomisches Rechen-Praktikum, 2 ; Mechanik des Himmels, Natur u. Bahn d. Mondes, 2 ; Schilderung d. Weltgebäudes f. alle Fakultäten, 1. — NEUMANN : Einf. i. d. mechan. Wärmeth., 4 ; Ausgew. Kapitel der Potentialth., 2 ; Sem., 2. — LONDON : Analyt. Mechanik., 4 ; Uebgn., 1.

Erlangen. (*Universität*, 15 Okt. ; 15 März). — GORDAN : Diff. u. Integralrechn., 4 ; Algebra, 4 ; Sem., 3. — NOETHER : Analyt. Geometrie, I, 4 ; Analyt. Mechanik, 4 ; Math. Uebgn. — WEHNELT : Einf. i. d. math. Behandlung d. Physik u. Chemie, 1 ; Math.-phys. Uebgn. mit Prof. Schmidt, 2.

Freiburg i. B. (*Universität*).— LÜROTH : Analyt. Geom. d. Ebene u. Diff. rechn., 5 ; Analyt. Geom. d. Raumes, 3 ; Sem., 1. — STICKELBERGER : Th. d. Diff. gleichn., 4 ; Zahlenth., 3. — LŒWY : Alg. Analysis, 4 ; Ausgew. Fragen d. Algebra, 2 ; Sem. — KŒNIGSBERGER : Part. Diff. gleichn. u. ihre Anwendungen, 2 ; Kinetische Gastheorie, 1. — SEITH : Projektive Geom., 2.

Gœttingen. (*Universität*, Beginn. 16 Okt.). — KLEIN : Diff. u. Integralrechn., II, 4 ; Seminar (Wahrscheinlichkeitsrechn.), 2.— HILBERT : Th. der part. Diff. gleichn., 4 ; Zahlbegriff u. Quadratur des Kreises, 2; Sem. (Diff. gleichgn.), 2 ; Algebr.-arithm. Uebgn. mit Minkowski, Zermelo, Blumenthal, 1. — SCHWARZSCHILD : Allg. Astronomie, 3 ; Astronom. Colloquium, 2. — MINKOWSKI : Mechanik, I. 4 ; Geom. d. Zahlen, 2 ; Algebr.-arithm. Uebgn., 1 ; Uebgn. in Diff. gleichgn. (mit Hilbert), 2. — BRENDEL : Geodäsie, 2 : Math. Statistik, 1 ; Sem. f. Versicherungswesen, 2. — SCHILLING : Darst. u. projektive Geometrie, 2; Uebgn., 4 ; Kinematik, 1. — AMBRONN : Th. der Finsternisse u. Bestimmung astron. Konstanten, 3 ; Uebgn. (Sternwarte) täglich ; Ausg. Kapitel aus d. Geschichte der Astronomie, 1.— ZERMELO : Variationsrechnung, 3 ; Determinanten, 1 ; Ueb. z. Diff. u. Integralrechn., 1 ; Algebr.-arithm. Uebgn., 1.—ABRAHAM : Thermodynamik, 2 ; Thermodyn. Uebgn., 1. — BLUMENTHAL : Automorph. Funktionen, 2 ; Uebgn., 1. — BOSE : Einf. in die math. Behandlung der Naturw., 3.

Greifswald. (*Universität*). — THOMÉ : Analyt. Geom., 4 ; Th. der hypergeom. Funktionen, 1 ; Sem., 1. — STUDY : Infinitesimalrechnung, II, 1 ; Uebgn. 1 ; Geom. in complexen Gebiete, 2 ; Sem. — KOWALEWSKI : Funktionenth., II (Ellipt. Funktionen), 4, Uebg., 1 ; Th. der Kettenbrüche, 1. — EBERT : Bahnbest. d. Cometen u. Planeten, 1 ; Sphär. Astron , 1 ; Astr. Rechenübgn. m. bes. Berücksichtigung der num. Auflös. v. Diff. gleichgn. durch. mech. Quadratur, 1 ; Anleit. zu geogr. Ortsbestimmungen, 1.

Heidelberg. (*Universität*). — KŒNIGSBERGER : Analyt. Mechanik, 4 ; Ellipt. Funkt., 2 ; Ausgew. Kap. d. Integralrechn., 2 ; Math. Unter u. Obersem., 2. — CANTOR : Diff. u. Integralrechn., 4 ; Uebgn.; Polit.

Arithm., 2. — Eisenlohr : Diff. u. Integralrechn., 5 ; Ueber das Potential, 2. — Boehm : Mechanik der Continua (Elastizität u. Hydrodynamik), 3. — Kœhler : Analyt. Geom. Raumes, 3. — Landsberg : Darst. Geom. mit Uebgn., 4 ; Th. der kr. Flächen u. Linien, 4. — Valentiner : Th. d. Störungen, 2 ; Grundlehren d. Astron. in geschichtlicher Entwicklung, 2. — Wolf : Elem. der Astron. (Math. Geogr.), 2.

Iena. (*Universität*, 19 Okt. ; 19 März). — Gutzmer : Integralrechn., 4 ; Sem. dazu., 1 ; Determinanten u. Algebra, 4. — Thomae : Analyt. Geom. d. Raumes, 4 ; Elem. Funktionenth., 4 ; Sem., 1. — Frege : Part. Diff. gleichgn., 4 ; Begriffsschrift, 1. — Auerbach : Mechanik, 4. — Rau : Techn. Mechanik (Dynamik), 4. — Knopf : Wahrscheinlichk. rechn. u. Methode d. kl. Quadrate, 3 ; Best. d. scheinb. Laufs der Planeten u. Kometen, 2.

Kiel. (*Universität*). — Pochhammer : Geom. d. Raumes, 3 ; Th. d. Diff. gleichgn. m. einer unabh. Var., 3 ; Math. Sem., 1. — Stæckel : Integralrechn., 3 ; Ellipt. Funkt., 4 ; Sem. (ell. Funkt.), 1. — Kobold : Meth. d. kl. Quadrate m. bes. Berücksichtigung geodät. Messungen, 2 ; Geodät. Uebgn. — Weinnoldt : Ausg. Kap. d. techn. Mechanik. — Grossmann : Einf. in d. Chronologie ; Uebgn. zur geogr. Ortsbest., 1.

Leipzig. (*Universität*, 15 Okt. ; 13 März). — Neumann : Analyt. Mechanik, 4 ; Sem., 2. — Bruns : Allg. Astronomie u. Astrophysik, 4 ; Sem. f. wissensch. Rechnen, 2 ; Prakt. Uebgn. (Sternwarte) mit Prof. Peter. — Ad. Mayer : Dyn. Diff. gleichgn., 4 ; Ueb., 1. — Hölder : Diff. u. Integralrechn., 5 ; Ausg. Kap. aus d. Th. der ell. Modulfunkt., 2 ; Sem., 1. — Engel : Anal. Geom. d. Raumes, 2 ; Funkionth., 4 ; Transf. gruppen u. Diff. gleichgn., 2 ; Sem., 1. — Hausdorff : Einf. in die Algebra u. Determinantenth., 2 ; Zeit u. Raum., 2. — Liebmann : Zahlenth., 2 ; Darst. Geom., 2 ; Ueb., 1.

Marburg. (*Universität*). — Hensel : Integralrechn., 5 ; Th. d. Diff. gleichgn. mit Einschluss d. lin. Diff. gleichgn., 4 ; Sem., 2. — V. Dalwick : Allg. Th. der Flächen u. Raum. Kurven, 4 ; Kinematik, 1. — Jung : Alg. Analysis, 4 ; Variationsrechn., 4 ; Ueb. z. Diff. u. Integralrechn., 2.

Münster i. W. (*Universität*). — Killing : Potentialtheorie, 4 ; Diff. u. Integralrechn., II, 3 ; Uebgn., 1 ; Nicht eukl. Geom., 2 ; Math. Obersem., 2. — Von Lilienthal : Analyt. Geom., II, 4 ; Krümmungsth. d. Kurven u. Flächen, 4 ; Polit. Arithm., 2 ; Sem., 1. — Dehn : Elem. Algebra, 2 ; Irrationalzahl u. Quadratur d. Kreises, 2. — Plassmann : Ueber die Fixsterne, 2 ; Astron. Uebgn.

Strassburg. (*Universität*, 19 Okt. ; 19 März). — Reye : Analyt. Geom. d. Raumes (Neuere Methoden), 3 ; Math. Theorie der Elastizität fester Körper, 2 ; Sem., 2. — Becker : Bahnbest. d. Planeten, Kometen u.

Meteore, 3; Elem. d. höh. Geodäsie, 1; Sem.; Astr. Beobachtung a. d. Instrum. der Sternwarte.— WEBER : Diff. u. Integralrechn., 4; Th. d. ellipt. Funkt., 4; Math. Obersem., 2. — ROTH : Alg. Analysis u. Determinanten, 3; Analyt. Geom. d. Raumes, 2; Gewöhnl. Diff. gleichgn. — WISLICENUS : Abriss d. neuern Geschichte d. Astronomie, 1; Anweisung zu den einfachsten kalendarischen Rechnungen, 1; Die Beschaffenheit unserer Nachbarwelten in gemeinverständlicher Darst. 1; Besprechung d. neuestern liter. Erscheinungen auf. astron. Gebiete. — DISTELI : Analyt. Geom. d. Ebene, 3; Graph. Statik, 2; Ueb., 2; Ueb. des math. Sem. (untere Abtg.), 2. — EPSTEIN : Differentialgeometrie (Th. de Raumkurven u. Flächen), 3.

Stuttgart. (*Kgl. Techn. Hochschule,* Beginn 12 Okt.). — Mathem. u. Mechanik. — BRETSCHNEIDER : Niedere Math. — HOHENNER : Trigonom.; Katastermessungen; Markscheidekunst. — HOHENNER U. HEER : Plan-u. Geländezeichnen. — ROTH : Niedere Analysis. Schattenkonstr. u. Beleuchtungskunde. — REUSCHLE : Kurvendiskussion; Analyt. Geom. d. Ebene u. d. Raumes; Neuere analyt. Geom. d. Ebene u. d. Raumes; Diff.-u. Integralrechn., Sem.—WÖLFFING : Funktionenth., I; Diff. u. Integralrechn. — MEHMKE : Darst. Geom.; Reine Mechanik; Sem. — HAMMER : Prakt. Geom.; Ausgleichungsrechn.; Höh. Geodäsie; Barom. Höhenmessen, Astron. Zeit. u. direkte geogr. Orstsbest.— AUTENRIETH : Techn. Mechanik.

Tübingen. (*Universität,* 16 Okt.; 14 März).— V. BRILL : Einf. in die höh. Mathematik, 4; Th. d. Alg. Kurven, 3; Sem., 2. — STAHL : Höh. Analysis, II, 4; Part. Diff. gleichgn., 3; Sem., 2. — MAURER : Ellipt. Funkt., 2; Ueb., 1; Darst. Geom., II, 1; Ueb., 2; Sphär. Trigonom., 1; Ueb., 1.

Würzburg. (*Universität*). — PRYM : Diff. gleichgn. m. Einl. i. d. höh. Analysis, 5; im Unterseminar; Uebgn. z. Diff.-rechn., 2; im Obersem; Ausgew. Kap. d. höh. Mathem., 2. — SELLING : Integration d. gewöhnl. Diff. gleichgn., 4; Mechanik, 4; Th. d. Planetenbewegungen, 3; Bescheibende Astronomie, 1. — ROST : Analyt. Geom. d. Raumes, 4; Einf. in die Analyt. Geom. d. Ebene, 4; Im Untersem.; Ueb. aus. d. analyt. u. synth. Geom., 2; Elem. d. Determinantenth., 2. — (Weitere Vorlesungen ü. Math. werden später noch. besonders angekündigt).

ILES-BRITANNIQUES

Aberdeen. *University.* Mathematics Professor; G. PIRIE, Lecturer. GOODWILLIE. There will be three mathematical classes : the Graduation Class; the Intermed. Honours Class; the Honours Class.

Aberyswyth. *University College of Wales* (15 th. sept. 1903-21 st June 1904). — Lectures in Mathematics pure and applied. Professor :

R.-W. GENESE ; Lecturer : W.-J. JOHNSTON ; Assistant Lecturer : J. I. WALLEY.

Pure Math. Matriculation Class (5 hours a week). — Intermediate Course (4 h. a week). — Ordinary Course : Algebra, Trigonometry, Geometrie, Coordinate Geometry, Diff. and Integral Calculus (4 h. a. week). — Special Course : Algebra, Spherical Trigonometry, Geometry, Coordinate Geometry, Diff. Calculus, Integral Calculus, Elementary Differential Equations ; a course of not less than 80 lectures.

Applied. Math. Matriculation Class (2 h.). — Intermediate Course (2 h.). — Ordinary Course : Kinematics, Kinetics, Statics, Hydrostatics, Astronomy ; a course of not less than 80 lectures. — Special course : Particle Dynamics, Analytical Statics, Dynamics, Hydrostatics ; 80 lectures.

Math. pure and applied. Honours Course.

Exercices Classes.

Bangor. *University College of North Wales* (Oct. 1 st 1903-June 28 th 1904).—Professor : G. H. BRYAN ; Assistant Lecturer : HAROLD HILTON.

I. *Intermediate Course* (Pure Mathematics) ; 3 h.

II. *Final Courses.* A. Pure Mathematics : Ordinary (Arts) Course, Algebra et Trigonometry, Geometry, Diff. et Int. Calculus ; 3 h. — Special (Arts) Course, Algebra, Pure and Coord. Geometry, Diff. et Int. Calculus, Elementary Diff. Equations, Spherical Trigonometry, 3 h.— B. Applied Mathematics : Ordinary (Arts) course, Kinetics, Statics, Plane Astronomy, 3 h. — Special (Arts) course, Analytical Statics, Dynamics, Hydrostatics, 3 h.

III. Honours Course (Pure et Applied Mathematics).

Brecon. *University of Wales.* — *Pure Mathematics.* I. Intermediate Course. II.— Special Course : Pure et Coord. Geom. ; Diff. a. Integral Calculus ; Elem. Diff. Equations, High., Algebra, Spher., Trigonom. III. Final Course.

Applied Mathematics. Ordinary Course : Kinetics, Statics, Hydrostatics, Plane Astronomy. — Special Course : Analyt. Statics, Hydrostatics, Dynamics of Particle, Dynamics. — Final Course.

Bristol. *University College* (6 Oct. 1903-20 June 1904). Mathematics. Professor : R. BARRELL ; Lecturer : L. WATKIN.

Matriculation Course, 3 h. — Elementary Course for first Year Engineering Students, 3 h. — Intermediate Course, 3 h. — Calculus for Engineering Students, 3 h.— Advanced Course, 4 h.— Special advanced Course, 2 h. : Rigid Dynamics, High. Calculus, Differential Equations or other branches of High. Mathematics. — Special Course for Woman, 2. — Exercise Classes.

Mixed Mathematics Mathematical Course : Statics, Dynamics and Hydrodynamics. — Advanced Course : Analytical Statics, Dynamics, Hydrodynamics, Astronomy.

Belfast. *Queen's College* (Oct. 20, 1903-June 11, 1904). — Lectures in Pure Mathematics, three Years; Professor : Alf. Cardew-Dixon. — Civil Engineering (3 years); Prof. Maurice F. Fitz Gerald.

Birmingham. *University* (Oct. 5 1903; June 30, 1904). — Professor : R. S. Heath; Lecturer : C. T. Preece.

Pure Mathematics. Preliminary Course, 4 h. — University Courses : I (4 h.), Algebra, Trigonometry, Geometry; II (4 h., Algebra, Trigonometry, Geometry, Diff. Calculus, Int. Calc.; III (4 h.), Anal. Geometry, Diff. Calc., Int. Calc., Diff. Equations.

Applied Mathematics. University Courses : I (4 h.), Statics, Dynamics, Hydrostatics; II (4 h.), Statics, Dynamics of a Particle, Rigid Dynamics, Hydrostatics.

Higher Mathematics. Classes will le arranged in more advanced mathematics, if sufficient demand for such instruction is forthcoming.

Cambridge. *University*. — Lectures proposed by the Special Board for Mathematics; in three terms: I, the Michaelmas Term begin oct. 15: II, the Lent Term, January 18; III, the Easter Term, April 25.

Forsyth : Partial Diff. Equations (I et II, 3 h.); Calculus of Variations (I), 2. — Darwin : Theory of Potential and Attractions (I), 3 : Figure of the Earth and Precession (II), 3. — R. S. Ball : Planetary Theory (1), 3; Application of Geometry to Dynamics (II), 3. — Larmor : Electrodynamics (I et II), 3; Elementary Mathematical Physics (II), 3; The theory of Gases and Molecular Statistics of Energy (III), 3. — Hinks (for Prof. Darwin on and Prof. sir R. S. Ball) : Demonstrations in Practical Astronomy (I et II), 2; Observatory, Prac. Work. (I et II). — Thomson : Properties of Matter (I), 2; Electromagnetic Waves (I), 2; Electricity and Magnetism (II et III), 2; Discharge of Electricity through Gases (II), 2. — A. B. Peace : Heat et Heat Engines (I), 3. — Hobson : Spher. et Cylindrical Harmonies (I), 3; Sound and vibrations (II), 3. — Richmond : Analytical Geom. of Curves (I), 3; Analyt. Geom. of 3 dimensions, proj. properties (II), 3. — Baker : Elem. Theory of Funktions (I et II), 3; Theory of Groups (III). 3; Solid Geometry (for Part. I), I, 3; Analysis (for Part. II et III), 3. — Macdonald : Waves (especially waves of Light (I), 3; Hydrodynamics. — Mollison : Th. of Potential a. Electrostatics (III), 3. — Herman : Hydromechanics (for Part. I), II, 3; (for Part. II), II, 3. — Mathews : Alg. Functions (Elem.), I; Th. of Alg. Numbers (II et III), 3. — Whitehead : Appl. of Symbolic Logic to Cantor's theory of Aggregate (I et III); Non-Euclidean Geometry (III). — Berry : Ellipt. Functions (I et II), 3. — Bennett : Linear a. Quadratic Complexes (II), 3. — Mundro : Hydrodynamics et Sound (for Part. I), I, 3. — Whittaker : The Diff. Equations of Applied Mathematics (I), 2; General Dynamics (II). — Grace : Invariants and Geometrical Applications.

Dundee, *University College, University of St Andrews.* — Professor : Steggall ; Assistant Lecturer : Norrie. — *Pure Mathematics.* Junior Class. Ordinary Class. Junior Hon. Class. ; Senior Hon. Class. — *Applied Mathematics.* General Class. Advanced Class.

Durham. *University.* — Honour Mathematical Lectures, in 3 terms (I, II and III). Professor Sampson : *First Year*, I Algebra, 3 ; II Trigonometry, 3 : III Analyt. Conic Sections, 3. *Second Year*, I Calculus, 3 ; II Dynamics, 3 ; III Solid Geometry, 3. *Third Year*, I Calculus, 2 ; II Dynamics, 2 ; III Solid Geometry, 2. *Second and Third Years*, I Optics, 2 ; II Astronomy, 2 ; III Revision, 2.

Lecturer Heawod. *First Year*, I Geometry, 3 ; II Dynamics, 3 ; III Newton. *Second and Third Years*, I Hydrostatics, 2 ; Statics, 1 ; II Examples of Integral Calculus, 2 ; Statics, 1 ; III Differential Equations ; Papers, 1.

Edinburgh. *University.* — Prof. Chrystal : Sen. Mathematics. — Prof. Chrystal et Chas. Tweedie : Mathem., Intermediate Hon. ; Advanced Honours, 3. — Horsburgh : Mathem. Int. Course Honours, pratical Division. — Mac Gregor : Natural Philosophy ; Thermodynamics. — Knott : Dynamics, 3 ; Applied Mathem.

Glasgow. *University.* — Jack : Mathematics, 3 ; Math. Honours (Interm.), 3 ; in Advanced, 3. — Gray : Natural Philosophy ; Higher Mathem. A. B. ; Becker : Astronomy.

Liverpool. *University.* — Mathematics. Professor : F. S. Carey : Assistant Lecturer : Sharpe et Hudson.

Pure Mathematics. Preliminary Course, 3. — Int. Course, 3. — Final et First Year Honours Course, Elem. of the inf. Calculus, with applications of the properties of conic sections, 3. — Final et second Year Honours Course, Diff. a. Integral Calculus, diff. equations, with analyt. plane et solid geometry, 3. — Third Year Honours Course, Diff. Equat., higher pl. et solid Geometry, definite integrale, finite differences. — Advanced Course ; th. of functions, elliptic functions.

Applied Mathematics. Interm. and First Year Honours Course, Statics, Dynamics, Hydrostatics, 3. — Final et second Year Honours Course, Analyt. Statics, Hydrostatics, dynamics of a particle et elementary rigid dynamics, 3. — Third Year Honours Course Rigid dynamics et hydrodynamics, Attractions et theory of waves, 3.

London. *University College.* — Mathematics. Professor : Hill ; Assistants : Harris, Filon.

Lower Junior Class (*Harris*), 3. — Junior Class (*Hill*), 5. — Senior Class (*Hill* and *Filon*), First Year's Course : Algebra, Plane Trigonom., Geom. Conics, 2 ; second Year's Course : Elem. proj. Geometry, Geom. Draving, Plane Coordinate Geometry, 2 ; First Year's Course : Diff. et Integr. Calc., 2 ; Second Year's Course : id. 1 ; Spherical

Trigonom. — Higher Senior Class. HILL : Th. of Functions, 1 ; Algebra of Quantics, 1. — FILON : Ellipt. Functions, 1 ; Diff. Equat., 1 ; Discontinous Functions with Applic. to Math. Physics, 1 ; Diff. Equat., 1.

Applied Math. and Mechanics. Prof. K. PEARSON ; Assistant : FILON, Kinematics, Statics, Dynamics, Hydrostatics, Astronomy.

Newcastle-upon-Tyne. *The Durham College of Science*. Mathematics. Professor : H. P. GURNEY. Assistant Prof. : JESSOP. G. W. CAUNT, W. M. DAVIDSON.

Nottingham. *University College*. — Mathematics and Physics. Professor : W. H. HEATON. Lecturers in Mathematics : TAYLOR, BARTON, SHAW, ERSKINE, MURRAY, MORLEY, NEWTON.

Pure Mathematics. Lower Junior Course, 3 ; Higher Junior Course, 3 ; Lower Interm. Course, 2 ; Interm. Course, 2 ; Lower Senior Course, 5 ; Higher Senior Course, 4. — Exercice Classes. Mathematics for Engineering Students, 5. — Mixed Mathem.

Oxford. *University*. — Lecture List for Michaelmas Term 1903. — Mathematics. — ELLIOT : Th. of Numbers, 2 ; Infinite Series and Products, 1. — TURNER : Elem. Math. Astronomy, 2 ; Practical Work (with Plummer). — ESSON : Analytic Geometry of Plane Curves, 2 ; Synth. Geometry of Plane Curves, 1. — LOVE : The Mechanics of Deformable Bodies, 2 ; Problems in Applied Mathem., 1. — HASEFOOT : Algebra, 2. — LEUDESDORF : Proj. Geometry, 3. — JOLLIFFE : Analyt. Geometry, 3. — RUSSELL : Diff. Calculus, 7. — MC NEILE : Curve Tracing, 1. — PEDDER : Problems in Pure Math., 1. — SAMPSON : Higher Solid Geom., 2. — CAMPBELL : Diff. Equations, 2.— THOMPSON : Integral Calculus, 2. — HAYES : Analyt. Statics, 3. — DIXON : Hydrostatics, 2. — GERRANS : Adv. Rigid Dynamics, 2. — KIRKBY : Attractions et Electrostatics.

Reading. *University College*.— Mathematics. Professor : A. L. BOWLEY. Assistant Lectures : H. KAPMAN. — First Year Course (A) and (B). — Second Year Course (A) and (B). — Advanced Conics.

Sheffield. *University College*. — Mathematics. Professor : A. H. LEAHY. Lecturer; H. G. DAWSON. — LEAHY : Analysis ; Elem. Dynamics, Elem. Hydrostatics ; Optics ; Astronomy. — DAWSON : Geometry ; Elem. Mechanics ; Elem. Hydrostatics. — Spherical Harmonic Analysis. — Higher Classes for Honour Degrees in Mathematics.

St-Andrews (*University of*). United College of St-Salvator and St-Leonard. — Mathematics. Professor : LANG. There are four Math. Classes : Junior Class, Tutorial Class, Ordinary Class, Honours Class (Jun. and Sen.).

Southampton. *Hartley University College*. Mathematics. Professor : HUDSON ; Assistant Lecturer : COWLISHAW.

Pure Mathematics. Lower Junior Class, 5 ; Junior Class A, 4 ; B, 5. — Interm. Class 5. — Senior Class, 5 ; Higher Algebra, Trigonom., Pure Geom., Analyt. Geom., Elem. Diff. and Int. Calculus. — Higher Senior Class.

Mixed Mathematics. Junior Class ; Introductory Mechanics and Hydrostatics, 3.— Interm. Class, 2 ; Elem. Statics and Kinetics of Particles et Rigid Bodies , Elem. Hydrostatics. — Senior Class, 2 ; Kinetics and Statics of Particles et Rigid Bodies. Stat. of Incompressible Fluids. Elem. Statics of Elastic Fluids et Solids. Optics and Astronomy.

SUISSE

Basel. (*Universität*). — H. KINKELIN : Diff. u. Int. rechn., I, 3 ; Analyt. Geom., 3 ; Diff. gleichgn., 3 ; Uebg. im math. Sem., 2. — K. VON DER MÜHLL : Analyt. Mechanik mit Uebgn., 4 ; Ueber einz. Kapitel d. Math.-phys., 4 : Math. phys. Uebgn., 2. — R. FLATT : Pädagog. Sem. math.-nat. Abtlg., 3.

Bern. (*Universität*). — GRAF : Besselsche Funkt. m. Rep., 3 ; Ellipt. Funkt. m. Rep., 3 ; Diff. gleichgn., 2 ; Diff. u. Int. rechnung, 2 ; Renten-u. Versicherungsrechn., 2. — GRAF u. HUBER : Math. Sem., 2. — GRAF u. MOSER : Math.-versicherungsw. Sem., 1. — OTT : Int. rechn., 2 ; Analyt. Geom., II, 2 ; Analyt. Mech., 2. — HUBER : Bahnbestimmung der Planeten u. Kometen, 2 ; Fourier'sche Reihen u. Integralen. Anw. auf d. Phys., 2. — BENTELI : Darst. Geom., Kurven, Strahlenflächen, reg. Polyeder, 2 ; Ueb., 2 ; Prakt. Geom., 1 ; Konstruktive Perspektive, 1 ; Rotationsflächen, 1. — MOSER : Ausgew. versicherungswl. Kap.; Elem. d. Wahrscheinlk.-rechn. u. d. Lebensversicherungsmathematik, 1. — CRELIER : Einl. in d. synth. Geom., 2 ; Chap. choisis de Géométrie, 2.

Genève. (*Université*, 15 oct. ; 22 mars). — C. CAILLER : Calcul diff. et int., 3 ; Exerc., 2 ; Mécanique rat., 3 ; Exerc., 2 ; Conférences d'Analyse sup., 2. — H. FEHR : Algèbre, 2 ; Géométrie analyt., 2 ; Exercices, 2 ; Courbes planes, 1 ; Séminaire de Géom. sup., 1. — R. GAUTIER : Astronomie générale, 2 ; Météorologie, 2. — J. LYON : Déterminants, 1. — D. MIRIMANOFF : Equations de la Phys. math., 2.

Lausanne. (*Université*). — AMSTEIN : Calcul diff. et int., 6 h. ; II, 2 h. ; Exercices, I, 2 h. ; II, 1 h. ; Elém. de Calc. diff. et intégral (cours destiné aux étudiants en sc. nat., 3 ; Théor. des fonctions, 3. — JOLY : Géométrie desc., I, 5 ; Epures, 1 ap.-m. ; Géom. analyt., 2 ; Géom. de Posit., 2 ; Courbes planes, 2.— MAYOR : Mécanique rat., 5 ; Exerc., 1 ; Phys. math., 2 ; Statique graphique, I, 2 ; II, 2 : Epures, 1 ap.-m. —

Maillard : Astronomie, 3 ; Compléments, 1 ; Méc. céleste, 1 ; Exerc. pédagog., 2. — Jaccottet : Théorie des équat. alg., 2.

Zurich. (*Ecole polytechnique, section normale des sciences mathématiques*) (du 12 oct. au 26 mars). — Première année. Hirsch : Differentialrechnung, 4 : Repetitorium, 1 ; Uebungen, 2. — Franel : Calcul différentiel, 4 ; Répétition, 1 ; Exercices, 2. — Geiser : Analytische Geometrie, 4 ; Repetitorium, 1. — W. Fiedler : Darstellende Geometrie, 4 ; Rep., 1 ; Uebgn., 4. — Lacombe : Géométrie descriptive, 4 ; Rép., 1 ; Exerc., 4.

Les 3 années suivantes. — Hurwitz : Differentialgleichungen, 4 ; Uebgn., 1 ; Invariantentheorie, 2. — Franel : Théorie des équations différentielles, 4 ; Exerc., 1. — W. Fiedler : Geometrie der Lage, 4. — Lacombe : Géométrie de position, 2. — Franel et Hurwitz : Math. Seminar, 2. — Herzog : Mechanik, 2 ; Teil, 4 : Rep., 1 ; Uebgn., 2.— Hirsch : Variationsrechnung, 3. — X.... : Vermessungskunde, 5 ; Rep., 1 ; Uebgn., 2 ; Erdmessung mit Rep., 2 ; Geod. Praktikum, 2.— Wolfer : Einl. in die Astronomie, 3 ; Uebgn., 2 ; Planeten-und Kometenbahn-Bestimmungen, 2. — Stadler : Theor. Pädagogik mit Einschuss der Sozialpädagogik, 2 ; Bacon u. die Begründung der modernen Naturw.

Cours libres. — Beyel : Geom. Einl. i. d. graph. Statik, 2 ; Rechenschieber m. Uebgn., 1 ; Darst. Geometrie, 2 ; Flächen 2. Gr., 2. — J. Keller : Th. d. Zentralprojektion m. Anw. auf d. pratische Perspektive, 2 ; Th. d. Projectivität, 2 ; Collineation u. Affinität, 2. — Kraft : Geschichte der Mechanik, 2. — Rebstein : Kartenprojektion, 1 ; Versicherungsmathematik, 1 ; Ausgew. Kap. aus d. höh. Geodesie u. Ausgleichungsrechnung, 1.

Zurich. (*Universität*) (13 Okt ; 5 März). — Burkhardt : Elem. d. Diff. u. Integralrechnung, 4 ; Gewöhnl. Diff. gleichgn., 4 ; Math. Sem., 2. — Wolfer : Astronomie (v. plus haut, Ecole polyt.). — Weiler : Analyt. Geom. m. Uebgn., I, 3 ; Algebra m. Uebgn., 2. — Gubler : Algebr. Analysis mit Uebgn., 2 ; Zahlentheorie, 1 ; Inhalt u. Methode d. Math. Unterrichts an Mittelschulen, 2.

CHRONIQUE

Les Travaux Mathématiques au Congrès de Sciences Historiques à Rome en 1903.

Un Congrès International de Sciences Historiques s'est tenu à Rome du 2 au 9 avril 1903, sous les Auspices du Roi d'Italie, Victor Emmanuel III. L'organisation du Congrès avait été faite sous la direction du ministre de l'Instruction Publique, M. Nunzio Nasi, et du maire de Rome, M. le prince Prospero Colonna. Le Congrès comprenait huit Sections qui nommèrent comme président, M. le sénateur P. Villari et comme secrétaires, MM. G. Gorrini et J. Giorgi. La Section des Sciences, organisée par MM. les sénateurs P. Blaserna et V. Cerruti et par MM. V. Volterra, de l'Académie des Lincei, P. Giocosa et G. Loria, élut comme vice-présidents MM. de Galdeano, P. Giacosa, S. Günther, E. Lebon, G. Loria, E. Millosevich, Stieda, V. Volterra ; comme secrétaires, MM. A. Balducci, L. Carpi, V. Tonni-Bazza, G. Vacca, G. Vailati; et nomma chaque jour un président différent : furent désignés MM. P. Tannery, K. Sudhoff, R. Blanchard, S. Günther, V. Volterra, E. Lampe, Benedikt.

A plusieurs reprises, une question d'intérêt général fut agitée, celle de l'enseignement universitaire de l'Histoire des Sciences, déjà abordée au Congrès Historique tenu à Paris en 1900. De discussions auxquelles prirent part beaucoup de membres, il est résulté l'adoption du vœu suivant : « L'enseignement de l'Histoire des Sciences sera institué par la création de cours universitaires divisés en quatre séries : 1re Sciences Mathématiques et Astronomiques, 2e Sciences Physiques et Chimiques, 3e Sciences Naturelles, 4e Médecine. En outre des éléments d'Histoire des Sciences seront introduits dans les programmes de l'enseignement moyen. »

Dans la *Revue Générale des Sciences* (15 juin) de M. Louis Olivier, j'ai résumé toutes les Communications faites dans la Section des Sciences; dans *L'Enseignement Mathématique*, j'expose plus explicitement les Communications relatives à l'Histoire des Sciences Mathématiques (1).

M. Paul Tannery, directeur de la Manufacture des tabacs de Pantin, expose les points principaux d'une Note sur l'histoire des mots *analyse* et *synthèse*. Il distingue deux sens. A. Le premier est celui d'opérations, qui ne se retrouve plus actuellement en Mathématiques, mais qui

(1) C'est avec le plus vif regret que je ne résume pas les Communications de MM. M. Darvai, F. Müller et G. Vacca, parce que mes notes étaient insuffisantes pour les exposer convenablement et que mes lettres de demandes de renseignements à ces trois auteurs sont restées sans réponses.

existait dans l'Arithmétique Grecque. L'idée primitive correspondrait à la formation et à la mise en détail de groupes monétaires. La généralisation a été faite par les grammairiens, qui ont introduit la notion d'élément (primitivement lettre de l'alphabet) et ont transmis ces mots aux langues modernes. B. Dans le sens de processus logique, le mot *analyse* correspond au contraire primitivement à l'idée de défaire un nœud. Les Mathématiciens Grecs l'ont emprunté aux logiciens et lui ont opposé abusivement le mot *synthèse*. Viète a réintroduit ces deux mots dans la Mathématique moderne ; Descartes les a fait passer dans la langue philosophique, où la confusion existe actuellement entre les deux sens.

M. Moritz Cantor, Prof. à l'Université de Heidelberg, a donné, d'après les Ecrits eux-mêmes de J. Cardan, des détails biographiques qui n'avaient pas encore été signalés. Ces Ecrits sont intitulés : *De Vita Propria*, *De Subtilitate* et *De Varietate* : le premier a servi pour les particularités de la vie de Cardan et les deux autres pour exposer l'état de ses connaissances.

M. Vincenzio Tonni-Bazza, ingénieur à Rome, a exposé sur N. Tartaglia, de Brescia, quelques aperçus nouveaux résultant de ses recherches, dans les Archives de Venise notamment. Ces Archives contiennent l' « Inventaire » des objets que possédait ce mathématicien et qui a été dressé par le notaire Rocho de Benedictis. C'est aussi ce notaire qui a libellé le « Testament » de Tartaglia ; ce document est très intéressant, car c'est à peu près le seul qui contienne des données exactes sur sa famille et sur sa Vie. Après l'avoir lu et commenté, M. V. Tonni-Bazza a fait remarquer que les contemporains de Tartaglia laissèrent celui-ci dans une profonde indigence. Ensuite il a cherché à prouver qu'un Manuscrit de Tartaglia, intitulé *De Numeris et Mensuris* et se trouvant dans une des bibliothèques d'Oxford, est de la main même de ce savant, et il a fait ressortir la valeur scientifique de cet Ecrit. Enfin il a dit qu'il a trouvé dans les Archives d'Urbino une lettre adressée par Tartaglia à l'ingénieur militaire Castriota, et il a lu de cette Lettre quelques fragments complétant ce que l'on sait sur ce mathématicien. A la suite de son émouvante Communication sur Tartaglia et de détails sur le lieu de sa sépulture, M. V. Tonni-Bazza fut délégué par la Section des Sciences du Congrès pour la représenter à la Cérémonie que la ville de Brescia prépare en l'honneur de son illustre fils. Dans une autre Communication à propos de la Vie et des Ouvrages de B. Castelli, M. V. Tonni-Bazza a fait connaître quelques détails inédits, et surtout a relevé l'accusation de plagiaire qui a été faite à l'égard de Castelli pour son Livre intitulé *La Misura delle Acque Correnti*, fondement de l'Hydraulique. Cette accusation avait été portée à la suite de la découverte, dans une Bibliothèque de Rome, d'un Manuscrit de Léonard da Vinci, où l'on retrouve presque mot à mot quelques passages de la théorie de Castelli. M. V. Tonni-Bazza s'est efforcé de démontrer, par des argu-

ments tirés de la biographie de Castelli et de l'Histoire des Sciences, qu'il n'y avait pas eu de plagiat.

M. Giovanni Vailati, Prof. à l'Institut technique de Côme, a défendu Archimède au sujet de la démonstration qu'il a donnée du principe du levier, dans son Ouvrage *Sur l'équilibre des figures planes*. Il lui semble que les critiques faites par M. E. Mach, de l'Université de Vienne, et tendant à qualifier cette démonstration de pétition de principe, ne sont pas fondées et qu'elles résultent d'un examen insuffisamment approfondi des axiomes et des définitions qui en constituent le point de départ. Elle est fondée sur des propositions fondamentales relatives aux propriétés élémentaires des centres de gravité des corps rigides ; son caractère logique, qui résulte de l'analyse de ces propositions, paraît présenter à M. G. Vailati une remarquable affinité avec celui qu'on attribue au procédé employé par Cauchy pour déduire le principe de la composition des forces d'une équation fonctionnelle et de quelques axiomes, justifiés par des raisons de symétrie.

M. Giulio Pittarelli, Prof. à l'Université de Rome, a parlé de Pietro Della Francesca da Borgho San Sepolcro, peintre du XV^e^ siècle, dont M. Wintinberg vient de publier à Strasbourg le Traité *De Perspettiva Pingendi*. Après avoir montré l'importance de Della Francesca comme peintre, il le signale comme étant le premier auteur d'un exposé rationnel de la perspective.

M. Gustavo Uzielli, à Florence, a montré, dans un Mémoire très original, que la longueur des diverses parties du corps de Jésus-Christ a servi de base aux mesures en Italie pendant le Moyen Age. Ce Mémoire est le résumé de la Brochure que M. G. Uzielli a publiée sous le titre : *Misure lineari Medioevali e l'effigie di* Christo (Firenze, 1899).

M. Em. Lampe, Prof. à l'École polytechnique de Berlin, a donné d'intéressants détails sur le passé et l'avenir du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. Cette publication, fondée en 1871 par Ohrtmann, mort en 1885, et par M. Félix Müller, a pour but d'analyser toutes les publications en Mathématiques pures et appliquées. Les analyses réunies dans un même Volume comprennent toujours les Ouvrages et Mémoires d'une année et sont rangées selon les sujets. Il existe 31 Volumes (1868-1900) ; le 32^e^, qui est sous presse, rendra compte des Écrits parus en 1901. Le lecteur trouve sur quelques pages les travaux qui ont trait à un même sujet et prend vite connaissance de l'état des recherches sur une question déterminée. Il y a un grand nombre de collaborateurs et chacun ne rend compte que des travaux qui font l'objet de ses recherches de prédilection ; grâce à cette organisation, les analyses font toujours bien ressortir les idées principales des auteurs. M. F. Müller étant maintenant âgé de soixante-trois ans, cherche un successeur ; il espère que ses forces lui permettront d'attendre qu'un jeune savant veuille bien aussi se sacrifier à la direction d'une œuvre très utile, mais nullement rémunératrice, le nombre des abonnés étant

assez restreint et la publication n'étant dotée d'aucune subvention.

M. le Prof. Elia Millosevich, directeur de l'Observatoire du Collège Romain, a exposé l'histoire du *Canon des Eclipses*, publié par T. von Oppolzer, et montré que l'iconographie qui y est annexée présente des imperfections pour préciser immédiatement les dates historiques. Après avoir signalé le *Canon des Eclipses* établi par F. K. Ginzel, il montre l'importance de l'Atlas qui se trouve dans cette œuvre et qui donne, pour les Eclipses Solaires totales et annulaires, les régions couvertes par l'ombre dans le monde classique ancien, de l'an 900 avant J.-C. à l'an 600 après J.-C. Enfin M. E. Millosevich propose qu'une nouvelle édition de cet important Atlas, avec une Préface rédigée au point de vue historique, soit publiée par ses éditeurs, à un prix modique permettant une vente étendue. Cette proposition est votée à l'unanimité par les Membres de la section, persuadés qu'un tel Ouvrage serait très bien accueilli par les Historiens.

M. Siegmund Günther, Prof. à l'Ecole Polytechnique de Munich, a décrit le « Baculus Astronomicus » ou « Jakobstab », qui est en principe une combinaison de deux règles articulées de manière à permettre la mesure des angles ; cet instrument a été le plus souvent employé pour prendre la hauteur du Soleil à midi, afin d'en déduire la latitude géographique. Il divise en trois périodes l'histoire du Jakobstab. D'abord, les Grecs ont eu l'idée de cet instrument : le « dioptra » de Hipparque en est une première forme ; Archimède, dans son livre intitulé *Arenarius*, donne, pour trouver le diamètre apparent du Soleil, une méthode qui s'appuie sur le principe du Jakobstab. Puis, dans le XIV^e siècle, le juif espagnol Levi ben Gerson a donné à cet instrument la forme que l'Astronomie a adoptée jusqu'au XVII^e siècle. M. S. Günther fait remarquer que Breusing s'est trompé en attribuant l'invention du Jakobstab à Regiomontanus pour la seule raison que ce dernier en donne la description, car il est certain que cet astronome avait dans sa bibliothèque le livre de Levi. Enfin, à partir du XV^e siècle, les marins qui naviguaient dans l'Océan Indien appliquaient, pour mesurer la hauteur de l'étoile polaire, une certaine combinaison de cordes à nœuds fondée sur le principe de Jakobstab ; de plus, le Manuel Nautique publié par l'amiral Abu Saïd, sous le règne de Soliman le Grand, contient la description d'un semblable procédé de mesure. M. S. Günther conclut en disant que la Science n'est pas encore arrivée à établir de liaison entre ces trois phases de l'histoire du Jakobstab.

M. Ernest Lebon, Prof. agrégé au Lycée Charlemagne à Paris, Lauréat de l'Institut, a exposé un « Plan d'une Bibliographie Analytique des Ecrits contemporains sur l'Histoire de l'Astronomie ». Ce « Plan » a été signalé par plusieurs Journaux et Revues (1) : les uns

(1) Notamment par : *Il Giornale d'Italia* (Rome, 5 et 6 avril, 19 mai) ; *La Perseveranza* (Milan, 22 avril) ; L'*Education Nationale* (Athènes, 28 avril) ; *Bulletin de la Société Astronomique de France* (Paris, mai) ; Le *Journal du Dimanche* (Paris, 10 mai) ;

l'ont résumé, d'autres en ont publié des extraits. De plus, à l'Académie des Sciences de Paris, dans la séance du 11 mai, ce « Plan » a été signalé par le Secrétaire Perpétuel, M. Gaston Darboux, et a été présenté par l'un de ses membres, M. Paul Appell [1].

M. R. Almagià, à Rome, a exposé les observations de marées dues à Eratosthène, Posidonius et Seleucos, aux Anglo-Saxons et aux Arabes, en faisant remarquer qu'elles ont un assez grand degré d'exactitude. Ensuite, il a rapporté les principales hypothèses pour expliquer ce phénomène au point de vue de la relation entre les mouvements de la mer et les phases de la Lune. Enfin, il a montré que les contradictions entre ces hypothèses proviennent de ce que l'on ne connaissait pas l'universalité du phénomène des marées et surtout de ce que l'on ne mesurait pas leurs hauteurs ; ce n'est qu'à partir de l'époque où Léonard da Vinci eut, le premier, indiqué la nécessité d'une telle mesure que la vraie explication du phénomène fut donnée par les astronomes.

M. Baratta, à Voghera, a fait remarquer que la fréquence des tremblements de terre en Italie a certainement contribué à développer dans ce pays les études sismologiques. Mais, si les recherches de caractère général sont anciennes, il n'en est pas de même de la construction d'appareils destinés à l'étude des commotions terrestres. M. M. Baratta n'a parlé que des appareils et il les divise en deux groupes : les sismomètres à pendule et les sismoscopes à mercure. Pour le premier groupe, il a cité les observations de N. Cirilo en 1731, de A. Bina en 1751, de M. Augusti en 1779 ; il a parlé longuement de l'appareil que D. Salsano construisit en 1783 et de l'instrument le plus perfectionné, le pendule établi en 1795 par le duc de la Tour. C'est de Hautefeuille qui proposa, en 1703, la construction de sismoscopes à mercure, mais ce ne fut guère qu'un siècle plus tard que A. Cavalli en construisit un. M. M. Baratta a donné l'histoire, peu connue, de A. Cavalli, auteur des *Lettere Meteorologiche Romane*, et ajouté que le sismoscope de ce dernier fut, après avoir reçu de successifs perfectionnements, introduit dans les Observatoires d'Italie. Enfin, il a décrit le bifilaire dynamique proposé en 1838 par C. Keil, de Milan, en 1842 par Colla, de Parme et en 1887 par Moureaux, de Paris.

M. le Prof. Attilio Mori, topographe de l'Institut Géographique Militaire à Florence, a fait hommage à la Section des Sciences, au nom de cet Institut, de son intéressant Mémoire intitulé *Cenni storici sui lavori Geodetici e Topografici e sulle principali produzioni Cartografiche eseguite in Italia dalla metà del secolo XVIII ai nostri giorni* (con

---

La Nature (Paris, 16 mai) ; *Bulletin des Sciences Mathematiques et Physiques elementaires* (Paris, 1er juin) ; *Nature* (London, 18 juin) ; *Bulletin Astronomique de l'Observatoire de Paris* (juillet 1903) ; *Revue Scientifique* (Paris, 4 juillet) ; *Memorie della Societa degli Spettroscopisti Italiani* (Catania, Vol. XXXII).

[1] Les paroles de M. Paul Appell ont ete résumées dans *Le Temps* (Paris, 13 mai) et dans le *Journal Officiel* (Paris, 20 mai).

12 ritratti, Firenze, 1903). La célèbre opération de la mesure de l'arc du méridien dans les Etats Pontificaux, exécutée de 1750 à 1753, sous la direction de Boscovich et Maire fut le commencement de la Cartographie scientifique en Italie. Ce travail fut suivi par les opérations de Beccaria en Piémont, des Astronomes de Bréra en Lombardie, de Rizzi-Zannoni dans le Royaume de Naples, des ingénieurs géographes français dans l'Italie Septentrionale et Centrale, du baron de Zach dans plusieurs parties de la Péninsule. Une seconde période comprend les grandes entreprises de l'Institut Géographique Militaire de Milan, qui fut transféré à Vienne, de l'Office Royal Topographique de Naples, de l'Etat-Major Piémontais, surtout sous la direction des célèbres G. Inghirami pour la Toscane et A. La Marmora pour la Sardaigne. La dernière période comprend l'œuvre de l'Institut Géographique Militaire et de la Commission Royale Géodésique, entreprise aussitôt après l'unification du Royaume d'Italie et continuée avec ardeur jusqu'à présent. M. A. Mori aussi a demandé qu'il fût entrepris une Bibliographie Géodésique Italienne. Enfin il a signalé la grande importance pour l'Astronomie des Manuscrits Scientifiques de L. Ximénès, qui fut l'homme le plus savant de son époque ; ces Ecrits sont à la Bibliothèque Nationale de Florence.

M. D. Diamilla-Muller, à Rome, a rappelé que la propriété des pôles de l'aiguille aimantée était certainement connue en Europe au XII^e siècle : on en trouve la preuve dans un Livre Chinois qui est à la Bibliothèque Nationale de Paris et dans un Manuscrit de la Bibliothèque de Leyde. Il a fait remarquer que la première indication de la variation exacte de la déclinaison a été faite par Colomb, le 13 septembre 1492. Enfin il a donné l'historique suivant de la légende qui attribue, mais faussement, à Flavio Gioa l'invention de la Boussole. L'historien Flavio Biondo a écrit en 1450 que des navigateurs d'Amalphi avaient inventé l'usage de l'aiguille magnétique pour reconnaître le Nord en mer ; quelques années plus tard, G. B. Pio écrivit : « In Campania veterì magnetis usus inventus à Flavio traditur. » Les trois derniers mots se rapportent, non à Flavio Gioa, mais à Flavio Biondo, que l'on nommait simplement Flavio à cause de sa grande célébrité. C'est surtout pour faire bannir des livres classiques une croyance erronée que M. D. Dianilla Muller a fait cette communication.

M. Umberto Pagani, Prof. à Rome, a fait connaître par quelles mains ont successivement passé cinq fragments d'un bolide qui éclata le 26 janvier 1496, au milieu de douze coups de tonnerre, au Val di Noce, à quelques lieues de Forli. Ce phénomène eut pour témoin Novacula, qui l'a raconté. Au point de vue météorologique, astrologique et religieux, il a paru à M. Pagani intéressant de rappeler et de résumer la chronique de Novacula, d'ailleurs depuis longtemps laissée dans l'oubli. M. U. Pagani termine en attribuant au même bolide les trois pierres qui sont, a-t-on écrit, tombées le 28 janvier 1496 près de Cesena et dont on a fait une célèbre croix.

Ernest Lebon (Paris),
Délégué par le Ministre de l'Instruction Publique.

CORRESPONDANCE

Une annotation à l'algèbre d'Euler.

Dans son Algèbre, Euler termine le chapitre des fractions décimales périodiques en se proposant de calculer 1 : 10 !. Pour cela, il se met à calculer 1 : 2 !, 1 : 3 !, etc., enfin à agir comme on fait quand le but est de trouver la valeur du nombre e, et en effet on n'a guère besoin de connaître 1 : 10 ! qu'en sa qualité de terme de cette suite. Mais si on voulait connaître 1 : 10 ! pour lui-même et indépendamment de e, il y aurait une façon de calculer plus rapide, plus *tachistarithmétique*. Qu'on nous permette ce néologisme exprimant une idée analogue à la *géométrographie* de M. Lemoine (qui aurait peut-être été mieux dénommée *tachistographie*).

Décomposons **10** en ses facteurs premiers

2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	.	2^2	.	2	.	2^3	.	2
	3		.	3	.		3^2	.
			5		.		.	5
					7			

Il est facile de voir que $10 ! = 100 \times 81 \times 64 \times 7$.

Or la division par 100 se fait par un déplacement de virgule ; de plus $\frac{1}{81}$ est un quotient des plus connus, de sorte qu'il ne reste à faire que les divisions par 7 et 64 ; ou bien, ce que je préfère, par 7, par 8 et encore par 8.

Tableau des opérations

Division par 100	de	1,000				
81	de	0.010	000			
7	de		123	456	790	12
8	de		17	636	684	30
8	de		2	204	585	54
Donc 1 : 10 ! =		0,000	000	275	557	19

Cet exemple montre comment il faut varier les procédés de calcul suivant qu'on poursuit un résultat isolé, ou bien un ensemble de résultats devant mener à un but donné.

Ch. Berdellé, Rioz (Haute-Saône).

Le problème du veilleur de nuit.

Quelle heure sonne-t-il ? — Qu'on en additionne
Les moitié, tiers et quart, le total donnera
En même temps la somme et de l'heure qui sonne
Et de celle qui dans une heure sonnera (1).

Ce problème se résoud à première vue par la considération que le plus grand nombre d'heures est justement le plus petit commun multiple de 2, 3 et 4.

Mais il est intéressant de résoudre ce problème enfantin par une méthode générale. Or ici les équations ordinaires ne sont pas de mise et il y a lieu de recourir à l'emploi des congruences, module 12. Au lieu de rendre cette idée par M.12 ne vaudrait-il pas mieux la rendre par $12 \equiv 0$. ?

Voici le calcul :

$$12 \equiv 0, \qquad \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} \equiv x + (x + 1)$$

$$\frac{13}{12}x \equiv 2x + 1$$

$$13x \equiv 24x + 12$$

$$x \equiv 0 \equiv 12$$

C'est-à-dire qu'il a sonné minuit et que dans une heure il sonnera une heure.

Cela prouve qu'il y a certains calculs inventés pour résoudre des questions très élevées, qui peuvent servir à en résoudre de très simples, même d'enfantines.

N'y aurait-il pas lieu de parler des congruences, dès le chapitre des équations algébriques du 1er degré ?

Ch. Berdellé, Rioz (Haute-Saône).

A propos du récent article de M. Combebiac.

Pour établir de claire façon que le postulat classique des parallèles est indémontrable, M. Combebiac (*L'Ens. math.*, 1903, p. 162) a simplement recours à l'habituel *argument de non-contradiction.*

Cet argument ou plutôt ce sophisme me paraît avoir été réfuté dans cette Revue (t. IV, 1902, p. 330-333).

C. Vidal (Paris).

---

(1) Imité de l'allemand, de Hebel (Œuvres, édition en 3 volumes, Karlsruhe, 1847, IIe vol., p. 153).

BIBLIOGRAPHIE

E. Bardey. — **Anleitung zur Auflösung eingekleideter Aufgaben.** Zweite, völlig umgearbeitete Auflage, von Fr. Pietzker. — 1 vol. in-8° cart. 160 p.; prix: Mk. 2,60. B.-G. Teubner, Leipeig, 1903

Ce livre n'est pas un simple recueil d'exercices, mais un guide méthodiqué ayant pour objet l'étude de la mise en équation des problèmes de l'Algèbre élémentaire. L'auteur examine neuf catégories de problèmes appartenant les uns aux mathématiques pures, les autres aux sciences appliquées. Chaque catégorie comprend un certain nombre de problèmes étudiés d'une manière très approfondie.

Nous devons ajouter que cette nouvelle édition diffère entièrement de la précédente. M. Pietzker ne s'est pas contenté de surveiller simplement la réimpression de l'ouvrage; il a entièrement remanié l'exposé, de manière à en faire réellement un guide utile à la fois aux maîtres et aux élèves.

Eug. Beltrami. — **Opere Matematiche**, publicate per cura della Facultà di Scienze della R. Università di Roma. Tomo primo; con Ritratto e Biographia dell' Autore. — Un vol, in-4°, XXII-437 p.; prix : L.25; Ulr. Hœpli, Milan, 1902.

La Faculté des Sciences de l'Université de Rome et les savant italiens ne sauraient élever à la mémoire d'Eugène Beltrami un monument plus digne que celui que constitue la publication des œuvres complètes de l'illustre géomètre. De même que les travaux de Brioschi, ceux de Beltrami vont être réunis en une série de beaux volumes in-4°, sortant des presses de la Tipographia Matematica de Palermo, et édités par la maison Hœpli, à Milan.

En tête de ce premier volume, figure une belle notice dans laquelle M. Cremona caractérise en quelques pages la vie et l'œuvre du grand geomètre. Puis viennent les mémoires, au nombre de 26, que publia Beltrami, de 1861 à 1868, dans les *Annali di Matematica*, le *Giornale di Matematiche*, les *Rendiconti*, les *Nouvelles Annales*, etc... Ces premiers mémoires appartiennent au domaine de la Géométrie et principalement à celui de la Géométrie infinitésimale. On y trouve, entre autres, les mémoires suivants, qui ont été le point de départ d'importants travaux entrepris par d'autres savants : *Ricerche di Analisi applicata alla Geometria; Sulla flessione delle superficie rigate; delle variabili complesse sopra una superficie qualunque; Saggio d'interpetrazione della Geometria non-euclidea; Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante.*

Nous devons nous borner à cette énumération. Les lecteurs trouveront d'ailleurs au tome II de cette Revue (année 1900, p. 173-178); une notice sur *Eugène Beltrami, sa vie et ses travaux*, par M. Frattini; elle est suivie de la liste des *publications du Professeur E. Beltrami.*

H. Fehr.

EMM. CZUBER. — **Probabilités et moyennes géométriques**, traduit de l'allemand par SCHUERMANS. — Gr. in-8°, 244 p.; prix : 8 fr. 50, Hermann, Paris, 1902.

Cet ouvrage a pour objet principal de grouper la classe nombreuse des problèmes de probabilités où les cas possibles constituent un domaine continu.

Pour la plupart d'entre eux, les données sont d'ordre géométrique, ou bien les énoncés sont susceptibles de représentation géométrique, et c'est ce caractère qui a déterminé le titre du livre.

Les questions traitées, ainsi que les méthodes employées, sont fort attrayantes et me paraissent présenter au plus haut degré le caractère de « récréations mathématiques ». Ce n'est pas un des moindres attraits de ces questions que la diversité des solutions qu'elles comportent suivant les conventions que l'on adopte pour l'évaluation de la probabilité ou plutôt pour la définition de l'égalité de probabilité.

Pour un très grand nombre de problèmes, il n'eût peut-être pas été inutile d'indiquer chaque fois les conventions admises et les conditions matérielles susceptibles de leur correspondre.

Parfois, la convention s'impose naturellement.

Ainsi, si un point est assujetti à l'unique condition de se trouver sur une ligne de longueur L, on convient, l et l' étant les longeurs de deux segments de cette ligue comptés à partir de l'une de ses extrémités, que les probabilités pour que le point se trouve d'une part entre les points l et $l + dl$, d'autre part entre les points l' et $l' + dl$ sont égales, de sorte que la probabilité pour que le point se trouve entre les points l et $l + dl$ est exprimé par le rapport $\frac{dl}{L}$.

En vertu d'une convention analogue, si un point est assujetti à se trouver à l'intérieur d'une surface d'étendue S, la probabilité pour qu'il se trouve à l'intérieur d'un élément de superficie ds est exprimée par le rapport $\frac{ds}{S}$.

Mais cette simplicité est loin de se retrouver dans tous les problèmes et les rapprochements que nous pourrions faire entre certaines solutions (notamment entre celles des problèmes VII et X) montreraient que les méthothodes appliquées supposent, sans que le lecteur en soit prévenu, des conventions divergentes dans la définition de l'égalité de probabilité.

Au point de vue de l'élégance des méthodes et des résultats, nous mentionnerons spécialement les questions relatives à la position d'une droite arbitraire par rapport à des contours fermés.

Nous signalerons encore les questions où, non seulement le nombre des cas possibles est infini, mais encore où leur domaine devient lui-même infini, tels que les problèmes qui reposent sur la probabilité de la réalité des racines d'une équation du second degré, dont les coefficients peuvent prendre toutes les valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$.

Disons en terminant que nous aurions quelques réserves à faire sur les qualités de la traduction.
G. COMBEBIAC (Limoges).

E.-A. FOUET. — **Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques.** 1re Partie (Chapitre I à V). — Un vol., grand in-8°, 330 p.; avec 359 fig.; prix : fr. 7 20. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

L'auteur des leçons élémentaires s'adresse plus particulièrement aux étudiants des Facultés des Sciences, mais son livre rendra de réels services à tous ceux qui désireront acquérir une vue d'ensemble sur l'état actuel de la théorie des fonctions analytiques.

A côté des principes bien connus de cette théorie, on y trouve des renseignements précieux sur la plupart des résultats dont s'est enrichie cette branche de l'analyse depuis Cauchy et Weiertrass.

Ce premier fascicule, seul paru, contient l'introduction et le livre I. L'introduction est partagée en deux sections. La première traite des fonctions en général. Un aperçu de la théorie des ensembles, permet à M. Fouët de préciser le sens d'un certain nombre de locutions employées dans la théorie des fonctions. C'est dans la 2e section que l'auteur introduit la notion de fonction analytique, mais auparavant il définit avec précision les notions de limite, de continuité, de convergence.

Le livre I est consacré à l'étude des méthodes générales de définition et de représentation des fonctions. Les fonctions qu'on est amené à étudier peuvent être définies de bien des manières : par une équation, une série, une intégrale, etc. Dans tous les cas les mêmes questions se posent : la fonction ainsi définie est-elle analytique ? Quelles sont ses propriétés caractéristiques ?

Le chapitre I est consacré à la théorie classique des fonctions algébriques. La considération des surfaces de Riemann aide à rendre intutives les propositions établies. Parmi les exemples donnés dans ce chapitre on remarquera les transformations linéaires.

Nous passons ensuite aux fonctions définies par des séries et des produits infinis. Les propriétés générales des séries et en particulier celles des séries entières sont exposées avec détail. Un paragraphe spécial est consacré aux séries trigonométriques, mais l'auteur se borne à un historique, fort intéressant du reste. Nous pénétrons ensuite dans le domaine à peine exploré des séries divergentes. M. Fouët dit quelques mots des recherches de MM. Poincaré, Stieltjes, Padé et Le Roy (les lecteurs désireux d'approfondir ce sujet sont renvoyés aux sources), mais il s'arrête un peu plus longuement sur la théorie de M. Borel. Le chapitre se termine par l'étude de quelques séries classiques (fonction exponentielle, circulaires, fonction eulérienne, séries hypergéométriques).

Les fonctions définies par des séries multiples et des produits infinis multiples sont étudiées dans le chapitre III. Nous trouvons à la fin du chapitre l'étude des trois fonctions de Weierstrass et des fonctions thêta.

Dans le chapitre suivant, qui est consacré aux fonctions définies par des intégrales, il y a lieu de remarquer une généralisation de la notion d'intégrale due à Riemann et la démonstration du théorème fondamental de Cauchy donné par M. Goursat, démonstration qui n'exige pas d'hypothèse relative à la continuité de la dérivée. La série de Taylor déduite de la formule de Cauchy permet d'obtenir le développement des fonctions algébriques étudiées au chapitre Ier.

Le volume se termine par la théorie du prolongement analytique, d'après Weierstrass. Une question importante est traitée à la fin du dernier chapitre : celle du développement des fonctions en une série de polynômes. Il serait difficile d'énumérer tous les sujets traités ou seulement effleurés par M. Fouët.

Certainement son livre rendra de réels services ; il inspirera au lecteur la curiosité de lire les mémoires originaux. D. Mirimanoff (Genève).

Maurice Lévy. — **Éléments de Cinématique et de Mécanique**. Conformes au Programme d'admission de l'École centrale des Arts et Manufactures. — 1 vol. XVIII-412 p. grand in-8°, prix : 10 francs. Bernard et Cie, Paris, 1902.

Le programme d'admission de l'École centrale des Arts et Manufactures, dont cette *Revue* a publié récemment les points principaux (n° de janvier 1903), accuse des tendances que l'on pourrait qualifier de réalistes.

Concrétiser les notions, faire appel, pour en préciser certaines, à d'autres ressortissant à un domaine différent, laisser de côté les subtilités au bénéfice de la clarté, employer moins de logique pure et plus d'images sensorielles, établir une correspondance sans lacune entre les faits objectifs et les propositions scientifiques, telle est la méthode.

Ses avantages nous paraissent incontestables tant au point de vue de la gymnastique intellectuelle qu'au point de vue utilitariste.

On conçoit ce que peut donner ce programme, lorsqu'il est appliqué par l'esprit lumineux et puissant, qui a présidé à son établissement.

M. Maurice Lévy s'y est strictement conformé. Ainsi qu'il nous en prévient dans l'Introduction, il a évité de donner la première place à de conventionnelles abstractions, et est allé au plus droit vers le réel.

Malgré le caractère élémentaire de l'ouvrage et l'extraordinaire simplicité des moyens employés, l'on sent que l'on est bien en présence d'une œuvre de maître, dont la lecture sera du plus grand profit, non seulement pour les candidats à l'École centrale, auxquels elle est destinée, mais aussi pour tous ceux qui s'intéressent aux méthodes de présentation des principes de la Mécanique, tant au point de vue de l'enseignement qu'à celui de la satisfaction de la raison. G. Combebiac (Limoges).

B. Riemann's Gesammelte Werke. Nachträge herausgegeben von M. Nœther und W. Wirtinger. — Un vol. in-8°, 116 p. ; prix : Mk. 6 ; B.-G. Teubner, Leipzig, 1902.

Depuis l'apparition de la deuxième édition des *Œuvres de Riemann*, on a trouvé un certain nombre de documents qui montrent que, dans ses cours, le savant géomètre avait été beaucoup plus loin que dans ses publications. Ces documents ont été réunis dans le présent volume, qui paraît sous le titre de « Supplément aux œuvres complètes ». Ils comprennent : 1) des notes relatives aux leçons sur la théorie générale des intégrales algébriques (semestre d'hiver 1861-62), avec des annotations de M. Nœther ; 2) un extrait d'une leçon sur les intégrales d'une équation différentielle linéaire du second ordre en un point multiple (hiver 1856-57) ; 3) des notes relatives aux leçons sur la série hypergéométrique (semestre d'hiver 1858-59), avec des annotations de M. Wirtinger ; 4) diverses notes mathématiques ; 5) diverses notes concernant Riemann.

M. Schuster. — **Geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie**. Planimetrie. Stereometrie. Ebene und sphärische Trigonometrie. Nach Konstruktiv-analytischer Methode bearbeitet. Ausgabe A (Für Volanstalten) zweiter Teil : *Trigonometrie*. — Un vol. cartonné, 112 p. in-8° ; prix : Mk 1,60 ; B.-G. Teubner, Leipzig, 1903..

Ce recueil d'*Exercices de Trigonométrie plane et sphérique* est appelé à

jouer un rôle utile au moment où, dans l'enseignement secondaire, on tend de plus en plus à emprunter des problèmes aux diverses branches des mathématiques pures et appliquées. On y trouve en effet non seulement des exercices et problèmes purement théoriques, mais aussi des problèmes élémentaires concernant la Topographie, la Cosmographie, l'Astronomie, la Navigation, la Physique, etc. Grâce à la variété des exercices et au soin avec lequel ils ont été classés, ce petit ouvrage peut être recommandé à tous ceux qui enseignent la Trigonométrie.

H.-G. Zeuthen. — **Histoire des mathématiques dans l'antiquité et au moyen âge**, traduite en français par Jean Mascart. Un vol. in-8° de xv-296 pages. Prix : 9 francs. Paris, Gauthier-Villars, éditeur.

Cet ouvrage, comme l'écrit M. Zeuthen dans sa préface, a pour but « de mettre principalement en relief ce qu'il importe aux étudiants et aux professeurs de savoir ».

Pour de tels lecteurs, point n'est besoin d'entrer dans de grands détails historiques, il faut plutôt connaître les aspects primordiaux sous lesquels se manifestèrent aux chercheurs les vérités et les méthodes et quelles applications en découlèrent par la suite.

La notion précise de ces origines sera donc la condition indispensable pour comprendre la lente évolution des formes qui a fini par donner, au cours des âges, leur physionomie actuelle aux mathématiques.

Après avoir signalé brièvement les connaissances mathématiques des Egyptiens et des Babyloniens, l'auteur aborde la partie principale de son sujet, l'œuvre des mathématiciens grecs. Le savant danois voit, avec juste raison, « dans la découverte et le traitement ultérieur des grandeurs irrationnelles, et la force principale et la principale faiblesse des mathématiques grecques ». Les géomètres hellènes cherchèrent à rendre toute démonstration applicable, même à ces grandeurs qui ne se peuvent qu'approximativement exprimer par des nombres. Ainsi se développèrent leurs scrupuleuses tendances à l'impeccabilité des déductions et à la précision des termes. La mathématique devint alors la *science exacte* par excellence. Mais d'aussi grandioses conceptions n'auraient point dû entraîner l'indifférence pour les essais tendant à calculer approximativement ce qui ne comporte pas pleine et entière exactitude. Archimède (mort en 212 av. J.-C.), en indiquant les *limites* entre lesquelles doivent être situées les quantités cherchées, eut beau montrer qu'on pouvait exprimer d'une manière irréprochable les résultats mêmes d'un pareil calcul, son exemple ne fut pas suivi de ses compatriotes qui, pour la plupart, considérèrent comme secondaire le calcul pratique.

Le fondement de l'Arithmétique grecque n'eut ni la largeur, ni la fermeté scientifique de la base sur laquelle Euclide établit la Géométrie et, jusque vers l'an 300 après J.-C., on négligea presque complètement la science des nombres en Grèce et à Alexandrie. Alors vint Diophante qui apporta quelque innovation dans ce domaine. Entre les modes d'exposition antérieurs et les siens, existe une différence capitale. Il s'occupe seulement de problèmes numériques spéciaux et n'utilise pour les résoudre que des opérations purement numériques sans établir jamais de théorèmes généraux. Ayant renoncé à la représentation géométrique de ses prédécesseurs, il dut recourir à un moyen nouveau pour désigner à l'esprit une quantité inconnue

de même que ses fonctions simples. Ce fut l'origine des *symboles algébriques*.

Au contraire des Grecs, les savants de l'Inde ne manifestèrent aucune aptitude pour la rigueur théorique et, pour eux, le calcul numérique et son empirisme pratique devinrent le véritable moyen de s'approprier les théorèmes et les méthodes. Au moyen âge, les Arabes développèrent puissamment l'héritage que les géomètres grecs et les arithméticiens hindous leur avaient transmis. En particulier, ils imprimèrent un vigoureux essor à la Trigonométrie et à ses applications astronomiques.

L'apparition du *Liber-Abaci* de Léonard de Pise (1202) signale le premier réveil des mathémathiques européennes que ses successeurs, l'italien Lucas Pacinoli, l'anglais Bradwardin, les français Oresme et Chuquet, les allemands Widmann, Peurbach et Regiomontanus firent honorablement progresser, en attendant que les Viète, les Napier, les Fermat, les Pascal, les Newton et les Leibniz inaugurent, par leurs géniales découvertes, l'ère de la science moderne.

Là s'arrête le livre de l'érudit professeur de Copenhague, et, comme conclusion, nous ne saurions formuler qu'un regret : c'est qu'il n'ait pas continué son histoire des mathématiques jusqu'à notre temps.

JACQUES BOYER (Paris).

SAMMLUNG GOESCHEN. Volumes p. in-12, cart., prix : 80 Pfg. le volume. G.-J. Goeschen, Leipzig.

Cette *Collection* comprend aujourd'hui plus de 150 monographies appartenant aux domaines les plus divers des connaissances humaines. Son but est de donner une introduction, à la fois simple et exacte, aux principales branches de la science. Elle s'adresse donc non seulement à ceux qui, déjà mêlés à la vie pratique, désirent compléter leurs connaissances générales dans quelques branches, mais aussi aux professeurs auxquels elle présente, sous une forme entièrement objective, un aperçu de l'état actuel des connaissances fondamentales de la plupart des branches de l'enseignement.

Les volumes qui se rattachent aux sciences mathématiques pures ou appliquées sont actuellement au nombre d'une vingtaine; ils sont dus à des hommes d'une compétence incontestable dans le domaine dont ils se sont chargé, et c'est à cela que doit être attribué le grand succès de la collection.

Les derniers volumes parus sont les suivants : *Projektive Geometrie* (2e édition), par K. DOEHLEMANN; c'est un exposé synthétique des éléments de géométrie moderne. — *Darstellende Geometrie*, par R. HAUSSNER; on y trouve la projection oblique et ses applications, et la projection orthogonale appliquée aux principaux problèmes relatifs à la droite, au plan et aux polyèdres. — *Höhere Analysis*, 2. Teil; *Integralrechnung* (2e édition); *Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung*; (id) ... *zur Integralrechnung*, les trois volumes par Fr. JUNKER; les deux derniers constituent un excellent recueil d'exercices à utiliser dans un premier enseignement du Calcul différentiel et intégral. H. F.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

Annali di Matematica pura ed applicata, dirigées par L. Bianchi, L. Cremona, U. Dini, G. Jung ; série 3. t. VIII, C. Rebeschini, Milan, 1902.

Fasc. 2-3. — Niccoletti : Sulla formola di Taylor. — Marletta : Studio geometrico della quartica gobba razionale. — Tedone : Saggio di una teoria generale delle equazioni dell'equilibro elastico per un corpo isotropo. — Boggio : Sull'integrazione di alcune equazioni lineari alle derivate parziali.

Fasc. 4.— Bottasso : Sopra le coniche bitangenti alle superficie algebriche. — Bortolotti : Sul limite del quoziente di due funzioni.— Niccoletti : Alcuni teoremi sui determinanti. — Graf : De la détermination de certaines fonctions d'après des conditions données.

Archiv der Mathematik und Physik, gegründet 1841 durch J.-A. Grünert. Dritte Reihe. Herausgegeben von E. Lampe, W. Franz Meyer, E. Jahnke. Band V. 1903 ; B.-G. Teubner, Leipzig und Berlin.

Hefte 1 und 2. — J. Weingarten : Ueber eine Aufgabe der Mechanik. — W. Schell : Synthetische Behandlung einiger Probleme über Kurven doppelter Krümmung. — R. Sturm : Ueber einen vermeintlich richtigen Satz von Gergonne und über Umformungen von Maximal-und Minimalfiguren. — A. Hurwitz : Ueber höhere Kongruenzen. — T. Levi-Civita : Sur la singularité dont sont affectées, pour une vitesse nulle, les équations du mouvement d'un point matériel frottant sur une surface. — E. Jahnke : Brief von Leverrier an Jacobi ; Brief von Liouville an Jacobi. — H. Opitz : Ueber die Auflösung der transcendenten Gleichung

$$\int_0^x e^{-x^2} dx = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda x^{2\lambda+1}}{\lambda!\,(2\lambda+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

L. Matthiessen : Von der Periodicität der Kettenbrüche, in welche sich Irrationale zweiten Grades entwickeln lassen.— E. Naetsch : Ueber ein in der Vektor-Analysis auftretendes System partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung. — T. Hayashi : On the Remainders of the Numbers of Triangle of Pascal with respect to a Prime Number. — M. d'Ocagne : Ueber einige elementare Grundgedanken der Nomographie. — O. Guntsche : Ueber den Zusammenhang einer bei der Lösung von Alhazens Aufgabe auftretenden gleichseitigen Hyperbel mit der neueren Dreiecksgeometrie. — E. Landau : Ueber den Verlauf der zahlentheoretischen Funktion $\varphi(x)$; Ueber die Maximalordnung der Permutation gegebenen Grades.— E. Möller : Ein Uebertragungsprinzip des Herrn E. Study. — K. Cwojdzinski : Distanzrelationen zwischen Punkten und Geraden der Ebene sowie Punkten und Ebenen im

Raume. — F. Emde : Der Charakter der Betriebskurven eines Gleichstrommotors mit Nebenschlusserregung. — S. Gundelfinger : Ueber eine fundamentale kubische Gleichung zu der Theoria motus corp. cel. von Gauss. — E. Lampe : Bemerkung zu der vorstehenden Note des Herrn S. Gundelfinger. — Rezensionen. — Vermischte Mitteilungen. — Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften, herausgegeben von G. Eneström, 3. Folge; 4 Band ; B.-G. Teubner, Leipzig.

Heft 1. — G. Eneström : Ueber kulturhistorische und fachmässige Behandlung der Geschichte der Mathematik. — W. Schmidt : Nivellierinstrument und Tunnelbau im Altertume. — F. Rudio : Zur Rehabilitation des Simplicius. — R. Wallner : Die Wandlungen des Indivisibilienbegriffes von Cavalieri bis Wallis. — H. Suter : Ueber einige noch nicht sichergestellte Autorennamen in den Uebersetzungen des Gerhard von Cremona. — G. Loria : Osservazioni sopra di un problema pseudo-elementare. — Pexider : Uebersicht über die Litteratur des Abelschen Theorems. — Siegm. Günther : Maximilian Curtze.— G. Eneström : Ueber die Aufgaben einer math. Zentralbibliothek.

Bulletin of the American mathematical Society, publié par F.-N. Cole, A. Ziwet. D.-E. Smith. Macmillan Company, Lancaster, Pa., and New-York. — 2e série, 1903. Vol. IX.

Janvier. — F.-N. Cole : The October Meeting of the American Mathematical Society. — F. Cajori : Series whose product is absolutely convergent. — L.-E. Dickson : Three sets of generational relations defining the abstract simple group of order 660 ; *idem* of Order 504.

Février. — W.-F. Osgood : On the transformation of the boundary in the case of conformal mapping. — V. Snyder : On the quintic scroll having three double Conics. — L.-P. Eisenhart : Surfaces referred to their lines of length zero. — E.-R. Hedrick : Supplementary Note on the Calculus of Variations. — E.-B. Wilson : The synthetic treatment of Conics at the present time.

Mars. — F.-N. Cole : The ninth annual Meeting of the American Mathematical Society. — G.-A. Miller : The December Meeting of the San Francisco Section. — L.-E. Dickson : The abstract Group G simply isomorphic with the alternating group on six letters. — H.-F. Blichfeldt : Note on a property of the Conic Sections. — H.-T. Hudson : The analytic theory of displacements. — Notes. — New Publications.

Avril. — F. Holgate : The January Meeting of the Chicago Section. — E.-W. Davis : Some Groups in Logic. — V. Snyder : Cesàro's intrinsic Geometry. — J. Pierpont : Gauss's Collected Works. — E.-B. Wilson : Analytic Projective Geometry. — Notices diverses.

Mai. — F.-N. Cole : The February Meeting of the American Mathematical Society. — E.-H. Moore : On the Foundations of Mathematics. — C.-J. Keyser : Concerning the axiom of infinity and mathematical induction. — E.-R. Hedrick : A German Calculus for Engineers.

Juin. — M. Bôcher : Singular Points of Functions which Satisfy Partial Differential Equations of the Elliptic Type.— A.-M. Nasch : Errata in Gauss's

« Tafel der Anzahl der Classen Binärer Quadratischer Formen. » — E.-Mc. Clintock : The Logarithm as a Direct Function. — J.-I. Hutchinson : The Theory of Automorphic Functions. — E.-B. Wilson. — Loria's Special Peane Curves.

Juillet. — F.-N. Cole : The April Meeting of the Chicago American Mathematical Society. — T.-F. Holgate : The April Meeting of the Section. — G.-A. Miller : The April Meeting of the San Francisco Section. — G.-A. Miller : A Fundamental Theorem with Respect to transitive substitution Groups. — Ed. Kasner : The Characterization of Collineations. — W.-F. Osgood : A Modern French Calculus.

Mathematische Annalen herausgegeben von F. Klein, W. v. Dyck, D. Hilbert. Publication trimestrielle. Leipzig. Teubner. — Band, 56 u. 57.

Heft 3. — D. Hilbert : Ueber die Grundlagen der Geometrie. — J.-H. Graf : Beitrag zur Auflösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, denen gewisse bestimmte Integrale genügen. — L. Lachtin : Die Differentialresolvente einer algebraischen Gleichung sechsten Grades allgemeiner Art. — E. Netto : Ueber die Zusammensetzung von Substitutionen aus den Transpositionen. — P. Staeckel : Lineare Scharen geodätischer Linien. — K. Th. Vahlen : Ueber endlichgleiche Polyeder.

Heft 4. — O. Blumenthal : Ueber Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen. — A. Lœwy : Ueber reduzible lineare homogene Differentialgleichungen. — K. Bœhm : Zur Integration partieller Differentialgleichungen. — P. Epstein : Zur Theorie allgemeiner Zetafunctionen. — E. Landau : Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes. — E. Landau : Ueber die Klassenzahl der binären quadratischen Formen von negativer Discriminante. — M. Nœther : Ueber die singularen Elemente der algebraischen Kurven.

Band 57. — 1903. Heft 1. — F. Klein : Gauss'wissenschaftliches Tagebuch. (1796-1814) und über der Stand der Herausgabe von Gauss' Werken. — O. Bolza : Zur zweiten Variation bei isoperimetrischen Problemen ; Ueber das isoperimetrische Problem auf einer gegebenen Fläche. — E. Landau : Ueber die Darstellung definiter binärer Formen durch Quadrate. — E. Pascal : Eugenio Beltrami. — O. Zoll : Ueber Flächen mit Scharen geschlossener geodätischer Linien. — H.-J. Hatzidakis : Ueber partielle Integration.

Heft 2. — D. Hilbert : Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie. — W. Boy : Ueber di Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen. — Yoshiye : Anwendungen der Variationsrechnung auf partielle Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variabeln. — E. Schmidt : Ueber die Anzahl der Primzahlen unter gegebener Grenze. — F. Schur : Zur Proportionslehre. — H. Schubert : Ueber die Incidenz zweier linearer Räume beliebiger Dimensionen. — F. London : Ueber einen Satz aus der Theorie der ebenen Kollineationen. — G. Hamel : Ueber die Geometrien, in denen die Geraden die Kürzesten sind.

Mathesis. — Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales, publié par P. Mansion et J. Neuberg. Gand, Hoste. Paris, Gauthier-Villars. Série 3. t. II et III, années 1902 et 1903.

Octobre. — C.-E. Wasteels : Sur le centre de gravité des figures sphériques. — J. Neuberg : Sur le complexe de Grassmann.

Novembre. — J. N. Surprises mathématiques. — H. Van Aubel : Notes de géométrie. — J. Neuberg : Sur quelques cas particuliers d'un théorème de Grassmann.

Décembre. — P. M. : Sur l'analyse des Anciens. — Notes diverses.

T. III. Janvier 1903. — M. Stuyvaert : Une leçon sur les cubiques gauches. — A. Demoulin : Généralisation d'un théorème de Ed. Lucas. — Bibliographie et notes diverses.

Février. — C. Servais : Relations entre deux systèmes d'axes. — G. Fontené : La construction de Nicollie pour le problème de Halley. Notes et Bibliographie.

Mars. — A. Boutin : Note sur quelques séries. — M. Lauvernay : Problème de géométrie. — J. Déprez : Géométrie du triangle.

Avril. — P. M. : Théorie purement analytique des fonctions circulaires d'après Seidel. — L. Casteels; G. Delahaye : Problèmes de géométrie. — J. Rose : Sur le centre de courbure des coniques. — Notes, problèmes divers.

Mai. — J. Neuberg : Sur les exemples de triangles homologiques dont les sommets sont situés sur six droites données. — Notes diverses et questions d'examen.

Juin et Juillet. — M. Stugvaert : La courbe horoptère. — E. Barisien : Sur le quadrilatère inscriptible dans un cercle. — Notes et problèmes divers.

Il Nuovo Cimento. — Organe de la société italienne de Physique publié par A. Batelli, A. Roiti, V. Volterra, A. Righi et P. Cardani. Publication mensuelle gr. in-8°. Pise. Pieraccini, Série V, t. IV et V. 1902 et 1903.

Novembre. — F. Maccarrone : Conducibilita e ritardo di polarizzazione dielettrica. — T. Martini : Fenomeni che manifestano le polveri igrofile poste in contatto con le soluzioni saline i miscugli alcoolici e gli acidi diluiti.

Décembre. — S. Lussana : Proprieta termiche dei solidi e dei liquidi. — E. Alessandrini : Sull' elettricita sviluppata per gorgoglio d'aria in acqua. — R. Magini : Sull' uso del reticolo di doffrazione nelle studio dello spettro ultravioletto. — L. Puccianti : Corrispondente elettrico del diamagnetismo.

Année 1903. T. V. Janvier, — G. Lauricella : Sulla deformazione di una sfera elastica isotropa per date tensioni in superficie. — Dall'Oppio : Intorno l'interrutore di Wehnelt. — G. Scalfaro : La velocita della luce nei cristalli magnetici.

Février. — P. Cardani : Determinaziona diretta del rapporto di Poisson nei fili metallici. — G. di Ciommo : Sulla calibrazione elettrica d'un filo conduttore. — P. Bassi : Sulle azioni idrodinamiche esercotate da corpi solidi oscillanti in seno ad un liquido.

Mars. — S. Lussana : Proprieta termiche dei solidi e dei liquidi. — P. Carnazzi : Influenza della pressione e della temperature sul coefficiente di compressibilità del mercurio. — M. La Rosa : Sopra una Nota di A. H. Sircks intitolata » Alcuni notevoli fenomeni che riguardano il incuito elettrico negli elettroliti. — Anonyme : Sul fenomeno del Prof. Banti.

Unterrichtsblætter für Mathematik und Naturwissenschaften. Organ des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den

Naturwissenschaften. Begründet unter Mitwirkung von Bernh. SCHWALBE, herausgegeben von F. PIETZKER. Jahrg. IX, 1903 ; O. Salle, Berlin.

Nr. 1 et 2. — K. GEISSLER : Der Winkel u. das Unendliche. — TH. ADRIAN : Ueber die Berechnung der Näherungswerte von π — S. LEISEN : Konstitutions u. Strukturformeln für geom. Konstruktionen. — A. SCHÜLKE : Lebensversicherungs-Rechnungen beim Unterricht.

Publications non-périodiques

M. CANTOR. — **Politische Arithmetik oder die Arithmetik des täglichen Lebens**. Zweite Auflage. 1903. 1 vol. in-8° de 155 p. B.-G. Teubner.

E. DELSOL. — **Principes de Géométrie.** 1 vol. in-8° de 96 p. Prix : 2 fr. 50. C. Naud. Paris 1903.

A. FAIFOFER. — **Eléments de Géométrie,** à l'usage de l'Enseignement moderne et des Lycées. Traduction de la 13e édition italienne, par Fr. Talanti. 1 vol. in-8° de 585 pages. Prix 5 fr. Paris, Nony 1903.

R. FUETER. — **Der Klassenkörper der quadratischen Körper und die complexe Multiplication**. Inaugural Dissertation, Göttingen 1903. Une broch, gr. in-8° de 70 pages.

C. GUICHARD. — **Traité de Géométrie.** Deuxième partie (Compléments). 1 vol. in-8° de 430 pages. Paris 1903. Nony.

Aug. TAFELMACHER et R. PŒNISCH. — **Elementos de Matematicas**. T. 4. Estereometria, 1 vol. cart. 80 p.; prix : P. 1,50. — T. 5 : Trigonometria plana. 1 vol. cart., 112 p. : prix : 1.50 P. — T. 6 : Aljebra 186 p.; prix : 1 fr. 80. Santiago du Chili, 1903.

G. HOLZMÜLLER. — **Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik.** Dritter Teil. 2. Auflage. 1 vol. cart., 370 p,. prix : M. 4 fr. 40 ; B. G. Teubner, Leipzig, Berlin, 1903.

KIEPERT. — **Grundriss der Differential und Integralrechnung**. II. Theil : *Integral-Rechnung*. Achte verbesserte u. vermehrte Auflage des gleichnamigen Leitfadens von Max. STEGEMANN. 1 vol. broché, g.. in-8°, 666 p. ; Helvingsche Verlagsbuchhandlung, Hannover, 1903.

H. MULLER UND F. PIETZKER. — **Rechenbuch für die unteren Klassen der höheren Lehranstalten**. Ausgabe A. ; für Gymnasien. — 1 vol. cart. 224 p. : prix : 2 fr. 40 ; B.-G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1903.

OCAGNE (Maurice d'). — **Les instruments de précision**. Conférence faite au Conservatoire des Arts et Métiers, le 15 mars 1903. Publiée par le Syndicat des Constructeurs d'Instruments de précision. Hôtel des Sociétés savantes, 28, rue Serpente, Paris.

Le Gérant : C. NAUD.

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE EN RUSSIE [1]

ÉTAT ACTUEL. — ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR.

En Russie, l'enseignement des mathématiques supérieures se donne dans les Facultés physico-mathématiques des universités, dans les sections mathématiques des Cours supérieurs de femmes à Saint-Pétersbourg et à Moscou, enfin dans les écoles supérieures, instituts et académies techniques et écoles de génie. Pour le but que nous poursuivons, il suffit de nous en tenir aux universités; l'enseignement mathématique aux cours de femmes n'en diffère que par quelques restrictions et il est confié aux mêmes professeurs; d'autre part, celui des écoles supérieures, académies et instituts techniques ou écoles de génie n'est pas assez indépendant des autres sciences.

D'après le règlement universitaire de 1884 — encore aujourd'hui en vigueur — l'enseignement mathématique devait poursuivre les buts suivants : 1) les étudiants devaient étudier plus à fond les éléments de chaque science; 2) plus d'indépendance était à désirer dans leurs travaux; 3) les professeurs effectifs étaient dispensés de leurs fonctions d'examinateurs et ces dernières transmises à des commissions particulières composées des savants pris en dehors de l'université; 4) l'institut des privat-docents se trouvait largement développé afin d'affirmer la liberté de l'enseignement universitaire.

Sous le règlement de 1863 l'enseignement était abandonné aux professeurs presque sans contrôle. Il y en avait qui laissaient leurs propres intérêts l'emporter sur ceux de leurs auditeurs.

---

[1] Voir dans le t. I de cette revue, *L'Aperçu historique* (p. 77-100), *L'Etat actuel de l'enseignement primaire* (p. 420-449), et, dans celui de l'année courante, *l'Etat actuel de l'enseignement secondaire* (p. 237-261).

Souvent ils ne parlaient que superficiellement des éléments de la science ou ne présentaient des détails que sur les parties du cours cultivées par eux-mêmes, force était aux étudiants de s'en tenir aux manuels.

Quant à l'indépendance de leurs travaux, le règlement de 1863 ne contrôlait pas plus les étudiants que les professeurs. Les examens dont le résultat valait beaucoup par le fait des droits au service d'État et de la position sociale du jeune homme, avaient lieu pour chaque science à part, chez le professeur qui l'avait professée. Les connaissances des étudiants se limitaient à ce qui leur avait été lu pendant l'année, c'est-à-dire aux notes que l'un ou plusieurs d'entre eux avaient prises à la leçon et fait lithographier ensuite. Malgré de nombreuses fautes ces lithographies tenaient lieu de manuel à tel point que bien des étudiants se passaient de suivre les cours de leur Faculté.

Le règlement de 1863 avait aussi admis les privat-docents, mais seulement pour enseigner les branches non obligatoires. Les cours obligatoires n'étaient lus que par des professeurs ou des docents non privés et recevant une rétribution fixée. Le nombre des privat-docents était par conséquent très restreint. Le règlement de 1884 a contribué à l'augmenter : 1° en abolissant le grade de docent non privé ; 2° en donnant pour trois ans celui de privat-docent à tout savant travaillant pour le professorat et 3° en permettant aux étudiants de choisir entre le cours d'un professeur et celui d'un privat-docent, si tous les deux enseignaient la même science. Mais en formant de cette manière l'institut des privat-docents le règlement de 1884 n'a presque rien fait pour l'assurer matériellement. C'est une des raisons (l'espace nous manque pour en citer d'autres) qui expliquent pourquoi il n'a pas atteint le degré de développement qui serait à désirer.

Le règlement de 1884 a conservé la division de la Faculté physico-mathématique en deux sections : *a*) mathématique ; *b*) des sciences naturelles. Conformément à cette répartition, il établit pour la première section les chaires : 1. de Mathématiques pures ; 2. de Mécanique théorique et pratique ; 3. d'Astronomie et de Géodésie ; 4. de Physique et de Géographie physique.

Les commissions particulières avaient à se prononcer sur les connaissances des étudiants et à leur distribuer les diplômes du

1[er] ou 2[e] degré. Le règlement de 1884 chargea en même temps le ministère de l'Instruction publique de confirmer et de publier pour toutes les universités des « règles générales sur les examens subis dans les commissions et sur les exigences auxquelles on devait y satisfaire ». C'est en 1885 que parut, publiée par le ministère la « liste des exigences qu'ont à satisfaire les jeunes gens faisant leur épreuve devant la commission physico-mathématique. Section des sciences mathématiques. »

« § 1. Ceux qui subissent l'examen doivent connaître les sciences faisant partie de l'instruction générale physico-mathématique, savoir : Mathématiques, Physique, Mécanique, Astronomie et Chimie [1]. — § 2. Chacun est soumis, en outre, à une épreuve complémentaire indiquée aux paragraphes 8 et 10.

§ 8. Le jeune homme soumis à l'épreuve complémentaire choisit deux sciences entre les cours suivants :

« 1) Théorie des nombres. 2) Algèbre supérieure. 3) Théorie des fonctions elliptiques. 4) Géométrie supérieure.

« 5) Théorie du potentiel avec son application aux phénomènes électriques et magnétiques. 6) Théorie cinétique des gaz. 7) Théorie mathématique de la lumière. 8) Théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. 9) Théorie mathématique de la chaleur.

« 10) Cinématique du mouvement absolu et du mouvement relatif. 11) Théorie générale du mouvement d'un solide.

« 12) Mouvement des corps célestes sur les coniques. 13) Théorie des perturbations du mouvement. 14) Astronomie pratique. 15) Géodésie.

« § 9. Il est libre de remplacer cette épreuve par un examen de Mécanique pratique ou de Géométrie descriptive, à condition de savoir bien dessiner. — § 10. Les résumés des cours entendus à l'Université sur les sciences choisies ou des connaissances acquises, en général dans leur domaine, font aussi partie de l'épreuve complémentaire. Ces résumés, une fois agréés par la Commission, déterminent les exigences de l'examen. »

Au moment où la commission physico-mathématique allait commencer à fonctionner le ministère de l'Instruction publique publiait, en 1889, les « règles et programmes pour les examens devant la commission physico-mathématique, section des sciences mathématiques. » Nous n'en citerons que les programmes, la réglementation des examens ne présentant pas un grand intérêt.

---

[1] Voir ci-après (p. 400), les programmes.

Programmes de l'examen général dans la Commission physico-mathématique; section des sciences mathématiques.

I. *Programme de l'examen de mathématiques pures.*

A. Géométrie analytique. — Détermination de la position d'un point sur un plan à l'aide des coordonnées rectilignes et polaires. Transformation des coordonnées dans le plan. Signification géométrique des équations entre les coordonnées. Classification des courbes par leurs équations. Signification de l'équation du premier degré à deux variables. Formes les plus usitées de l'équation du premier degré et signification de leurs coefficients.

Problèmes fondamentaux relatifs aux points et aux droites sur un plan : *a*) expression de la distance entre deux points; détermination des coordonnées du point divisant, dans un rapport donné, la droite qui joint deux points; expression de l'aire du triangle par les coordonnées de ses sommets. *b*) Equation d'une ligne droite passant par un ou par deux points donnés; équation d'une droite parallèle à une droite donnée et passant par un point donné; équation d'une droite passant par le point de rencontre de deux droites données. *c*) Condition pour que trois points soient en ligne droite; condition pour que trois droites passent par un même point. *d*) Détermination de l'angle de deux droites données; condition de perpendicularité de deux droites données; équation et longueur d'une perpendiculaire à une droite donnée, passant par un point donné; détermination du rapport de deux segments d'une distance entre deux points donnés, divisée par la droite donnée.

Discussion des courbes représentées par l'équation générale du second degré à deux variables.

Centre, diamètre, diamètres conjugués et axes des courbes du second degré. Equations des tangentes aux courbes du second degré et de leurs polaires, relatives au point donné.

Réduction de l'équation générale des courbes du second degré à la forme la plus simple à l'aide des propriétés des diamètres et des axes.

Construction de l'ellipse et du cercle, de l'hyperbole et de la parabole. Déduction des propriétés fondamentales de ces courbes à l'aide de leurs équations les plus simples.

Foyers et directrices des courbes du second degré.

Équation générale des courbes du second degré, rapportée au sommet. Equations polaires les plus simples de ces courbes.

Détermination de la position d'un point dans l'espace à l'aide des coordonnées rectilignes et polaires. Transformation des coordonnées. Signification géométrique d'une ou de deux équations entre les coordonnées.

Expression de la distance entre deux points donnés. Détermination des coordonnées du point divisant, dans un rapport donné, la droite qui joint deux points donnés. Cosinus des angles, qui déterminent la direction de la droite. Cosinus de l'angle de deux droites, dont la direction est donnée.

Equation du plan. Angles que la perpendiculaire à un plan fait avec les axes. Conditions du parallélisme de deux plans. Equation d'un plan passant par un ou par trois points donnés et d'un plan parallèle à un plan donné et passant par un point donné. Intersection de trois plans. Expression du cosinus de l'angle de deux plans. Conditions de perpendicularité de deux plans.

Équations d'une ligne droite. Conditions du parallélisme de deux droites. Equations d'une droite passant par un ou par deux points donnés ou menée par un point donné parallèlement à une droite donnée. Angle de deux droites. Condition de perpendicularité de deux droites. Condition pour que deux droites passent par un même point.

Condition de parallélisme d'une droite et d'un plan. Condition pour qu'une droite donnée soit dans un plan donné. Equation du plan passant par un point donné et par une droite donnée. Angle d'une droite et d'un plan. Condition de perpendicularité d'une droite et d'un plan. Equation d'un plan perpendiculaire à une droite donnée et passant par un point donné. Equations et longueur d'une perpendiculaire à un plan donné, passant par un point donné. Equations et longueur d'une perpendiculaire à une droite donnée, passant par un point donné. Equations et longueur d'une perpendiculaire aux deux droites données.

Centre, plan diamétral, plans diamétraux et principaux des surfaces du second ordre. Réduction à la forme la plus simple des équations des surfaces du second ordre possédant un centre ou dépourvues de centre.

Discussion des formes d'ellipsoïde, de deux hyperboloïdes et de deux paraboloïdes suivant leurs équations les plus simples en coordonnées rectilignes. Discussion des sections circulaires et des génératrices rectilignes des surfaces de second ordre.

B. Algèbre supérieure. — Existence de la racine de l'équation algébrique. Décomposition d'une fonction entière en facteurs. Nombre des racines de l'équation. Racines imaginaires conjuguées. Relations entre les coefficients et les racines. Recherche des racines commensurables des équations à coefficients rationnels.

Réduction de la résolution d'une équation qui a des racines égales à celle de plusieurs équations qui n'ont que des racines simples.

Limites des racines réelles d'une équation. Théorème de Rolle. Méthode de Sturm pour la séparation des racines de l'équation. Méthode de Fourier pour la séparation des racines de l'équation.

Méthode de Newton pour le calcul de la valeur approchée de l'une

des racines de l'équation. Complément de Fourier de la méthode de Newton. Signification géométrique de la méthode de Fourier.

Formules de Newton pour l'expression des sommes de puissances semblables des racines d'une équation en fonction des coefficients. Calcul des fonctions symétriques rationnelles des racines de l'équation donnée. Application des fonctions symétriques à la transformation de l'équation. Formation du produit des carrés des différences des racines de l'équation donnée.

Réduction d'une fonction fractionnaire de racine de l'équation à la fonction entière de la même racine.

Application des fonctions symétriques à l'élimination d'une inconnue entre deux équations à deux inconnues.

Résolution algébrique des équations des troisième et quatrième degrés.

Décomposition des fractions rationnelles en fractions simples.

C. Calcul différentiel. — Limite d'une variable. Infiniment petits et infiniment grands. Limites des expressions $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ et $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, α étant infiniment petit. Divers ordres d'infiniment petits.

Dérivée et différentielle de la fonction d'une seule variable. Leur signification géométrique. Dérivées des fonctions les plus simples. Dérivées de la fonction de fonction. Dérivées d'une somme, d'un produit et d'un quotient.

Dérivées partielles et différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables indépendantes. Formule générale de la différentiation d'une fonction composée.

Dérivées et différentielles des ordres supérieurs des fonctions d'une seule variable.

Dérivées partielles et différentielle totale des ordres supérieurs des fonctions de plusieurs variables indépendantes. Principe de l'interversion des différentiations.

Différentiation des fonctions implicites. Changement de variables.

Formules de Taylor et de Maclaurin complétées par le reste. Développement des fonctions les plus simples en séries. Détermination de la véritable valeur des fonctions qui deviennent indéterminées pour des valeurs particulières de la variable. Propriété des fonctions homogènes (théorème d'Euler).

Étude de la variation des fonctions. Maxima et minima des fonctions d'une seule ou de plusieurs variables indépendantes. Cas d'une fonction explicite de plusieurs variables liées par des équations données.

Tangente et normale aux courbes planes.

Concavité, convexité et inflexion d'une courbe plane.

Différentielle de l'arc d'une courbe plane. Courbure, rayon de courbure et coordonnées du centre de courbure. Expression du rayon de courbure en coordonnées polaires. Application des formules générales

aux courbes du second degré, à la cycloïde et à la spirale logarithmique.

Enveloppe d'une famille donnée de courbes. Contacts des divers ordres des courbes planes. Droite osculatrice. Cercle osculateur. Développées et leurs propriétés. Développées des coniques, de la cycloïde et de la spirale logarithmique.

Tangente et plan normal d'une courbe gauche. Différentielle de l'arc d'une courbe gauche. Rayon de courbure première.

Cosinus des angles que fait la tangente ou la normale principale d'une courbe avec les directions de trois axes rectangulaires. Plan osculateur ou plan de courbure. Cosinus des angles que fait la perpendiculaire au plan osculateur avec les directions de trois axes rectangulaires. Seconde courbure ou courbure de la torsion. Application à l'hélice.

Plan tangent et normal à une surface courbe. Équations différentielles de surfaces cylindriques, coniques, développables et de révolution. Surfaces enveloppes.

D. Calcul intégral. — Intégrale indéfinie et intégrale définie. Procédés principaux d'intégration.

Intégration des fonctions rationnelles.

Cas les plus simples de l'intégration de différentielles irrationnelles.

Conditions d'intégrabilité et formule de réduction de l'intégrale d'une différentielle binôme.

Cas les plus simples de l'intégration de différentielles transcendantes.

Propriétés fondamentales de l'intégrale définie, résultant de sa définition. Cas où les limites des intégrales sont infinies. Cas où la fonction contenue sous le signe $\int$ devient infinie aux limites de l'intégrale.

Série de Taylor sous la forme de l'intégrale définie.

Evaluation approchée de l'intégrale définie à l'aide des séries ou de l'interpolation (méthode des trapèzes, formule de Simpson).

Différentiation de l'intégrale définie relative au paramètre. Intégration sous le signe $\int$. Exemples d'application de la différentiation et de l'intégration sous le signe $\int$, à la détermination des valeurs de quelques intégrales définies.

Intégrales eulériennes de première et de seconde espèce ou fonctions $B(p, q)$ et $\Gamma(p)$. Réduction des intégrales de première espèce à celles de seconde espèce. Propriétés fondamentales de la fonction $\Gamma(p)$.

Intégrales prises entre deux limites imaginaires. Théorème de Cauchy et ses conséquences principales.

Déduction des formules générales pour la détermination des aires limitées par des courbes, des arcs des courbes, des volumes et des surfaces de révolution. Application à quelques exemples.

Intégrales définies doubles et multiples. Changement de variables dans les intégrales multiples.

Détermination du volume des corps terminés par des surfaces quelconques. Quadrature des surfaces. Application à quelques exemples.

E. Théorie de l'intégration des équations différentielles. — Conditions d'intégrabilité des expressions de la forme

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n,$$

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ étant les fonctions données de variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Equations différentielles ordinaires. Équations aux dérivées partielles. Leur classification par ordres. Formation de l'équation différentielle ordinaire par l'élimination de constantes arbitraires.

Intégrale générale d'une équation différentielle ordinaire. Développement de cette intégrale en séries.

Equations différentielles ordinaires du premier ordre. Cas dans lequel les variables sont séparées. Cas où l'équation ne renferme pas la variable indépendante ou dépendante.

Equations différentielles linéaires. Equations différentielles homogènes. Equations les plus simples réductibles à une équation linéaire et homogène.

Problème des trajectoires. — Théorie du facteur intégrant.

Solutions particulières des équations différentielles du premier ordre. Leur recherche au moyen de l'intégrale générale.

Equations différentielles des ordres supérieurs. Équations de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x), \; f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0, \; f\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0.$$

Abaissement de l'ordre des équations de la forme

$$f\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots y^{(n)}\right) = 0,$$

des équations de la forme $f(y, y', y'', \ldots y^n) = 0$ et des équations homogènes relativement à la fonction inconnue et à ses dérivées.

Équations différentielles linéaires. Propriétés générales de leurs intégrales. Abaissement de l'ordre de ces équations à l'aide des solutions particulières.

Variation des constantes arbitraires. Équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Équations différentielles ordinaires simultanées. Réduction de leur intégration à l'intégration d'une équation différentielle ordinaire. Équations linéaires simultanées à coefficients constants.

Intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre qui soient linéaires relativement à la fonction inconnue et à ses dérivées.

F. CALCUL DES VARIATIONS. — Variation d'une intégrale simple. Ligne la plus courte entre deux points. Ligne géodésique. Surface de révolution à aire minimum. Brachistochrone. Problème des isopérimètres.

G. CALCUL DES DIFFÉRENCES FINIES. — Expression de la différence d'ordre supérieur à l'aide des valeurs de la fonction et *vice versa* expression d'une valeur de la fonction à l'aide de leurs différences successives. Problème d'interpolation. Formules d'interpolation de Newton et de Lagrange.

Différentiation finie et sommation des fonctions les plus simples. Nombres de Bernoulli. Formule d'Euler pour passer des sommes aux intégrales et *vice versa*. Formule de Stirling.

Application du calcul des différences finies aux équations différentielles linéaires.

H. CALCUL DES PROBABILITÉS. — Mesure de la probabilité. Règles fondamentales du calcul des probabilités.

Probabilité des événements composés des mêmes événements simples. Loi des grands nombres et leurs conséquences.

Détermination des probabilités des hypothèses et des événements futurs. Fondements de la méthode des moindres carrés.

L'épreuve sur les parties élémentaires des mathématiques comprend outre le cours de gymnase : Propriétés les plus principales des déterminants et leur application à la résolution des systèmes des équations linéaires. Opérations sur les expressions imaginaires. Formule de Moivre. Résolution trigonométrique des équations binômes. Caractères les plus simples de convergence des séries. Eléments de la théorie des nombres : divisibilité des nombres ; théorèmes de Fermat et d'Euler ; résolution de congruences du premier degré. Eléments de Trigonométrie sphérique. Construction des formules algébriques. Application de l'Algèbre à la résolution de problèmes géométriques.

II. *Programme de l'examen des mathématiques appliquées et des sciences physiques.*

A. PHYSIQUE. — Notions mécaniques fondamentales. Mesures les plus usitées. Instruments de mesure. Pesanteur. Forces moléculaires dans les corps solides. Corps liquides. Corps gazeux. Mouvement ondulatoire. Acoustique. Optique géométrique. Vision. Instruments d'optique. Spectroscopie. Photométrie. Rayons de lumière et rayons de chaleur. Actions chimiques des rayons. Optique physique. Thermométrie. Dilatations. Calorimétrie. Changements d'état. Echauffement et refroidissement. Conduction de la chaleur. Eléments de la théorie mécanique de la chaleur. Electricité statique. Magnétisme. Electrocinétique. Thermo-électricité. Electrodynamique. Théorie physique du

courant. Induction électrique. Unités électrostatiques et électrodynamiques.

B. Météorologie. — Instruments et méthodes d'observation. Atmosphère. Phénomènes thermiques à la surface de la terre. Pression atmosphérique. Courants d'air. Humidité de l'air. Hydrométéores. Phénomènes électriques dans l'atmosphère. Phénomènes lumineux dans l'atmosphère. Magnétisme terrestre.

C. Mécanique. — Statique. Attraction. Cinématique et dynamique. Hydrostatique et hydrodynamique. Application de la loi des forces vives aux machines.

D. Astronomie. — Instruments d'astronomie. Astronomie sphérique. Astronomie théorique. Astronomie physique.

E. Chimie. — Chimie inorganique.

Pour ce qui concerne l'épreuve complémentaire les programmes du ministère se bornèrent à répéter en 1889 ce qui a été cité plus haut en y ajoutant la « *Remarque* » suivante.

« Le contenu des parties de la Physique mathématique indiquées ci-dessus (avec les autres parties de l'épreuve complémentaire) est déterminé par les résumés cités ci-dessous et présentés à la commission par les jeunes gens soumis à l'examen. Il est permis de limiter la section choisie à l'une de ses parties principales plus ou moins développée. Par exemple dans la théorie du potentiel (5e section) le résumé de l'examen peut comprendre : ou la théorie de l'électricité statique ou celle du magnétisme. Il peut même être remplacé par l'électrodynamique théorique. Pour la théorie mathématique de la lumière le résumé de l'examen peut embrasser cette théorie appliquée soit à des corps isotropes, soit à des cristallins. Le résumé de la théorie mathématique de la chaleur peut se borner à la thermodynamique ou à la théorie de conduction de la chaleur. Entre les parties de la physique mathématique pouvant être choisies pour l'épreuve complémentaire se trouvent encore : *a)* la capillarité, *b)* l'acoustique théorique. L'épreuve en question peut encore être remplacée par un examen général sur les éléments de la Physique mathématique dans les limites des cours professés à quelques universités (avec trois leçons hebdomadaires pendant l'année) et suivant un résumé qui en contiendrait les données les plus importantes et les plus accessibles ».

Afin de concilier l'enseignement actuel dans les universités avec les buts du ministère et de lui en subordonner les tendances, le règlement de 1884 fut complété par deux articles que voici :

« § 70. Chaque Faculté compose un ou plusieurs plans d'étude où elle indique les sciences dont les étudiants ont à s'occuper, et l'ordre qu'ils doivent suivre en les étudiant. Le conseil de l'université examine ces plans et tous les changements qui peuvent y avoir lieu pour les soumettre ensuite à la confirmation du ministre de l'Instruction publique ».

« § 71. Conformément à ce que les professeurs comptent donner aux étudiants en fait de lectures et occupations pratiques, les Facultés font un aperçu sur l'enseignement de chaque semestre à venir en distribuant les leçons et les exercices d'après les jours et les heures hebdomadaires. Revus par le conseil, ces aperçus sont aussi présentés au ministre pour être confirmés ».

Citons comme exemple « L'aperçu sur l'enseignement à la Faculté physico-mathématique de l'Université Impériale de Moscou en 1902-1903 ». Nous examinerons la partie qui se rapporte à la section des sciences mathématiques.

P. o. é. (1). N.-B. Bougaïeff. Doyen de la Faculté des sciences physico-mathématiques. 9 heures *hbd. a* : *a*) Introduction à l'Analyse avec exercices, 5 heures, [1] ; *b*) Calcul intégral, 4 heures, [3]. — 7 heures *hbd. p.* : *a*) Calcul différentiel, 4 heures, [2] ; *b*) Calcul intégral, 3 heures, [4]. — *S. r.* : Cauchy, Analyse algébrique. Serret, Cours de calcul différentiel et intégral. Zernoff, Calcul différentiel (en langue russe). Meyer, Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale. Todhunter, Treatise on the Differential Calculus with numerous Examples (traduit en langue russe par M. Imschenetsky).

P. o. é. C.-A. Andréieff. 4 heures *hbd. a.* : Mathématiques élémentaires (théorie des déterminants, propriétés des polynômes, géométrie sphérique et trigonométrie sphérique), [1]. — 4 heures *hbd. p.* : Algèbre supérieure, [2]. — *S. r.* : G. Dostor, Eléments de la théorie des déterminants, Paris, 1877. G. Salmon, Vorlesungen zur Einleitung in die Algebra der linearen Transformationen (deutsch bearb. von Fiedler), Leipzig, 1863. J. Serret, Traité de trigonométrie, 7e édit., Paris, 1897. M. Tikhomandritsky, Cours succinct d'algèbre supérieure (en langue russe), Kharkov, 1887. J. Petersen, Theorie der algebraischen Gleichungen, Kopenhagen, 1878.

P. o. B.-C. Mlodzieiovsky. 8 heures *hbd. a.* : *a*) Géométrie analytique du plan, 3 heures, [1] ; *b*) Théorie des fonctions de variables réelles,

---

(1) *Abréviations conventionnelles* : *P. o. é.* : Professeur ordinaire émérite ; *P. o.* : Professeur ordinaire ; *P. e* : Professeur extraordinaire ; *P.-d.* Privat-docent ; [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8] : étudiants des semestres, premier, second, troisième, quatrième, cinquième, sixième, septième et huitième ; *S. r.* : secours recommandés ; *heures hbd, a.* : heures hebdomadaires durant le semestre d'automne ; *heures hbd. p.* : heures hebdomadaires durant le semestre de printemps.

3 heures, [5]; c) Exercices de géométrie analytique à trois dimensions, 2 heures, [3]. — 6 heures *hbd. p.* : a) Géométrie analytique de l'espace, 4 heures, [2]; b) Exercices de géométrie analytique à deux dimensions, 2 heures, [2]. — *S. r.* : Andréieff, Cours fondamental de géométrie analytique (en langue russe), Moscou, 1900. Salmon, Géométrie analytique (traduit en langue russe par M. Alexéieff), Moscou, 1891-92. Briot et Bouquet, Leçons de géométrie analytique, Paris, 1898. Dini, Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer reellen veränderlichen Grösse, Leipzig, 1892. Stolz und Gmeiner, Theoretische Arithmetik, Leipzig, 1901. Stolz, Grundzüge der Differential-und Integralrechnung, Leipzig, 1893. Andréieff, Recueil d'exercices sur la géométrie analytique (en langue russe), Kharkov, 1892.

P. o. L. C. Lakhtin, secrétaire de la Faculté des sciences physico-mathématiques, 8 heures *hbd. a.* : a) Calcul différentiel, 4 heures, [3]; b) Calcul des variations, 2 heures [5, 7]; c) Intégration des équations différentielles, 2 heures [5]. — 7 heures *hbd. p.* : a) Calcul des différences finies, 2 heures [6, 8]; b) Intégration des équations différentielles, 3 heures [4]; c) Exercices d'intégration des équations différentielles, 2 heures [6]. — *S. r.* : Serret, Cours de calcul différentiel et intégral, Paris, 1879. Todhunter, Treatise on the Differential Calculus, etc. (traduit en langue russe par M. Imschenetsky), Saint-Pétersbourg, 1873. Moigno, Leçons de calcul des variations (traduit en langue russe par MM. Raïévsky et Khandricoff), Moscou, 1864. Ernst Pascal, Die Variationsrechnung, deutsche Ausgabe von A. Schepp, Leipzig, 1899. Vastschenko-Zakhartschenko, Leçons de calcul des différences finies (en langue russe), Kiew, 1868. Tikhomandritsky, Cours de calcul des différences finies (en langue russe), Kharkov, 1890. Boole, A treatise on differential equations. Forsyth, Lehrbuch der Differentialgleichungen, herausgegeben von H. Maser, Braunschweig, 1899. Sohnke, Sammlung von Aufgaben aus der Integralrechnung, Halle, 1877.

P.-d. S. P. Vinogradoff, 5 heures *hbd. p.* : a) Exercices de calcul différentiel, 2 heures [4]; b) Exercices de calcul intégral, 3 heures [4]. — *S. r.* V. Schiff (M^me^), Recueil d'exercices et de problèmes sur les calculs différentiel et intégral (en langue russe), Saint-Pétersbourg, 1898-1900. Sohnke, Sammlung von Aufgaben aus der Differential-und Integralrechnung, Halle, 1885. Schlömilch, Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis, Leipzig, 1888. Frenet, Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal, Paris, 1882. Tisserand, Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitésimal, Paris, 1896.

P.-d. V. V. Bobynin, 3 heures hebdomadaires durant l'année : a) Histoire des mathématiques depuis les temps les plus reculés jusqu'à la Renaissance, 1 heure [1, 3, 5, 7] [2, 4, 6, 8]; b) Histoire des mathématiques depuis la Renaissance jusqu'au milieu du xviii^e^ siècle, 1 heure [1, 3, 5, 7] [2, 4, 6, 8]; c) Histoire et état actuel de l'enseignement des

mathématiques, 1 heure [1, 3, 5, 7] [2, 4, 6, 8]. — *S. r.* V. V. Bobynin, Programme du cours de l'histoire des mathématiques (en langue russe), Moscou, 1890; V. V. Bobynin, Leçons d'histoire des mathématiques (état préscientifique des connaissances mathématiques). Appendice au journal *Les sciences physico-mathématiques dans leur état actuel et passé* (en langue russe), Moscou, 1891-1897. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter, Leipzig, 1874. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 3 Bände, Leipzig, 1892-1898. Suter, Geschichte der mathematischen Wissenschaften, zweiter Theil, Zürich, 1875. V. V. Bobynin, L'enseignement mathématique en Russie. Aperçu historique (l'Enseignement mathématique, 1re année, 1899). C.-A. Laisant, La mathématique. Philosophie. Enseignement, Paris, 1898. J.-M.-C. Duhamel, Des méthodes dans les sciences de raisonnement, 1re partie, Paris, 1865.

P.-d. J. C. Bogoiavlensky, 3 heures *hbd. a.* : Théorie des équations différentielles linéaires [5, 7]. — 2 heures *hbd. p.* : Equations aux dérivées partielles [6, 8]. — *S. r.* : Anissimoff, Fondements de la théorie des équations différentielles linéaires (en langue russe), Moscou, 1889. Sawitsch, Sur les équations différentielles ordinaires linéaires (en langue russe), Saint-Pétersbourg, 1892. Picard, Traité d'Analyse, t. III, Paris, 1895-96. Halphen, Traité des fonctions elliptiques, t. II, Paris. Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Leipzig, 1895-98. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris, 1891. Mansion, Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Berlin. 1892. Forsyth, Lehrbuch der Differentialgleichungen, Braunschweig, 1889.

P.-d. A. C. Vlassoff. 2 heures *hbd. a.* : Géométrie projective [3, 5, 7]. — 3 heures *hbd. p.* : a) Géométrie projective, 1 heure [4, 6, 8]; b) Théorie synthétique des coniques, 2 heures [2]. — *S. r.* : Th. Reye, Die Geometrie der Lage, 1 Abtheilung, 4-te Auflage, Leipzig, 1899. Steiner, Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung (bearbeitet von Geiser), Leipzig, 1887.

P.-d. A. A. Dmitrovsky. 2 heures *hbd. a.* : Courbes planes des ordres supérieurs [5, 7]. — 2 heures *hbd. p.* : Courbes planes du troisième degré [6, 8]. — *S. r.* : Clebsch, Vorlesungen über Geometrie, I Band, Leipzig, 1876. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven, Leipzig, 1882. Cremona, Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven, Greifswald, 1865. Durège, Die ebenen Curven dritter Ordnung, Leipzig, 1871.

P. o. N. G. Joukovsky. 11 heures *hbd. a.* : *a*) Introduction à la mécanique, dynamique du point, 3 heures [3]; *b*) Mécanique du système, théorie de l'attraction, 3 heures [5]; *c*) Hydrostatique et hydrodynamique, 3 heures [7]; *d*) Exercices de mécanique, 2 heures [5]. — 11 heures *hbd. p.* : *a*) Introduction à la mécanique, dynamique du

point, 3 heures (4) ; *b)* Mécanique du système, théorie de l'attraction, 3 heures (6) ; *c)* Dynamique des solides, compléments de la dynamique du système, 3 heures (8) ; *d)* Exercices de mécanique. — *S. r.* Poinsot, Eléments de statique, Paris, 1861. Résal, Traité de mecanique générale, t. I, Paris, 1873. Sloudsky, Cours de mécanique théorique (en langue russe), Moscou, 1881. Appell, Traité de mécanique rationnelle, Paris, 1895-1900. — Bobyleff, Cours de mécanique analytique (en langue russe), Saint-Pétersbourg), 1881-1884. Joukovsky, Leçons d'hydrodynamique (en langue russe), Moscou, 1887. Lamb, A treatise on the mathematical theory of the motion of fluids, Cambridge, 1879. Klein und Sommerfeld, Theorie des Kreisels, Leipzig, 1898. Routh, An elementary treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, London, 1877. Jullien, Problèmes de mécanique rationnelle, Paris, 1866. Kraft, Sammlung von Problemen der Mechanik, Stuttgart, 1884.

P.-d. D. N. Goriatscheff, 3 heures *hbd. a.* : Cinématique (cours spécial) (5, 7). — 3 heures *hbd. p.* : Statique (cours spécial) (6, 8). — *S. r.* Résal, Traité de cinématique pure, Paris, 1862. Somoff, Mémoire sur les accélérations de divers ordres, Saint-Pétersbourg, 1864. Liguine, Généralisations de quelques propriétés géométriques du mouvement du système (en langue russe), Odessa, 1873. Seiliguer, Théorie du mouvement d'un corps semblablement déformable (en langue russe), Kasan, 1892. Darboux, Mémoire sur l'équilibre astatique, Paris. Möbius, Gesammelte Werke, Bd. III, Leipzig, 1886.

P.-d. V. M. Kovalensky, 4 heures *hbd. a.* : Résistance des matériaux (3, 5, 7). — 4 heures *hbd. p.* : Hydraulique (4, 6, 8). — *S. r.* Collignon, Résistance des matériaux, Paris, 1877. Résal, Traité de mécanique générale, t. V. Grashof, Die Festigkeitslehre, Berlin, 1866. Karl von Ott, Das graphische Rechnen und die graphische Statik, Prag, 1879. Baisé, Théorie de la résistance des matériaux (en langue russe), Saint-Pétersbourg, 1897. Collignon, Hydraulique, Paris, 1877. Bresse, Cours de mécanique appliquée, 2e partie, Paris, 1876. Maximenko, Cours d'hydraulique (en langue russe), Saint-Pétersbourg, 1881. Evnevitsch, Hydraulique (en langue russe), Saint-Pétersbourg, 1891.

P.-d. E. A. Bolotoff, 2 heures hebdomadaires durant l'année : Théorie de l'élasticité (5, 7) (6, 8). — *S. r.* : G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik, Leipzig, 1876. A. Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper, Leipzig, 1862. S. W. Thomson, and P. G. Tait, Treatise on natural Philosophy, p. II, Cambridge, 1883.

P.-d. N. J. Merzaloff, 7 heures *hbd. a.* : *a)* Géométrie descriptive, 2 heures (1) ; *b)* Théorie des mécanismes, 2 heures (5) ; *c)* Dessin linéaire, 2 heures (3, 5, 7) ; *d)* Exercices de tracé des machines, 1 heure (5, 7). — 7 heures *hbd. p.* : *a)* Exercices de géométrie descriptive,

2 heures (2); *b)* Théorie générale des machines, 2 heures (6); *c)* Dessin linéaire, 2 heures (4, 6, 8); *d)* Exercices de tracé des machines, 1 heure (6, 8). — *S. r.* REN CLAUX, Theoretische Kinematik. GRASHOF, Theoretische Maschinenlehre, Bd. II. SONGAYLO, Géométrie descriptive. KHOUDIAKOFF, Détails des machines (en langue russe). BACH, Détails des machines (en langue russe). KHOUDIAKOFF, Résistance des matériaux (en langue russe).

P.-d. J. B. STANKIEWITSCH 3 heures *hdd. a.* : Intégration des équations de la mécanique (7).— 3 heures *hbd. p.* : Hydrodynamique (cours spécial) (8). — *S. r.* JACOBI, Vorlesungen über Dynamik, Berlin, 1866. COLLIGNON : Mécanique, t. IV, Paris. GRAINDORGE, Intégration des équations de la mécanique, Bruxelles, 1889. PAINLEVÉ, Leçons sur l'intégration des équations de la mécanique. Paris, 1895. LAMB, Einleitung in die Hydrodynamik, uebersetzt von Reiff, Freiburg, 1884. JOUKOVSKY, Leçons d'hydrodynamique (en langue russe). Moscou, 1886. BASSET, A treatise on hydrodynamics, Cambridge, 1888.

P. o. W. C. CERASKI. 6 heures *hbd. a.* : *a)* Astronomie sphérique, 2 heures (3); *b)* Astronomie physique, 2 heures (3, 5); *c)* Exercices d'astronomie sphérique, 2 heures (5). — 7 heures *hbd. p.* : *a)* Astronomie sphérique, 2 heures (4); *b)* Astronomie physique, 2 heures (4, 6); *c)* Astronomie pratique avec les observations faites à l'Observatoire, 3 heures (6, 8). — *S. r.* BRÜNNOW, Lehrbuch der sphärischen Astronomie. A. SAWITSCH, Astronomie sphérique (en langue russe), Saint-Pétersbourg, 1874. M. CHANDRIKOFF, Cours d'astronomie sphérique (en langue russe), 2[e] édition, Kiew, 1889. N. ZINGUER, Cours d'astronomie, partie pratique et partie théorique (en langue russe), Saint-Pétersbourg, 1899. M. KHANDRIKOFF, Astronomie physique (en langue russe), Kiew, 1886. NEWCOMB, Astronomie populaire (traduit en langue russe par M. Drehnteln), Saint-Pétersbourg, 1894.

P.-d. P. C. STERNBERG. 4 heures hebdomadaires durant l'année : Géodésie supérieure avec les occupations pratiques faites à l'Observatoire (5, 7) (6, 8). — *S. r.* : HELMERT, Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, I Bd., Leipzig, 1880. TH. A. SLOUDSKY, Leçons de géodésie supérieure (en langue russe). Moscou, 1894. N. ZINGUER, Cours de géodésie supérieure (en langue russe). Saint-Pétersbourg, 1898. M. KHANDRIKOFF, Théorie de la figure de la terre (en langue russe), Kiew, 1900. B. VITKOWSKY, Géodésie pratique (en langue russe), Saint-Pétersbourg, 1898.

P.-d. S. A. KASAKOFF. 2 heures hebdomadaires durant l'année : Mécanique céleste (5, 7) (6, 8). — *S. r.* : F. TISSERAND : Traité de mécanique céleste, t. I, Paris, 1888. O. DZIOBEK, Die mathematischen Theorien der Planeten-Bewegungen, Leipzig, 1888.

P. o. N. A. OUMOFF. 14 heures hebdomadaires durant l'année : a) Physique expérimentale : acoustique, optique, électricité, magnétisme, 4 heures (3, 4); b) Séminaire physique, 2 heures (3, 4); c) Occu-

pations pratiques faites au laboratoire physique, 8 heures [5, 7] [6, 8]. — *S. r.* : Chwolson, Cours de physique (en langue russe), t. II, 1898 (éditions grande et petite). Siloff, Cours de physique (en langue russe), 1897. A. Stoliétoff, Introduction à l'acoustique et à l'optique (en langue russe). Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. III, 1897. Graetz, Die Lehre von der Elektricität, 1900. Weiler, Lehrbuch der Physik, Bd. I, Magnetismus und Elektricität, 1901. A. B. Zinguer, Recueil des problèmes d'électricité et de magnétisme.

P. o. A. P. Sokoloff. 12 heures hebdomadaires durant l'année : *a*) Physique expérimentale : mécanique, phénomènes moléculaires, chaleur, 4 heures [1] [2] ; *b*) Occupations pratiques faites au laboratoire physique, 8 heures [3, 5, 7] [4, 6, 8]. — *S. r.* : Chwolson, Cours de physique, t. I et III (en langue russe), Saint-Pétersbourg, 1897-99. Siloff, Cours de physique, 1re partie (en langue russe), 3e édition, Varsovie, 1900. Kayser, Lehrbuch der Physik, 2-te Auflage, Stuttgart, 1900. Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik, 5-te Auflage, Bd. I u. II, Leipzig, 1895-96. Kohlrausch, Leitfaden der practischen Physik, 9-te Auflage, Leipzig, 1901. Wiedemann und Ebert, Physicalisches Practicum, 4-te Auflage, Leipzig, 1899. Ostwald, Hand-und Hilfsbuch zur Ausführung physico-chemischer Uebungen, Leipzig, 1893.

P. e. P. N. Lebedieff. 9 heures *hbd. a.* : *a*) Mouvement d'électricité dans les gaz, 1 heure [3, 5, 7] ; *b*) Recherches scientifiques faites au laboratoire, 8 heures [5, 7]. — 1 heure *hbd. p.* : Applications d'électricité [4, 6, 8]. — *S. r.* : Thomson, Electricitätsleitung in Gasen, Leipzig, 1900. Gérard, Cours d'électricité (en langue russe), Saint-Pétersbourg, 1898.

P.-d. N. P. Castiérin. 6 heures *hbd. a.* : *a*) Vibrations acoustiques et ondes, 4 heures [3, 5, 7] ; *b*) Séminaire physique, 2 heures [1]. — 6 heures *hbd. p.* : *a*) Théorie de la chaleur, 4 heures [6, 8] ; *b*) Séminaire physique, 2 heures [2]. — *S. r.* : Rayleigh, Theory of Sound. London, 1896. Helmholtz, Vorlesungen über die mathemat. Principien der Akustik, Leipzig, 1898. Clausius, Die mechanische Wärmetheorie, Braunschweig, 1887. Planck, Thermodynamik, Leipzig, 1897. Fourier, Théorie analytique de la chaleur. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie, Bd. I, II.

P.-d. P. B. Préobragensky. 4 heures *hbd. a.* : *a*) Théorie des vecteurs et ses applications à la mécanique, 2 heures [5, 7] ; *b*) Photographie et ses applications scientifiques, 2 heures [1, 3, 5, 7]. — 2 heures *hbd. p.* : Photographie et ses applications scientifiques [2, 4, 6, 8]. — S. r. : J. Zantschevsky, Théorie des torseurs (en langue russe), Odessa, 1889. P. Romer, Éléments fondamentaux de la méthode des quaternions (en langue russe), Kiew, 1868. Hoüel, Théorie élémentaire des quantités complexes, Paris, 1874. Tait, Elementares Handbuch der Quaternionen (uebersetzt von Scherff), Leipzig, 1880. A. P. Kotelnikoff, Calcul des torseurs et quelques-unes de ses applications à la géo-

métrie et à la mécanique (en langue russe), Kasan, 1895. A. Föppl, Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Electricität, Leipzig, 1894. J. M. Eder, Ausführliches Handbuch der Photographie, Halle, 1890-96. The chemistry of photography, by Meldola, London, 1891. Hugo Schroeder, Die Elemente der photographischen Optik, Berlin, 1891. Steiner, Die Photographie im Dienste des Ingenieurs, Wien, 1893. Pizzighelli, Die Anwendungen der Photographie, Halle, 1892.

P.-d. A. B. Zinguer, 2 heures *hbd. a.* : Fondements scientifiques d'électrotechnique [5, 7]. — 2 heures *hbd. p.* : Optique géométrique et théorie des instruments d'optique [4, 6]. — *S. r.* : A. Holtz, Die Schule des Elektrotechnikers, Leipzig, 1898. G, Ferraris, Wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik, Leipzig, 1901. P. Janet, Leçons d'électrotechnique générale, Paris, 1900. Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik, Band II, Abth. I, Braunschweig, 1898. E. Wallon, Leçons d'optique géométrique, Paris, 1900.

P. e. E. G. Leist. 7 heures *hbd. a.* : *a*) Météorologie et magnétisme terrestre, 3 heures [5]; *b*) Hydrologie, 1 heure [3, 5, 7]; *c*) Optique atmosphérique, 1 heure [5, 7]; *d*) Exercices pratiques de météorologie et de géographie physique, 2 heures [5, 7]. — 8 heures *hbd. p.* : *a*) Météorologie et magnétisme terrestre, 2 heures [6]; *b*) Météorologie théorique, 1 heure [6, 8]; *c*) Physique du globe, 1 heure [6, 8]; *d*) Cours réitéré de météorologie, 2 heures [8]; *e*) Exercices pratiques de météorologie et de géographie physique, 2 heures [6, 8]. — *S. r.* : Latschinoff, Fondements de la météorologie (en langue russe), Saint-Pétersbourg, 1895. Woieikoff, Climats du globe (en langue russe), Saint-Pétersbourg, 1884. Rakhmanoff, Cours succinct de météorologie (en langue russe), Moscou, 1902. Hann, Lehrbuch der Meteorologie, Leipzig, 1901. Sprung, Lehrbuch der Meteorologie, Hamburg, 1885.

P.-d. G. C. Rakhmanoff. 2 heures *hbd. a.* : *a*) Electricité atmosphérique, 1 heure [5, 7]; *b*) Recherche sur les couches supérieures de l'atmosphère à l'aide des ballons et des cerf-volants, 1 heure [5, 7]. — 2 heures *hbd. p.* : *a*) Recherche sur les couches supérieures de l'atmosphère à l'aide des ballons et des cerfs-volants, 1 heure [6, 8]; *b*) Orages, aurores polaires, nuages lumineux, 1 heure [6, 8].

P. e. W. Th. Louguinin. 2 heures *hbd. a.* : Exercices pratiques de thermométrie, de calorimétrie, de cryoscopie et d'autres sections de la chimie physique, 2 heures [5, 7]. — 3 heures *hbd. p.* : *a*) Cours élémentaire de thermométrie, 1 heure [6, 8]; *b*) Exercices pratiques de thermométrie, de calorimétrie, de cryoscopie et d'autres sections de la chimie physique, 2 heures [6, 8]. — *S. r.* : Yan, Fondements de la thermochimie (en langue russe). Berthelot, Mécanique chimique. Berthelot, Thermochimie, lois et données numériques. Nernst, Theoretische Chemie. Ostwald, Lehrbuch der allgemeinen Chemie. Khrutscheff, Equilibre chimique (en langue russe). Planck, Grundriss der

Thermochemie. THOMSEN, Thermochemische Untersuchungen. GUILLAUME, Traité de thermométrie. WÜLLNER, Lehrbuch der physik. Wärme. POUILLET, Lehrbuch der physik. Wärme. LOUGUININ, Description des méthodes principales de la chaleur de combustion (en langue russe). WIEDEMANN, Physikalisches Prakticum.

P.-d. J. A. KABLOUKOFF. 5 heures *hbd. a. a)* Chimie générale. I partie (chimie inorganique), 2 heures [1] ; *b)* Exercices pratiques de chimie générale, 3 heures [1, 3]. — 7 heures *hbd. p.* : *a)* Chimie générale, I partie (chimie inorganique), 2 heures [2] ; *b)* Chimie physique, 2 heures [4, 6, 8] ; *c)* Exercices pratiques de chimie générale, 3 heures [2, 4]. *S. r.* : D. J. MENDELEEFF, Fondements de la chimie (en langue russe). J. A. KABLOUKOFF, Eléments fondamentaux de la chimie inorganique (en langue russe). OSTWALD, Grundriss der allgemeinen Chemie. J. KABLOUKOFF, Eléments fondamentaux de la chimie physique ; livraisons 1re et 2e. S. JOUKOVSKY, Secours aux exercices pratiques de chimie inorganique.

P.-d. A. N. REFORMATSKY. 2 heures hebdomadaires durant l'année : Chimie générale, II partie (chimie organique) [3, 4]. — *S. r.* : REFORMATSKY, Cours élémentaire de chimie organique, 5e édition (en langue russe), Kiew, 1901. REMSEN, Introduction à l'étude de chimie organique, 2e édition (en langue russe), Moscou, 1900. MENSCHOUTKIN, Leçons de chimie organique (en langue russe), 4e édition, Saint-Pétersbourg, 1901. V. MEYER und P. JACOBSON, Lehrbuch der organischen Chemie.

P.-d. S. G. KRAPIVIN. 4 heures hebdomadaires durant l'année : a) Chimie générale, 2 heures [1] [2] ; b) Exercices pratiques de chimie générale, 2 heures [1] [2]. — *S. r.* : ERDMANN : Lehrbuch der anorganischen Chemie, 2-te Auflage, Braunschweig, 1900. POTILITZIN, Cours élémentaire de chimie (en langue russe). Varsovie, 1900. MENDELEEFF, Fondements de la chimie (en langue russe), 6e édition.

P.-d. P. P. ORLOFF. 2 heures hebdomadaires durant l'année : Chimie générale [1] [2]. — *S. r.* : MENDELEEFF, Fondements de la chimie (en langue russe), 6e édition, Saint-Pétersbourg, 1895. POTILITZIN, Cours élémentaire de chimie, 1900. REMSEN, Introduction à l'étude de chimie (chimie inorganique) (en langue russe), Moscou, 1901. KABLOUKOFF, Eléments fondamentaux de la chimie inorganique (en langue russe), Moscou, 1900. OSTWALD, Grundriss der allgemeinen Chemie, 3 Aufl., 1899.

V. V. BOBYNIN (Moscou).

LA LOGIQUE SYMBOLIQUE

En général, on regarde la logique symbolique comme une étude très abstraite, très difficile et d'une utilité assez restreinte. Je vais expliquer ici les premiers principes d'un système symbolique qui est, au contraire, extrêmement simple et d'une utilité aussi incontestable que celle des mathématiques.

1. Le symbole A^B indique une *proposition* dont A est le sujet et B le prédicat. Il affirme que A est une des personnes ou des choses, B_1, B_2, B_3, etc. formant la classe B. Le symbole A_B indique l'individu, ou un individu, de la série A_1, A_2, A_3, etc. (formant la classe A), dont on peut affirmer A^B. Le symbole A^C_B veut dire $(A_B)^C$; il indique une proposition dont A_B est le sujet et C le prédicat. Prenons l'exemple suivant : Soit A = Alfred, B = boulanger, C = catholique. Alors

A^B affirme que *Alfred* est *boulanger*, tandis que A_B n'affirme rien; il indique simplement *Alfred* le *boulanger*. Il y a plusieurs personnes, A_1, A_2, etc., dont chacune s'appelle *Alfred*, et le symbole A_B indique l'individu, ou un individu de cette série, qui est *boulanger*.

A^C_B veut dire $(A_B)^C$; il affirme que *Alfred* le *boulanger* (ou le boulanger Alfred) est *catholique*.

A^B_C veut dire $(A_C)^B$; il affirme que *Alfred* le *catholique* est *boulanger*.

B^A_C veut dire $(B_C)^A$; il affirme que le *boulanger catholique* s'appelle *Alfred*.

2. Que le symbole α indique la proposition A^B; et le symbole β la proposition C^D. Alors, $\alpha\beta$ veut dire A^BC^D; il affirme A^B

et aussi C^D; tandis que $\alpha + \beta$ veut dire $A^B + C^D$ et n'affirme que l'alternative A^B ou C^D. Par exemple, soit $A = $ *Alfred*, $B = $ *boulanger*, $C = $ *Charles*, $D = $ *docteur*. Alors :

$\alpha\beta$, comme son synonyme A^BC^D, affirme que « *Alfred* est *boulanger*, et *Charles*, *docteur* »; tandis que $\alpha + \beta$, comme son synonyme $A^B + C^D$, affirme que « ou *Alfred* est *boulanger* ou *Charles docteur* ». Quant à la question si les deux propositions A^B et C^D sont toutes les deux vraies, l'alternative $A^B + C^D$ ne dit rien; elle affirme simplement que, au moins, *une* des deux propositions est vraie.

3. Avant d'aller plus loin, je vais appliquer ces principes à l'algèbre élémentaire. Soit A et B deux nombres ou fractions; soit $P = $ *positif;* soit $N = $ *négatif;* soit $Z = $ *zéro*. Si nous excluons de notre univers toute quantité imaginaire ou infinie, nous aurons les formules suivantes :

(1) $(AB)^P = A^PB^P + A^NB^N$; (2) $(AB)^N = A^NB^P + A^PB^N$;

(3) $(AB)^Z = A^Z + B^Z = A^Z + (A^P + A^N)B^Z = A^Z(B^P + B^N) + B^Z$;

(4) $(Ax - B)^P = \left\{A\left(x - \frac{B}{A}\right)\right\}^P = A^P\left(x - \frac{B}{A}\right)^P + A^N\left(x - \frac{B}{A}\right)^N + A^ZB^N$;

(5) $(Ax - B)^N = \left\{A\left(x - \frac{B}{A}\right)\right\}^N = A^N\left(x - \frac{B}{A}\right)^P + A^P\left(x - \frac{B}{A}\right)^N + A^ZB^P$.

Pour donner un autre exemple, supposons qu'on cherche les limites de x qui résultent des données $3x^2 > \frac{25}{4}x - 3$.

Les données

$$= \left(3x^2 - \frac{25}{4}x + 3\right)^P = (12x^2 - 25x + 12)^P$$

$$= \left\{(4x - 3)(3x - 4)\right\}^P = (4x - 3)^P(3x - 4)^P + (4x - 3)^N(3x - 4)^N$$

$$= \left(x > \frac{3}{4}\right)\left(x > \frac{4}{3}\right) + \left(x < \frac{3}{4}\right)\left(x < \frac{4}{3}\right)$$

$$= \left(x > \frac{4}{3}\right) + \left(x < \frac{3}{4}\right);$$

car $x > \frac{4}{3}$ implique $x > \frac{3}{4}$, et $x < \frac{3}{4}$ implique $x < \frac{4}{3}$. Donc x doit être ou au-dessus de $\frac{4}{3}$ ou au-dessous de $\frac{3}{4}$. Un dernier exemple pour finir. Des données $x^2 < 9 - a^2$ déduire les limites de x et de a.

Les données

$$= \{x^2 - (9-a^2)\}^{N} = \{(x-\sqrt{9-a^2})(x+\sqrt{9-a^2})\}^{N}$$
$$= (x-\sqrt{9-a^2})^{N}(x+\sqrt{9-a^2})^{P}(9-a^2)^{P}$$
$$= (x-\sqrt{9-a^2})^{N}(x+\sqrt{9-a^2})^{P}(a^2-9)^{P}$$
$$= (x-\sqrt{9-a^2})^{N}(x+\sqrt{9-a^2})^{P}(a-3)^{P}(a+3)_{P}.$$

soit

$$x_1 = \sqrt{9-a^2},\ x_2 = -\sqrt{9-a^2},\ a_1 = 3,\ a_2 = -3.$$

Les limites sont

$$(x_1 > x > x_2)\ (a_1 > a > a_2)$$

4. Les symboles $(A^B)'$ et A^{-B} sont synonymes; chacun représente la négation de A^B et affirme que A ne se trouve pas dans la série B_1, B_2, B_3, etc. Supposons que A^B affirme que « *Albert* ira à *Bordeaux* », c'est-à-dire que Albert est une des personnes B_1, B_2, etc., qui iront à Bordeaux. Alors, $(A^B)'$, ou son synonyme A^{-B}, nie A^B et affirme que « *Albert* n'ira *pas* à *Bordeaux* ».

5. Dans les exemples précédents, le sujet A d'une proposition A^B était un être concret. Dans la logique *pure* ou *abstraite*, le sujet d'une proposition A^B est lui-même une proposition, et l'exposant B affirme quelque attribut, tel que *vrai*, *faux*, *certain*, etc. Les cinq mots *vrai*, *faux*, *certain*, *impossible*, *variable* (possible mais incertain), se présentent si souvent que je les représente d'une manière permanente respectivement par les cinq lettres grecques τ, ι, ε, η, θ. Par exemple, $A^{\tau}B^{\iota}C^{\varepsilon}D_{\eta}E^{\theta}$ affirme que A est *vrai*, B *faux*, C *certain*, D *impossible*, E *variable*.

6. La proposition A^{τ} (A est *vrai*) ne doit pas être confondue avec A^{ε} (A est *certain*), ni A^{ι} (A est *faux*) avec A^{η} (A est *impossible*). Le symbole A^{τ} affirme que A est vrai, *au moins dans le cas considéré;* A^{ε} affirme non seulement que A est vrai dans le cas considéré mais aussi que A est *certain*, c'est-à-dire vrai dans *toutes les circonstances compatibles avec nos données et nos définitions*. Pareillement, le symbole A^{ι} affirme que A est faux *au moins dans le cas considéré*; tandis que A^{η} affirme non seu-

lement que A est faux dans le cas considéré mais aussi que A *contredit quelque donnée ou définition* et qu'il est par conséquent *impossible*. Dans le langage des probabilités, A^{ε} affirme que la probabilité de A est 1 ; A^{η} affirme que la probabilité de A est 0 ; et A^{θ} affirme que la probabilité de A est quelque fraction au-dessous de 1 et au-dessus de 0. Donc A^{θ} nie A^{ε} et nie A^{η} de sorte que nous avons $A^{\theta} = A^{-\varepsilon} A^{-\eta}$ (voir §§ 4 et 23 avec la note à la fin).

7. Le symbole $\alpha : \beta$ (qui s'appelle une *implication*) représente la proposition $(\alpha\beta')^{\eta}$, ou son synonyme $(\alpha' + \beta)^{\varepsilon}$. Pour en rendre claire la signification, supposons que α représente la proposition A^{B}, et que β représente la proposition C^{D}. Alors $\alpha : \beta$ exprime les quatre affirmations suivantes, qui seront considérées ici comme équivalentes ; (1) il affirme que A^{B} *implique* C^{D} ; (2) il affirme que *si* A *est* B (c'est-à-dire appartient à la *classe* B), *alors* C *est* D ; (3) il affirme que A *ne peut pas être* B *sans que* C *soit* D ; (4) il affirme qu'*il est certain que ou* A *n'est pas* B, *ou* C *est* D.

8. Le symbole A^{xy} veut dire $(A^{x})^{y}$; le symbole A^{xyz} veut dire $(A^{xy})^{z}$; et ainsi de suite. Par exemple, $A^{\varepsilon\iota}$ veut dire $(A^{\varepsilon})^{\iota}$; il affirme qu'*il est faux que* A *soit certain* ; tandis que $A^{\iota\varepsilon}$ veut dire $(A^{\iota})^{\varepsilon}$; il affirme qu'*il est certain que* A *est faux*. Si nous considérons le symbole $(\alpha = \beta)$ comme l'équivalent de $(\alpha : \beta)$ $(\beta : \alpha)$, nous aurons $A^{\iota\varepsilon} = A^{\eta}$, $A^{\iota\eta} = A^{\varepsilon}$, $A^{\varepsilon\iota} = A^{\eta} + A^{\theta}$, $A^{\eta\iota} = A^{\varepsilon} + A^{\theta}$ (voir § 10).

9. La définition du symbole $\alpha : \beta$ (voir § 7) nous conduit au paradoxe $(\eta : \alpha)^{\varepsilon}$ $(\alpha : \varepsilon)^{\varepsilon}$, lequel affirme que les deux implications $\eta : \alpha$ et $\alpha : \varepsilon$ sont toujours vraies, quelle que soit la proposition α. Cependant, la preuve en est facile, car

$$\eta : \alpha = (\eta\alpha')^{\eta} = \eta^{\eta} = \varepsilon$$
$$\alpha : \varepsilon = (\alpha\varepsilon')^{\eta} = (\alpha\eta)^{\eta} = \eta^{\eta} = \varepsilon.$$

La formule $(\varepsilon')^{\eta}$, que nous supposons ici, n'a pas besoin de preuve. Par exemple, la négation de la certitude $(2 \times 3 = 6)$, à savoir : $(2 \times 3 \neq 6)$, est évidemment une impossibilité. Nous avons aussi les formules $(\eta')^{\varepsilon}$ et $(\theta')^{\theta}$. Pour donner un exemple

concret de la dernière, supposons que la probabilité de la variable θ soit *deux tiers*; la probabilité de sa négation θ' est nécessairement *un tiers*, de sorte que θ' est aussi une variable.

10. Le symbole $(\alpha = \beta)$ est l'équivalent de $(\alpha : \beta)(\beta : \alpha)$. Il n'affirme nécessairement pas que les deux propositions α et β sont synonymes, en ce sens qu'elles auraient la même signification. Une identité absolue est affirmée, non par le symbole $(\alpha = \beta)$, mais par le symbole $(\alpha \equiv \beta)$; de sorte que nous avons toujours $(\alpha \equiv \beta) : (\alpha = \beta)$, mais non pas nécessairement $(\alpha = \beta) : (\alpha \equiv \beta)$. Néanmoins, l'affirmation $(\alpha = \beta)$ étant en général suffisante pour notre raisonnement, nous l'employons souvent dans des cas où nous pourrions employer $(\alpha \equiv \beta)$, comme nous employons quelquefois $\alpha : \beta$ au lieu de $(\alpha = \beta)$ quand nous n'avons pas besoin du second facteur $\beta : \alpha$. Il résulte de notre définition d'une implication (§ 7) que nous avons toujours les formules $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2)^{\varepsilon}$ et $(\eta_1 = \eta_2)^{\varepsilon}$, même lorsque la certitude ε_1 est différente de la certitude ε_2, et l'impossibilité η_1 différente de l'impossibilité η_2. Mais quand nous avons deux variables θ_1 et θ_2, l'équivalence $(\theta_1 = \theta_2)$ n'est pas nécessairement vraie.

11. Les propositions A^{τ} et A sont équivalentes, en ce sens que *chacune implique l'autre* (voir § 7); mais elles ne sont pas synonymes, en ce sens que chacune pourrait être *substituée* à l'autre dans n'importe quelle expression sans en changer la signification. Par exemple, supposons que A représente θ_{τ}, c'est-à-dire une variable *qui est vraie dans le cas considéré* quoi qu'elle ne soit pas toujours vraie. Nous aurons

$$(A^{\tau})^{\varepsilon} = (\theta_{\tau}^{\tau})^{\varepsilon} = \varepsilon^{\varepsilon} = \varepsilon;\ \text{mais}\ A^{\varepsilon} = \theta_{\tau}^{\varepsilon} = \eta;$$

car, dans le premier cas, la proposition θ_{τ}^{τ}, qui affirme qu'une *variable vraie est vraie*, est une vérité évidente, et, par conséquent, une proposition de la classe ε; et dans le second cas, $\theta_{\tau}^{\varepsilon}$ est une impossibilité, puisque *toute variable*, qu'elle soit une variable θ_{τ} ou une variable θ_{ι}, est exclue (par définition) de la classe ε. Pareillement, quoique nous ayons l'équivalente $(A^{\iota} = A')$, en ce sens que A^{ι} implique A' et que A' implique A^{ι}, on ne peut pas toujours substituer A^{ι} à A', ni A' à A^{ι}, sans changer le sens de l'expression où l'un ou l'autre se trouve.

Ces paradoxes ne se présentent pas dans le langage ordinaire. Par exemple, il n'est guère possible de trouver l'ombre d'une différence de sens entre « il est *Américain* » et « il est vrai qu'il est Américain », ou entre « il n'est pas Américain » et « il est faux qu'il soit Américain ».

Mais la logique symbolique fait pour la raison ce que fait le télescope ou le microscope pour l'œil nu.

12. — Le symbole $\alpha\,!\,\beta$ (qu'on peut appeler une *implication inverse*) affirme que la proposition α est impliquée par la proposition β. Il est donc synonyme de $\beta : \alpha$. Le symbole $\alpha : \beta : \gamma$ veut dire $(\alpha : \beta)\,(\beta : \gamma)$; et le symbole $\alpha\,!\,\beta\,!\,\gamma$ veut dire $(\alpha\,!\,\beta)$ $(\beta\,!\,\gamma)$. On définit de même $\alpha : \beta : \gamma : \delta$, qu'on peut appeler une *chaîne déductive*, et $\alpha\,!\,\beta\,!\,\gamma\,!\,\delta$, qu'on peut appeler une *chaîne inductive*.

13. — Un des principes sur lesquels est fondé mon système est le principe que l'on peut changer le sens de n'importe quel symbole, ou de n'importe quel arrangement de symboles, pour aider ou abréger notre raisonnement, pourvu que ce changement de sens soit accompagné d'une nouvelle définition. N'est-ce pas cette variabilité de signification qui distingue l'algèbre de l'arithmétique ?

En arithmétique le même symbole $\left(\text{par exemple } 3 \text{ ou } \frac{2}{5}\right)$ indique toujours le même nombre ou fraction ; tandis qu'en algèbre le même symbole (par exemple x) peut représenter un nombre 6 dans un problème, 8 dans un autre, $5 + \frac{2}{3}$ dans un autre, et ainsi de suite. En suivant ce principe, nous allons maintenant changer la signification du symbole A_B, qui sera employé à l'avenir (jusqu'à nouvelle définition) comme synonyme de l'implication $A : B$. La négative de A_B sera représentée par A_{0B}, ou par $(A_B)'$, de sorte que nous avons

$$A_B = A : B = (AB')^{\eta} = (A' + B)^{\varepsilon}$$
$$A_{0B} = (A_B)' = (A : B)' = (AB')^{-\eta}.$$

14. — Un symbole de la forme $F(x)$ ou $f(x)$ ou $\varphi(x)$, etc., s'appelle une *fonction de x*.

Il représente *une expression quelconque contenant le symbole x*.

Un symbole de la forme $F(x, y)$ ou $\varphi(x, y)$, etc., s'appelle *une fonction de x et de y.*

Il représente *une expression quelconque contenant les symboles x et y.* Pareillement, $F(x, y, z)$ s'appelle *une fonction de x*, y, z ; et ainsi de suite. Supposons que nous ayons une fonction $\varphi(x)$; alors des symboles tels que $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\alpha + \beta)$, $\varphi(A_B)$ représentent respectivement ce que l'expression $\varphi(x)$ devient (1) lorsque α est substitué à x ; (2) lorsque $\alpha + \beta$ est substitué à x ; (3) lorsque A_B est substitué à x*; les autres mots, ou autres symboles, de l'expression restant les mêmes qu'auparavant.* Pareillement, si nous avons une expression quelconque indiquée par $\varphi(x, y, z)$, le symbole $\varphi(\alpha, \alpha\beta, \beta^{\varepsilon})$ indiquera ce que $\varphi(x, y, z)$ devient lorsque α est substitué à x, $\alpha\beta$ à y, et β^{ε} à z. Les exemples concrets suivants aideront à faire comprendre ces définitions.

Soit α = artiste, β = buffle, γ = gorille ; et employons le symbole $\varphi(\alpha, \beta)$ pour représenter la proposition, l'*artiste* a tué le *buffle.* Alors le symbole $\varphi(\alpha, \gamma)$ affirmera que l'*artiste* a tué le *gorille ;* le symbole $\varphi(\beta, \alpha)$ affirmera que le *buffle* a tué l'*artiste* ; et $\varphi(\gamma, \beta)$ affirmera que la *gorille* a tué le *buffle.*

Si nous représentons la formule $A_x + B_x : (AB)_x$ par le symbole $\varphi(:)$; alors $\varphi(=)$ représentera $A_x + B_x = (AB)_x$. La formule $\varphi(:)$ est toujours vraie, quelles que soient les propositions A, B, x; mais la proposition $\varphi(=)$ n'est pas toujours vraie ; elle est fausse, par exemple, lorsque $A = \theta$, $B = \theta'$, $x = \eta$; car alors elle devient

$$\theta_{\eta} + (\theta')_{\eta} = (\theta\theta')_{\eta},$$

ce qui est faux, car

$$\theta_{\eta} = \theta : \eta = (\theta\eta')^{\eta} = (\theta\varepsilon)^{\eta} = \theta^{\eta} = \eta,$$

$$(\theta')_{\eta} = \theta' : \eta = (\theta'\varepsilon)^{\eta} = (\theta')^{\eta} = \theta^{\varepsilon} = \eta, \text{ [car } (\alpha')^{\eta} = \alpha^{\varepsilon}]$$

$$(\theta\theta')_{\eta} = \eta_{\eta} = \eta : \eta = \varepsilon \text{ (voir § 9).}$$

Donc, dans ce cas la proposition $\varphi(=)$ devient $\eta + \eta = \eta : \eta$, ce qui est faux, car $\eta + \eta = \eta$, tandis que $\eta : \eta = \varepsilon$.

Le symbole $\varphi^{\alpha}(x)$ veut dire $\{\varphi(x)\}^{\alpha}$. Par exemple, φ^{ε} affirme que $\varphi(x)$ est une certitude.

15. — Pour empêcher une multiplicité inutile de parenthèses j'emploie le symbole A :: B comme l'équivalent de (A = B), mais

avec moins de portée. Par exemple $(A = B :: C)$ veut dire $\{A = (B :: C)\}$ et non pas $\{(A = B) :: C\}$, lequel peut être exprimé sans parenthèses par le symbole $A :: B = C$. Pour économiser les parenthèses nous posons la convention que $A :: B$ a la même portée que $A : B$, mais plus de portée que $A + B$. Par exemple, $A = B :: C : D + E$ affirme que A est équivalent à $B :: C : D + E$, et cette dernière expression veut dire $(B = C)\{C : (D + E)\}$, car $C : D + E$ veut dire $C : (D + E)$, et non pas $(C : D) + E$.

16. — Dans les formules suivantes (dont la plupart sont évidentes) le symbole A_B est employé comme synonyme de $A : B$; et le symbole A_{OB} veut dire $(A_B)'$; de sorte que nous avons

$$A_B = (A : B) = (AB')^{\eta} = (A' + B)^{\varepsilon}$$
$$A_{OB} = (A : B)' = (AB')^{-\eta} = (A' + B)^{-\varepsilon}.$$

(1) $(\alpha\alpha')^{\eta}\ (\alpha + \alpha')^{\varepsilon}$; (2) $\alpha = \alpha\alpha = \alpha + \alpha$; (3) $(\alpha^{\varepsilon} + \alpha^{\eta} + \alpha^{\theta})^{\varepsilon}$;
(4) $\alpha :: \beta = (\alpha : \beta)(\beta : \alpha)$; (5) $\alpha : \beta = \beta' : \alpha'$; (6) $\alpha^{\tau} : \beta^{\tau} = \beta^{\iota} : \alpha^{\iota}$;
(7) $(\alpha : \beta) : \alpha' + \beta$; (8) $(\alpha^{\tau} : \beta^{\tau}) : \alpha^{\iota} + \beta^{\tau}$; (9) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\gamma + \beta\gamma$:
(10) $(\alpha\beta)' = \alpha' + \beta'$; (11) $(\alpha + \beta)' = \alpha'\beta'$: (12) $(x : \alpha)(x : \beta) = x : \alpha\beta$;
(13) $\alpha_{\beta}\beta_{\gamma} : \alpha_{\gamma}$; (14) $(\alpha : \beta : \gamma) : (\alpha : \gamma)$; (15) $(\alpha + \beta)_{ox} = \alpha_{ox} + \beta_{ox}$:
(16) $\alpha : \alpha + \beta : \alpha + \beta + \gamma$; (17) $\alpha\,!\,\alpha\beta\,!\,\alpha\beta\gamma$; (18) $(\varepsilon')^{\eta}\ (\eta')^{\varepsilon}\ (\theta')^{\theta}$:
(19) $(\alpha + \beta)_x = \alpha_x\beta_x$; (20) $(\alpha + \beta)_x : \alpha_x + \beta_x : (\alpha\beta)_x$;
(21) $x_{\alpha\beta} : x_{\alpha} + x_{\beta} : x_{\alpha+\beta}$; (22) $\varepsilon : \alpha = \alpha^{\varepsilon}$; (23) $\alpha : \eta = \alpha^{\eta}$;
(24) $(\alpha : \beta) : (x_{\alpha} : x_{\beta})$; (25) $(\alpha : \beta) : (\beta_x : \alpha_x)$; (26) $\alpha_{\beta} = \alpha :: \alpha\beta$;
(27) $\alpha_{\beta} = \alpha + \beta :: \beta$; (28) $(\alpha : \beta) : (\alpha^{\varepsilon} : \beta^{\varepsilon})$; (29) $(\alpha : \beta_{\gamma}) : (\alpha\beta)_{\gamma}$.

17. — Nous allons maintenant examiner les syllogismes de la logique traditionnelle. Tout syllogisme valide n'est qu'un cas spécial de la formule générale $\alpha_{\beta}\beta_{\gamma} : \alpha_{\gamma}$, qui est l'abrégé de $(\alpha : \beta)(\beta : \gamma) : (\alpha : \gamma)$, et qui affirme que si α implique β, et β implique γ, alors α implique γ. (Voir §§ μ, 13). Dans cette formule les propositions α, β, γ peuvent avoir ou ne pas avoir le même sujet, et elles peuvent être, séparément ou en combinaison, des certitudes, des impossibilités, ou des variables.

Pour appliquer la formule aux syllogismes, nous supposons que les propositions α, β, γ ont toutes le même sujet, savoir, un individu P pris au hasard dans notre univers d'entités admissibles, P_1, P_2, P_3, etc. Ainsi les propositions α, β, γ sont les abrégés respectifs des propositions P^{α}, P^{β}, P^{γ}, qui affirment respectivement que P appartient à la classe α, que P appartient à la classe β, que P appartient à la classe γ. Comme dans les for-

mules du § 16, le symbole $\alpha_{0\beta}$ est synonyme de $(\alpha_\beta)'$ et de $(\alpha : \beta)'$. Ainsi nous aurons

$$\alpha_\beta = \alpha : \beta = P^\alpha : P^\beta = \text{tout } \alpha \text{ est } \beta \,;$$
$$\alpha_{0\beta} = (\alpha : \beta)' = (P^\alpha : P^\beta)' = \text{quelque } \alpha \text{ n'est pas } \beta \,;$$
$$\alpha_{\beta'} = \alpha : \beta' = P^\alpha : P-\beta = \text{nul } \alpha \text{ n'est } \beta \,;$$
$$\alpha_{0\beta'} = (\alpha : \beta')' = (P^\alpha : P-\beta)' = \text{quelque } \alpha \text{ est } \beta.$$

Que $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ représente la formule générale $\alpha_\beta \beta_\gamma : \alpha_\gamma$.

Alors si nous considérons comme équivalents les syllogismes qui ont des prémisses équivalentes et la même conclusion, ou des conclusions équivalentes, nous aurons

Barbara $= \varphi(\alpha, \beta, \gamma)$
Celarent $=$ Cesare $= \varphi(\alpha, \beta, \gamma')$
Darii $=$ Datisi $= \varphi(\beta, \gamma, \alpha')$
Ferio $=$ Festino $=$ Ferison $=$ Frésison $= \varphi(\alpha, \gamma, \beta')$
Camestres $=$ Camenes $= \varphi(\gamma, \beta, \alpha')$
Disamis $=$ Dismaris $= \varphi(\beta, \alpha, \gamma')$
Baroko $= \varphi(\alpha, \gamma, \beta)$
Bokardo $= \varphi(\beta, \alpha, \gamma)$.

De la formule $x : y = y' : x'$ il s'ensuit que pour chacun de ces syllogismes $\varphi(x, y, z) = \varphi(z', y', x')$.

Nous pouvons donc renverser l'ordre des termes de chaque syllogisme, si, en même temps, nous en changeons les signes. Par exemple, *Camestres* et *Camenes* équivalent chacun à $\varphi(\alpha, \beta', \gamma')$.

18. — Il y a quatre syllogismes de la logique traditionnelle qui ne sont pas valides, du moins sous les formes qu'on leur donne en général.

Ce sont *Darapti*, *Felapton*, *Fesapo* et *Bramantip*.

Pour les rendre valides il faut donner aux trois premiers une troisième prémisse $\beta^{-\eta}$ (voir § 4), et à *Bramantip* une troisième prémisse $\gamma^{-\eta}$.

Ainsi corrigés, ils deviennent, comme tous les autres, des cas spéciaux de la formule générale $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$. En employant les symboles $(\text{Darapti})_c$, $(\text{Felapton})_c$, etc., pour indiquer les syllogismes *corrigés*, nous aurons

$(\text{Darapti})_c = \varphi(\beta, \alpha\gamma, \eta)$
$(\text{Felapton})_c = (\text{Fesapo})_c = \varphi(\beta, \alpha\gamma', \eta)$
$(\text{Bramantip})_c = \varphi(\gamma, \beta\alpha', \eta)$.

Pour montrer la méthode générale de réduction, il suffit de prendre deux cas (1) celui de Darii et (2) celui de $(\text{Darapti})_c$.

$$\text{Darii} = \beta_\gamma\alpha_{0\beta'} : \alpha_{0\gamma'} = \beta_\gamma\alpha_{0\beta'}\alpha_{\gamma'} : \eta \;(\text{car } x : y' = x_y : \eta)$$
$$= \beta_\gamma\alpha_{\gamma'} : \alpha_{\beta'} = \beta_\gamma\gamma_{\alpha'} : \beta_{\alpha'} = \varphi(\beta, \gamma, \alpha')$$
$$(\text{Darapti})_c = \beta_\gamma\beta_\alpha\beta^{-\eta} : \alpha_{0\gamma'} = \beta_\gamma\beta_\alpha\beta_{0\eta} : \alpha_{0\gamma'}$$
$$= \beta_\gamma\beta_\alpha\beta_{0\eta}\alpha_{\gamma'} : \eta = \beta_\gamma\beta_\alpha\alpha_{\gamma'} : \beta_\eta$$
$$= \beta_{\gamma\alpha}\alpha_{\gamma'} : \beta_\eta = \beta_{\gamma\alpha}(\alpha\gamma)^\eta : \beta^\eta$$
$$= \beta_{\gamma\alpha}(\gamma\alpha)_\eta : \beta_\eta = \varphi(\beta, \gamma\alpha, \eta).$$

Pour prouver que *Darapti* sous sa forme ordinaire n'est pas nécessairement valide, nous n'avons qu'à montrer un seul cas où il est faux. Un tel cas est $\beta^\eta(\alpha\gamma)^\eta$, qui est le produit de deux facteurs parfaitement possibles et compatibles entre eux. En représentant *Darapti* sous sa forme ordinaire *non corrigée* par le symbole $(\textit{Darapti})_{-c}$, et en supposant que $\beta^\eta(\alpha\gamma)^\eta$, ou son synonyme $\beta_\eta(\alpha\gamma)^\eta$, soit vrai, nous aurons

$$(\text{Darapti})_{-c} = \beta_\gamma\beta_\alpha : \alpha_{0\gamma'} = \beta_{\gamma\alpha} : (\alpha\gamma)_{0\eta} = \eta_\eta : \eta_{0\eta}$$
$$= \varepsilon\,\eta = \eta\,;$$

car

$$\eta_\eta = \eta : \eta = (\eta\eta')^\eta = (\eta\varepsilon)^\eta = \varepsilon,$$

et

$$\eta_{0\eta} = (\eta_\eta)' = \varepsilon' = \eta.$$

Pareillement, on peut prouver que *Felapton*, *Fesapo*, *Bramantip* ne sont pas nécessairement valides sous leurs formes ordinaires. Par contre, la formule générale $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ dont on peut déduire tout syllogisme valide est (comme toutes les formules valides) une *certitude formelle*, et par conséquent vraie pour *toutes* les valeurs de α, β, γ, ou de leurs combinaisons. Prenons, par exemple, le cas $\alpha^\varepsilon\beta^\theta\gamma^\eta$. Nous aurons

$$\varphi(\varepsilon, \theta, \eta) = \varepsilon_\theta\theta_\eta : \varepsilon_\eta = \eta\eta : \eta = \eta : \eta = \varepsilon :$$

car

$$\varepsilon_\theta = (\varepsilon\theta')^\eta = (\theta')^\eta = \theta^\varepsilon = \eta\;;\text{ et } \theta_\eta = (\theta\eta')^\eta = (\theta\varepsilon)^\eta = \theta^\varepsilon = \eta\;;$$

et

$$\eta : \eta = \varepsilon \text{ (voir § 9)}.$$

19. La manière ordinaire d'exprimer un syllogisme ne me semble pas tout à fait correcte. Au lieu de dire, comme l'on fait en général, « Tout A est B, tout B est C, *donc* tout A est C »,

nous devrions dire « *Si* tout A est B, et si tout B est C, *alors* tout A est C ». Bien que les logiciens emploient presque toujours la première forme, c'est la seconde qui exprime leur vraie pensée. Sous la seconde forme, le syllogisme, comme je viens de le montrer, est toujours vrai indépendamment de la vérité ou de la fausseté de ses prémisses ou de sa conclusion ; car (en contraste avec la première forme) la seconde forme ne garantit ni la vérité des prémisses, ni la vérité de la conclusion ; elle affirme seulement qu'il est impossible que les prémisses soient vraies et (en même temps) la conclusion fausse (voir § 7). Soit P les deux prémisses, et Q la conclusion. La première forme affirme $P \therefore B$, qui équivaut à $P\,(P : Q)$; la seconde n'affirme que le second facteur $P : Q$, qui veut dire $(PQ')^{\eta}$ et qui est une certitude formelle. La forme $P \therefore Q$ est fausse dans le cas P^{η}, quelle que soit la conclusion Q ; tandis que la forme $P : Q$ est vraie dans ce cas comme dans tous les autres. Car en supposant $P = \eta$, nous aurons

$$P :.\, Q = P\,(P : Q) = \eta\,(\eta : Q) = \eta\varepsilon = \eta :$$
$$P\,;\,Q = \eta : Q = \varepsilon \text{ (voir § 9)}.$$

20. Le symbole $\frac{A}{B}$ indique *la probabilité que la proposition* A *soit vraie en supposant que* B *soit vrai ;* B étant une proposition quelconque compatible avec les données de notre problème, mais non nécessairement impliquée par elles.

Le symbole $\frac{A}{\varepsilon}$ indique *la probabilité que la proposition* A *soit vraie en ne supposant rien que les données du problème.* Le symbole $\delta\frac{A}{B}$, ou son synonyme δ (A, B), représente $\frac{A}{B} - \frac{A}{\varepsilon}$, et s'appelle la *dépendance de* A *par rapport à* B. Il indique l'augmentation ou (lorsqu'il est négatif) la diminution subie par la probabilité générale $\frac{A}{\varepsilon}$ quand la supposition B est ajoutée à nos données. Le symbole $\delta^0\frac{A}{B}$, ou son synonyme δ^0 (A, B) affirme que la dépendance de A par rapport à B est *zéro.* Dans ce cas on dit que la proposition A *est indépendante de* B, ce qui implique (voir 20, formule 1) que B est indépendante de A. Les symboles *a*, *b*, *c*, etc. représentent respectivement les probabilités $\frac{A}{\varepsilon}$, $\frac{B}{\varepsilon}$, $\frac{C}{\varepsilon}$, etc. ; et les symboles *a'*, *b'*, *c'*, etc., représentent respec-

tivement les probabilités $\frac{A'}{\varepsilon}$, $\frac{B'}{\varepsilon}$, $\frac{C'}{\varepsilon}$, etc. ; de sorte que nous avons $a' = 1 - a$, $b' = 1 - b$, etc.

Les diagrammes suivants expliquent les définitions adoptées.

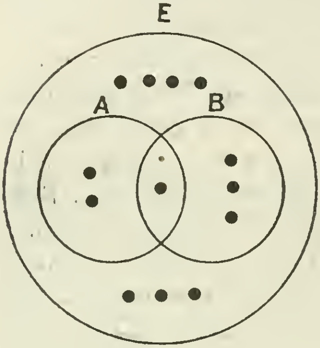


Fig. 1.

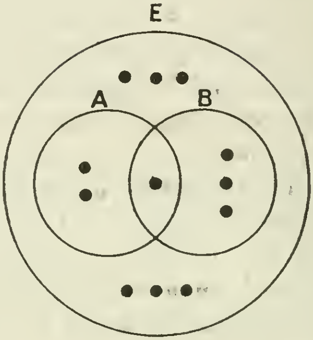


Fig. 2.

Que les symboles A, B affirment respectivement comme *propositions* qu'un point P (pris au hasard sur la totalité de points marqués dans le cercle E) sera dans le cercle A, qu'il sera dans le cercle B. Alors AB affirmera que P sera dans les deux cercles A et B ; AB' affirmera que P sera dans le cercle A, mais pas dans le cercle B ; et pareillement pour A'B et A'B'. Dans la figure 1, nous avons $\frac{A}{\varepsilon} = a = \frac{3}{13}$; $\frac{A'}{\varepsilon} = a' = \frac{10}{13}$; $\frac{AB}{\varepsilon} = \frac{1}{13}$; $\frac{AB'}{\varepsilon} = \frac{2}{13}$. Dans la figure 2, nous avons $\frac{A}{\varepsilon} = a = \frac{3}{12}$; $\frac{A'}{\varepsilon} = a' = \frac{9}{12}$; $\frac{AB}{\varepsilon} = \frac{1}{12}$; $\frac{AB'}{\varepsilon} = \frac{2}{12}$. Dans la figure 3, nous avons $\frac{A}{\varepsilon} = a = \frac{3}{11}$; $\frac{A'}{\varepsilon} = a' = \frac{8}{11}$; $\frac{AB}{\varepsilon} = \frac{1}{11}$; $\frac{AB'}{\varepsilon} = \frac{2}{11}$.

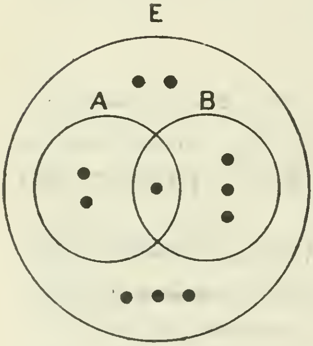


Fig. 3.

Il est évident aussi que :

(Fig. 1) $\delta \frac{A}{B} = \frac{A}{B} - \frac{A}{\varepsilon} = \frac{AB}{B} - \frac{A}{\varepsilon} = \frac{1}{4} - \frac{3}{13} = + \frac{1}{52}$

(Fig. 2) $\delta \frac{A}{B} = \frac{A}{B} - \frac{A}{\varepsilon} = \frac{AB}{B} - \frac{A}{\varepsilon} = \frac{1}{4} - \frac{3}{12} = 0$

(Fig. 3) $\delta \frac{A}{B} = \frac{A}{B} - \frac{A}{\varepsilon} = \frac{AB}{B} - \frac{A}{\varepsilon} = \frac{1}{4} - \frac{3}{11} = -\frac{1}{44}$.

Pareillement, dans la figure 1, nous avons $\delta \frac{B}{A} = +\frac{1}{39}$; dans la figure 2, $\delta \frac{B}{A} = 0$; et dans la figure 3, $\delta \frac{B}{A} = -\frac{1}{33}$.

Les formules suivantes sont faciles à vérifier :

(1) $\frac{A}{B} = \frac{a}{b} \cdot \frac{B}{A}$; $\delta \frac{A}{B} = \frac{a}{b} \delta \frac{B}{A}$;

(2) $\frac{A'}{B} = 1 - \frac{A}{B}$; $\delta \frac{A'}{B} = -\delta \frac{A}{B}$;

(3) $\frac{A}{B'} = \frac{a}{b'} - \frac{b}{b'} \cdot \frac{A}{B}$; $\delta \frac{A}{B'} = -\frac{b}{b'} \delta \frac{A}{B}$;

(4) $\frac{A'}{B'} = 1 - \frac{A}{B'}$; $\delta \frac{A'}{B'} = -\delta \frac{A}{B'} - \frac{b}{b'} \delta \frac{A}{B}$;

(5) $\frac{AB}{\varepsilon} = \frac{A}{\varepsilon} \cdot \frac{B}{A} = \frac{B}{\varepsilon} \cdot \frac{A}{B} = a \frac{B}{A} = b \frac{A}{B}$;

(6) $\frac{A+B}{\varepsilon} = \frac{A}{\varepsilon} + \frac{B}{\varepsilon} - \frac{AB}{\varepsilon} = a + b - a \frac{B}{A} = a + b - b \frac{A}{B}$;

(7) $\frac{A+B}{x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x} - \frac{AB}{x}$;

(8) $\frac{AB}{x} = \frac{A}{x} \cdot \frac{B}{xA} = \frac{B}{x} \cdot \frac{A}{xB}$.

21. Quand un exposant x est une fraction comprise entre 0 et 1, les symboles A^x, $\left(\frac{A}{B}\right)^x$, $\delta^x \frac{A}{B}$ ou δ^x (A, B) affirment respectivement comme propositions que *la probabilité de* A *est* x ; que *la probabilité de* A, *en supposant* B, *est* x ; que *la dépendance de* A *par rapport à* B *est* x. Le contexte empêchera toute ambiguïté ou confusion d'idées quand nous employons ainsi des exposants comme prédicats. Ces conventions nous donnent les formules suivantes :

(1) $A^x B^y : \left(\frac{A}{B} = \frac{x}{y} \cdot \frac{B}{A}\right)$

(2) $A^x B^y (AB)^z : (A + B)^{x+y-z}$

(3) $A^x B^y (A + B)^z : (AB)^{x+y-z}$

(4) $A^a B^b (AB)^x (A + B)^y : (x + y = a + b)$.

(5) $A^x B^y (AB)^{xy} : \delta^0 (A, B) : \delta^0 (B, A)$

(6) $A^x B^y \delta^0 (A, B) : (AB)^{xy}$

(7) $A^a B^b \left(\frac{A}{B}\right)^x \left(\frac{B}{A}\right)^y : \left(\frac{x}{y} = \frac{a}{b}\right)$

(8) $$A^a B^b \left(\frac{A}{B}\right)^x \left(\frac{A}{B'}\right)^y : (bx + b'y = a)$$

(9) $$A^a B^b \left(\frac{A}{B}\right)^x \left(\frac{A'}{B'}\right)^y : (bx - b'y = a - b' = b - a')$$

(10) $$\left(\frac{A}{B}\right)^x : \left(\frac{A'}{B}\right)^{1-x}$$

(11) $$\left(\frac{A}{B} = \frac{B}{A}\right) : \left(\frac{A}{B}\right)^0 + (a = b) : (AB)^\eta + (a = b)$$

(12) $$\left(\frac{A}{B} = \frac{A}{B'}\right) : \delta^0 \frac{A}{B} : \delta^0 \frac{B}{A}$$

(13) $$\delta^0 (A, B) = \delta^0 (B, A) = \left(\frac{A}{B} = \frac{A}{\varepsilon}\right) = \left(\frac{A}{B} = \frac{A}{B'}\right).$$

22. J'appelle une proposition une *certitude formelle* quand elle résulte nécessairement de nos définitions ou conventions de langage sans autres données ; une *impossibilité formelle* quand elle contredit quelque définition ou convention de langage ; et une *variable formelle* quand elle n'est ni formellement certaine ni formellement impossible. Une proposition est une *certitude matérielle* quand elle résulte nécessairement de quelques données spéciales extérieures à nos définitions ou conventions de langage : une *impossibilité matérielle* quand elle contredit quelques données spéciales extérieures à nos définitions ou conventions de langage. Les symboles A^ε, A^η affirment respectivement que A est une *certitude*, que A est une *impossibilité*, sans dire si la certitude ou impossibilité est formelle ou matérielle. Toutes les *formules* que j'ai données ici sont des certitudes formelles.

23. Quand une proposition n'est ni formellement certaine ni formellement impossible, elle peut être une *certitude matérielle*, une *impossibilité matérielle*, ou une *variable matérielle*, selon nos données. Ainsi nous pouvons avoir des propositions telles que $A^{\varepsilon\varepsilon}$ (il est certain que A est certain), $A^{\eta\theta}$ (il n'est ni certain ni impossible que A soit impossible), $A^{\varepsilon\theta\iota}$ (il est faux qu'il n'est ni certain ni impossible que A soit certain), et pareillement pour n'importe combien d'exposants ou prédicats successifs. Prenons les exemples concrets suivants :

En fixant notre attention sur une de ces trois figures, prenons comme donnée que le point P est pris au hasard sur les cinq

points marqués dans le cercle E, et convenons que le symbole A (comme proposition) affirme que le point P, pris au hasard, sera un des points marqués dans le cercle A. Il est évident que si nous prenons la figure 1 nous aurons A^{ε}, tandis que dans la figure 2 nous aurons A^{θ}, et que dans la figure 3, nous aurons A^{η}. Car dans ces trois cas les probabilités respectives de A sont $1, \frac{2}{5}, 0$.

Mais maintenant, au lieu de prendre une figure *fixe*, prenons une des trois figures *au hasard*, et convenons que les symboles F_1, F_2, F_3 (comme *propositions*) affirment respectivement que

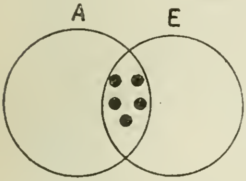


Fig. 1.

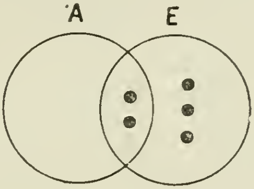


Fig. 2.

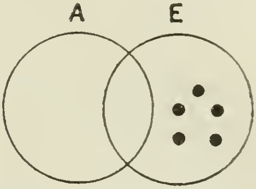


Fig. 3.

c'est la figure 1 qui se présentera, que c'est la figure 2, que c'est la figure 3. Puisque ces trois figures sont les seules de notre univers limité, nous avons $(F_1 + F_2 + F_3)^{\varepsilon}$, de sorte que

$$A^{\varepsilon} = A^{\varepsilon}(F_1 + F_2 + F_3) = A^{\varepsilon}F_1 + A^{\varepsilon}F_2 + A^{\varepsilon}F_3,$$

et, par conséquent (voir § 20, formule 5),

$$\frac{A^{\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{F_1}{\varepsilon} \cdot \frac{A^{\varepsilon}}{F_1} + \frac{F_2}{\varepsilon} \cdot \frac{A^{\varepsilon}}{F_2} + \frac{F_3}{\varepsilon} \cdot \frac{A^{\varepsilon}}{F_3} = \frac{1}{3}\left(\frac{A^{\varepsilon}}{F_1} + \frac{A^{\varepsilon}}{F_2} + \frac{A^{\varepsilon}}{F_3}\right)$$
$$= \frac{1}{3}(1 + 0 + 0) = \frac{1}{3}.$$

Ainsi, avec nos données actuelles, A^{ε} est *variable*, puisque sa probabilité n'est ni 1 ni 0, mais une fraction entre les deux. C'est-à-dire nos données nous mènent à la conclusion $A^{\varepsilon\theta}$. Pareillement on peut démontrer que nos données nous mènent aux conclusions $A^{\eta\theta}$ et $A^{\theta\theta}$. Mais maintenant supposons que les figures 2 et 3, au lieu d'être différentes de la figure 1, soient exactement semblables à la figure 1. Dans ce cas nous aurons

$$\frac{A^{\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{1}{3}\left(\frac{A^{\varepsilon}}{F_1} + \frac{A^{\varepsilon}}{F_2} + \frac{A^{\varepsilon}}{F_3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{A^{\varepsilon}}{F_1} + \frac{A^{\varepsilon}}{F_1} + \frac{A^{\varepsilon}}{F_1}\right)$$
$$= \frac{1}{3}(1 + 1 + 1) = 1.$$

Ainsi, au lieu d'avoir $A^{\epsilon\theta}$, comme avant, nous aurons $A^{\epsilon\epsilon}$, qui affirme qu'*il est certain que A est certain*. Pareillement, avec ces données, nous aurons $A^{\eta\eta}$ et $A^{\theta\eta}$.

Note. — Le système de logique que je viens d'expliquer n'est pas fondé sur les mêmes principes que les systèmes des autres logiciens. Dans aucun des systèmes qui me sont connus je ne trouve la distinction que je fais entre les mots *vrai* et *certain*, et entre les mots *faux* et *impossible*; de sorte que dans ces systèmes symboliques les propositions *variables* (dont les probabilités ne sont ni 1 ni 0) ne trouvent pas de place. Par conséquent, plusieurs des formules de ces systèmes n'ont qu'une validité limitée ; elles sont valides pour les certitudes et pour les impossibilités, mais non pour les variables. Mais, supposons qu'on reconnaisse ces variables, et qu'on désire les exprimer dans le langage symbolique ordinaire. Alors, la proposition exprimée par mon symbole A^{ϵ} serait exprimée par $(A = 1)$, ma proposition A^{η} par $(A = 0)$, et ma proposition A^{θ} par $(A \neq 1)\ (A \neq 0)$. Si l'on voulait exprimer ma proposition $A^{\theta\theta}$ (voir § 23) dans le langage symbolique ordinairement accepté, on serait obligé de la présenter sous la forme peu maniable de

$$\{(A \neq 1)\ (A \neq 0) \neq 1\}\ \{(A \neq 1)\ (A \neq 0) \neq 0\}.$$

Il y a dans mon système des formules innombrables, comme, par exemple,

$$A^{\epsilon}B^{\theta} + B^{\epsilon}A^{\theta} : (AB)^{\theta} : A^{-\eta}\,B^{\theta} + B^{-\eta}\,A^{\theta},$$

qui deviendraient presque incompréhensibles par leur simple longueur, si on les traduisait dans le langage symbolique d'un autre système. Si on représente la première alternative de cette dernière formule par $\varphi\,(\epsilon)$, la dernière alternative doit être représentée par $\varphi\,(-\eta)$, et alors la formule devient

$$\varphi\,(\epsilon) : (AB)^{\theta} : \varphi\,(-\eta).$$

(Pour l'explication des symboles $\varphi\,(\epsilon)$ et $\varphi\,(-\eta)$, voir § 14.) On trouvera des exemples de l'application de ma méthode aux mathématiques dans mon mémoire de la *Bibliothèque du Congrès International de Philosophie*, t. III, p. 135-183, Librairie Armand Colin.

Hugh Mac Coll (Université de Londres).

SUR LA CONCEPTION DES LIMITES [1]

Nous disons qu'une grandeur variable tend vers une limite, lorsqu'elle se rapproche infiniment d'une grandeur de même nature. On appelle cette dernière grandeur limite.

De cette définition, il résulte qu'il n'est pas nécessaire que la limite soit une grandeur fixe, et qu'elle-même peut avoir une limite. Il en résulte encore que la limite ne peut jamais être atteinte; en effet, la grandeur donnée se rapproche infiniment de sa limite; donc à l'infini, la grandeur arrivera à sa limite, mais l'infini ne s'épuise jamais, la limite ne sera jamais atteinte. Nous ne pouvons donc pas toujours dire sur la limite ce que nous pouvons dire en commun sur les grandeurs variables, et vice-versa.

Prenons un exemple. Considérons un cône et inscrivons-y une pyramide. Si nous faisons croître à l'infini le nombre de ses faces de telle façon que ces faces deviennent infiniment petites, la pyramide se rapprochera infiniment du cône. Obtiendrons-nous une pyramide qui se confonde avec le cône? Non; parce que nous n'obtiendrons jamais une pyramide ayant un nombre infini de faces. De plus encore, si notre imagination permettait d'exister à une telle pyramide elle ne pourrait être identifiée avec le cône, parce que la pyramide qui aurait un nombre infini de faces devrait être une figure variable, tandis que le cône est une figure fixe.

Par suite pouvons-nous dire du cône tout ce que nous pouvons dire de la pyramide? Évidemment non. Il est possible que le cône jouisse de toutes les propriétés des pyramides, mais jusqu'ici nous ne sommes pas autorisés à l'admettre simplement parce

---

[1] Voir dans cette Revue, les articles de M. J.-F. Bonnel, notamment la Note intitulée : *Les limites et l'atome*, t. V, p. 332-338. La Rédaction.

que le cône est la limite des pyramides. De plus, il nous faut encore remarquer que c'est tout autre chose que la limite géométrique, concrète, intuitive des figures de l'espace. et la limite arithmétique, abstraite, déductive des grandeurs qui représentent les mesures des éléments des figures de l'espace. Si la pyramide a comme limite le cône, il ne s'ensuit pas que la surface de la pyramide ait comme limite la surface du cône. Je montrerai qu'il existe des figures qui ont comme limite la surface du cône et malgré cela la surface latérale de ces figures n'est pas égale à la surface latérale du cône. Imaginons que nous plaçons dans un cône une série de disques qui se recouvrent en s'appuyant complètement sur la surface du cône. Supposons que ces disques s'amincissent infiniment, puis coupons par un plan l'ensemble formé par le cône et les disques, la figure formée par les disques aura comme limite la figure du cône ; mais la surface latérale de cette figure, ou en d'autres termes la surface découverte des disques, nous ne pouvons pas encore dire qu'elle a une limite égale à la surface du cône, nous ne pouvons pas affirmer non plus qu'elle ait une limite, cette limite dépend peut-être de l'inclinaison qu'ont les disques sur les génératrices du cône, et peut-être même de la loi que suivent ces disques en se faisant infiniment minces, parce qu'ils sont coupés obliquement par le plan. Considérons en particulier le cône circulaire droit, et les disques parallèles à la base du cône. soit r le rayon du cercle, l la hauteur et a la génératrice.

La surface non couverte des disques se compose de deux parties : la partie non couverte des bases et la surface latérale des disques. Considérons la première partie. En projetant chaque portion sur la base du cône, on voit que leur somme est égale à la base du cône : πr^2. Nous avons dit que la deuxième partie se compose de la surface latérale des disques. Chaque élément cylindrique AA'cc' de cette surface se rapporte à l'élément correspondant de l'aire du tronc AA'BB', comme les produits $\frac{2\pi . \text{PA} . \text{AC}}{2\pi . \text{OI} . \text{AB}}$ (OI étant la demi-somme des rayons du tronc) ; le rapport entre la surface latérale des disques et la surface latérale du tronc de cône sera compris entre la plus grande et la plus petite valeur du rapport $\frac{\text{AP} . \text{AC}}{\text{OI} . \text{AB}}$; lorsque les disques s'amincissent infiniment, ce

rapport tend vers la valeur $\frac{AC}{AB} = \frac{i}{a}$ et la surface latérale des disques aura pour limite $\pi ra \frac{i}{a} = \pi ri$. La surface latérale de la figure qui tend vers le cône sera $\pi ri + \pi r^2 = \pi r(r+i)$ tandis que la surface latérale du cône est πra [1]. Conformément à notre calcul, nous pouvons voir que la surface que nous obtenons, si nous considérons les disques extérieurs a la même limite et que cette surface est indépendante de la loi d'après laquelle les disques s'amincissent. La corrélation entre l'espace et le nombre, entre la position et la dimension doit être conçue sous un rapport tout nouveau, nous devons donc concevoir d'une façon différente l'intuition et la déduction, ce que nous voyons et ce qui existe. Il nous faut séparer les opérations d'avec les nombres, les opérations d'avec les figures. Faire varier un nombre vers sa limite. c'est une opération ; faire varier une figure vers sa limite c'est encore une opération, mais nous avons vu que si deux figures tendent vers une même limite comme figures, il n'en est pas de même de leurs aires qui sont des nombres. Étudier une corrélation entre la variation des figures et la variation des fonctions serait une intéressante question. On pourra, par exemple, concevoir une nouvelle science différentielle et intégrale par des opérations purement géométriques ; différencier serait faire une sorte de déformation, intégrer, établir une sorte de mouvement. Beaucoup de théorèmes et de théories auront sans doute des corrélatifs très intéressants si nous passons du nombre à l'espace, si nous remplaçons le terme de valeur par celui de position, fonction par figure, égal par superposable, identité par coïncidence ; le seul

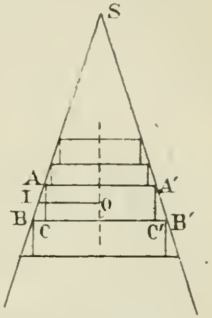


Fig. 1.

---

[1] On pourra calculer la somme des surfaces latérales des disques de cette façon :

Supposons les disques de hauteurs égales, et soit s le rayon du disque qui vient immédiatement après le sommet. Le n^{me} disque aura un rayon nse, nous cherchons la somme : $\Sigma 2\pi nsh = 2\pi sh \frac{n.n1\alpha}{2}$. Or, $hn = i$ et $(n+i)s = r$. Donc, cette somme est πi.

terme équivalence reste de plus dans la richesse de la conception géométrique.

Il faut faire attention à la valeur des notions, distinguer la longueur et la ligne, l'aire et la surface et vice-versa. Ne dit-on pas ? Aire plane et surfaces coniques. Et relativement au volume ? Le volume est le lieu qu'occupe un corps dans l'espace. Si le corps se meut il n'a plus le même volume, parce qu'il n'occupe plus le même lieu dans l'espace. C'est là qu'est le défaut parce que nous n'avons qu'une seule notion pour la figure et pour la mesure.

Nous avons vu dans l'exemple cité plus haut qu'il est possible que la figure ait une limite et que son aire n'en ait pas. Prenons un exemple dans lequel l'aire a une limite sans que la figure en ait. Nous savons que chaque grandeur, qui croît en restant inférieure à une grandeur donnée, a une limite. Traduisons cela en géométrie.

Considérons une figure S et une surface intérieure Σ. Supposons que la partie intérieure Σ est variable et qu'elle croît en restant comprise dans la figure S, il est évident que son aire aura une limite inférieure à l'aire S; mais la figure Σ aura-t-elle une limite ? Elle en aura une, mais seulement lorsque : lim aire $\Sigma =$ aire S ; et si lim $\Sigma = S' < S$ alors nous pouvons imaginer dans l'intérieur de la figure S une infinité de figures d'aire S' et par suite la figure Σ n'admet pas de limite, tandis que son aire en a une. La proposition suivante : Chaque grandeur qui croît en restant inférieure à une grandeur donnée a une limite, se traduira ainsi en géométrie : Chaque figure qui croît en restant comprise dans une figure donnée a une limite. Nous voyons que le théorème n'est plus vrai pour les grandeurs géométriques.

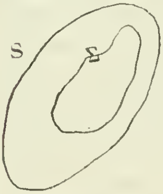


Fig. 2.

Nous allons en voir la cause. C'est peut-être parce que les figures en question ont deux dimensions tandis que l'aire n'en a qu'une. Remarquons alors qu'on peut imaginer dans une ligne AB une infinité des segments de même longueur. Donc c'est la position, la cause. Lorsque nous établissons une corrélation, il faut nous arrêter et établir une convention sur les notions. Que doit-on comprendre en géométrie par plus grand et plus petit ? Ceci : La figure A est plus petite que la figure B, lorsqu'elle est

comprise dans la figure B, mais non lorsqu'elle peut y être comprise ; il en est du reste ainsi avec les nombres. N'est-il pas vrai que 2 est trois fois dans 6? Mais lorsqu'il s'agit de figures, c'est-à-dire des régions de l'espace, les figures sont des grandeurs qui ont dans leur nature constitutive l'espace, la position. Pouvons nous dire que la figure B contient la figure A, lorsqu'elle ne contient pas tous les points de A ? En algèbre on ne fait pas nécessairement distinction entre contenir et pouvoir contenir ; en géométrie pouvoir contenir est une question de forme et contenir une question de position, et alors nous dirons qu'une figure est plus grande qu'une autre lorsqu'elle la contient.

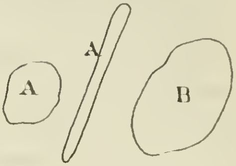


Fig. 3.

Demandons-nous maintenant ce que signifie pour une figure croître et décroître. Une figure croît lorsqu'elle gagne dans l'étendue sans rien perdre du terrain gagné s'il en est ainsi, il est aisé de démontrer notre théorème et par conséquent le théorème suivant : « Chaque grandeur, qui croît en restant inférieure à une grandeur donnée, à une limite » est générale. — Considérons maintenant une autre proposition : Un ensemble limité et contigu, qui contient une infinité de points, admet au moins un point limite. Le théorème est vrai que l'ensemble soit un intervalle numérique ou une figure.

Demandons-nous ce qui arrive lorsque au lieu de points, il s'agit de figures. Une figure qui contient une infinité de figures n'admet en général aucune figure limite. En effet, considérons une figure S qui contient une infinité de figures Σ, formées d'après une loi quelconque. Supposons qu'il existe un point O intérieur dans toutes ces figures. De ce point O, menons un rayon visuel OV, il sera intercepté par les figures Σ aux points α, a, ...α_n et sur un intervalle fini et continu. Par suite les points α, a, ...α_n admettront au moins un point limite a.

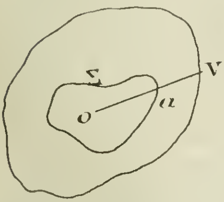


Fig. 4.

Si nous faisons tourner le rayon OV il sera intercepté de tous les points limites. Considérons l'ensemble formé par ces points;

nous ne pouvons pas affirmer qu'il forme une courbe continue, et même s'il en était ainsi, nous ne pouvons dire que leur ensemble est une figure de la famille Σ, il pourrait être par exemple un de leurs enveloppes et par suite nous ne pouvons pas dire que l'infinité des figures Σ admet une figure limite.

Considérons maintenant que l'infinité des figures Σ est l'ensemble des figures que prend une figure variable. Que signifie une figure variable ? Une figure qui croît et décroît. Fixons les idées pour un moment; supposons que la figure croît seulement et si nous nous souvenons de la définition donnée sur la croissance et la décroissance, alors dans la direction d'un rayon visuel, les points α, a, ... seront dans le même ordre et admettront un point limite a qui sera de la dernière figure, par suite ils formeront un ensemble continu « la dernière figure » et parce que tous les points limites forment une figure de la famille considérée ; alors cette figure qui croît admet une figure limite. Nous avons affirmé plus haut qu'il était aisé de démontrer ce théorème, et nous l'avons démontré maintenant. Il en arrive de même lorsque la figure décroît, c'est-à-dire lorsqu'elle occupe successivement des positions comprises dans les précédentes. Mais qu'arrive-t-il lorsque nous ne précisons pas le sens de la variation d'une figure ? Par exemple, la figure A, avait crû et est devenue la figure B; puis après la figure B a décru et est devenue la figure C. Qu'a fait la figure A depuis A jusqu'à C ? Elle a varié. Mais a-t-elle crû ou décrû ? Conformément à la définition donnée elle n'a crû ni décrû, et malgré tout elle a varié, car si elle restait constante les figures A et C seraient identiques. Donc, par quelle sorte de variation passons-nous de A à C ? Ni croissant, ni décroissant seulement, mais croissant et décroissant à la fois. Nous sentons donc la nécessité d'envisager des grandeurs géométriques d'une variation d'une nature nouvelle, et c'est bien naturel, puisque les grandeurs géométriques ne sont pas de la même nature que celles arithmétiques, les premières contiennent dans leur constitution l'espace. Eh bien donc, dans quel cas pourrons-nous appliquer les vérités sur la variation des nombres à la variation

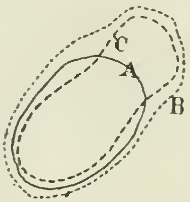


Fig. 5.

des figures ? Seulement lorsque les figures varient de telle façon que deux figures différentes puissent être comparées à deux nombres différents. C'est donc qu'il reste à chercher beaucoup de vérités propres sur la variation générale des figures différente de celle des nombres.

C. Popovici (Turno-Severin, Roumanie)

SUR

QUELQUES SOMMATIONS QUE L'ON RENCONTRE EN MÉCANIQUE

---

1. — Au nombre des notions fondamentales sur lesquelles repose la Mécanique rationnelle, se trouvent celles de *point matériel* et de *masse d'un point*. D'après les idées qui sont généralement adoptées aujourd'hui, la masse d'un point est un nombre [1]. Si l'on considère un système de n points on appelle *masse du système* la somme des masses des n points : $M = \sum_1^n m_i$. Mais si l'on considère un système comprenant une infinité de points, comme c'est le cas général en Mécanique, la somme des masses de ces points contient une infinité de termes positifs, et l'on ne voit pas *à priori*, que l'on puisse attribuer un sens à une telle somme. Il est nécessaire d'introduire de nouvelles hypothèses. Des remarques analogues se rapportent aux expressions Σmx, $\Sigma m \frac{dx}{dt}$, $\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2}$, $\Sigma m\left(y \frac{dx}{dt} - z \frac{dy}{dt}\right)$, Σmv^2, Σmr^2, qui se rencontrent dans l'application des théorèmes fondamentaux de la Mécanique. Au point de vue de l'enseignement, il peut y avoir intérêt à préciser les hypothèses qui permettront d'introduire ces diverses sommes dans le calcul et, pour le cas des corps con-

---

(1) Voir Appell, *Cours de mécanique à l'usage des candidats à l'École centrale*, Paris, 1901, — et Blondlot, *Notions de mécanique à l'usage des élèves de physique*, autographié, Nancy, 1896.

tinus, de les exprimer par des intégrales définies. Nous tenterons de le faire en quelques lignes.

2. *Masse d'un corps; centre de gravité.* — Considérons n points pesants, de poids respectifs p_1, p_2,... p_n. Ces poids ne sont autre chose que des forces parallèles et de même sens; ils ont une résultante égale à leur somme, $P = \Sigma p_i$, et appliquée en un point G_1. Pour passer au cas d'un corps, il faut faire croître n indéfiniment. L'expérience montre que l'on peut maintenir en équilibre un corps pesant en lui appliquant une seule force. Dès lors il est naturel d'admettre que Σp_i reste finie et a une limite lorsque n croît indéfiniment. Cette limite est le poids du corps, $P = \Sigma p_i$. Nous admettrons aussi que G_1 tend vers une position limite, G, point d'application du poids; c'est le centre de gravité. Mais, en introduisant l'accélération due à la pesanteur, on a $p_i = gm_i$; par suite si Σp_i a une limite, il en est de même pour Σm_i. Posant $M = \Sigma m_i$, on appelle M *masse du corps*, et on a $P = Mg$.

Cela posé, comme la masse d'un point est indépendante de la force qui agit sur lui, la masse d'un corps, telle qu'on vient de la définir, est indépendante de la pesanteur.

On peut énoncer autrement l'hypothèse précédente. Pour que Σm_i reste finie et tende vers l'unité quand le nombre de ses termes croît indéfiniment, il faut que M_i tende vers o. Ce qui a été dit revient donc à admettre que la masse d'un point qui peut être un nombre positif quelconque quand le point est isolé, doit être considérée comme un nombre infiniment petit quand le point est envisagé comme faisant partie d'un corps, et même comme un infiniment petit assujetti à une condition, celle de la convergence de Σm_i.

3. *Expression de la masse par une intégrale définie.* — Nous considérerons seulement des corps continus. Prenons le cas d'un arc de courbe AB. Décomposons-le en n arcs; soit $MM' = \Delta s$ l'une des parties, et s la valeur de l'arc de courbe terminé en M. Appelons Δm la masse de l'arc MM', arc que nous considérons comme formé par l'ensemble d'une infinité de points matériels. Le quotient $\frac{\Delta m}{\Delta s}$ est une fonction de s.

Nous ne considérerons que le cas où ce quotient tend vers une limite, μ, quand Δs tend vers o ; μ étant une fonction de s qui est elle-même continue. Cette restriction n'a guère d'importance, car il ne semble pas pour le moment qu'il y ait utilité d'introduire en mécanique des fonctions discontinues ou n'admettant pas de dérivée, μ est la densité de la courbe en M. Cela posé, on a $\Delta m = (\mu + \varepsilon_1)\Delta s$, ε désignant (comme dans la suite) un infiniment petit dont l'ordre par rapport à Δs est égal à l'indice ; ou bien $\Delta m = \mu . \Delta s + \varepsilon_2$. On a donc pour la masse de l'arc AB :

$$M = \Sigma (\mu \Delta s + \varepsilon_2). \tag{1}$$

Faisons croître indéfiniment le nombre des arcs MM', chacun d'eux tendant vers o d'une manière quelconque. Le second membre de (1), reste égal à M, il tend donc vers une limite. D'après les propriétés des infiniment petits, il en est de même pour $\Sigma \mu . \Delta s$. Alors, par la définition même de l'intégrale définie, on a

$$M = \int_A^B \mu . ds. \tag{2}$$

Si au lieu de considérer un arc de courbe, on envisage une aire ou un volume, la marche du raisonnement ne sera pas modifiée, mais on remplacera Δs par $\Delta \sigma$ ou $\Delta \nu$, et on arrivera à une intégrale double ou triple.

Lorsque Δs tend vers o, l'arc MM' tend vers M. Ainsi la masse de M est un infiniment petit, ce qu'on sait déjà, dont la partie principale est $\mu . ds$.

4. *Formules pour le centre de gravité.* — Considérons encore l'arc AB décomposé en n arcs. Appelant X, Y, Z, les coordonnées du centre de gravité ; x, y, z celles de M ; x_1, y_1, z_1, celles du centre de gravité de l'arc MM', le théorème des moments donne :

$$MX = \Sigma \Delta m . x_1.$$

Mais le centre de gravité de MM' tend vers M quand Δs tend vers o. Donc

$$MX = \sum (\mu + \varepsilon_1) \Delta s . (x + \varepsilon_1) = \sum (\mu x \Delta s + \varepsilon_2).$$

Passant à la limite et raisonnant comme plus haut :

$$MX = \int_A^B \mu x . ds, \text{ etc.}$$

Nous démontrons, en même temps, que l'on peut introduire Σmx, la sommation étant étendue à tous les points du corps, et écrire

$$MX = \Sigma mx.$$

Il en résulte, par les mêmes hypothèses :

$$M \frac{dX}{dt} = \Sigma m \frac{dx}{dt}, \quad M \frac{d^2 X}{dt^2} = \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2},$$

c'est-à-dire que les expressions $\Sigma m \frac{dx}{dt}$, $\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2}$ ont un sens.

5. *Les autres sommes.* — Quelques mots suffisent pour justifier la considération des autres sommes. On a par exemple :

$$\Sigma m \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt}\right) = \sum \left[\mu \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt}\right) \Delta S + \varepsilon_2\right]$$

$$\Sigma m v^2 = \sum \left[\mu v^2 . \Delta s + \varepsilon_2\right]$$

$$\Sigma m r^2 = \sum \left[\mu r^2 . \Delta s + \varepsilon_2\right]$$

les valeurs de $y, \ldots, \frac{dy}{dt}, \ldots, v$ et r se rapportant au point M de densité μ. Nous convenons de ne considérer que des fonctions continues ; toutes les fonctions qui sont coefficients de Δs sont donc intégrables. Il en résulte que les sommations, étendues à tous les points du corps, ont un sens ; et en outre qu'elles s'expriment par des intégrales définies qui seront simples, doubles ou triples selon que l'on considérera un arc, une aire ou un volume.

S. Dautheville (Montpellier).

LA MÉTHODE DE M. MERAY

POUR L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

Depuis que M. Laisant a signalé, sous le titre *Une exhumation géométrique* (*Enseignement mathématique,* n° du 15 mars 1901), la méthode de M. Méray, des progrès considérables ont été accomplis, et il nous semble intéressant de les indiquer ici. On se souvient qu'il s'agit de l'enseignement de la Géométrie, et que, dans un ouvrage publié en 1874, M. Méray réformait de fond en comble cet enseignement, menant de front l'étude du plan et de l'espace, mettant franchement les axiomes en évidence, empruntant à l'observation du monde extérieur les notions premières indispensables et atteignant ainsi un double but : rendre plus rapide et moins pénible l'acquisition des vérités géométriques; substituer une rigueur réelle à la rigueur apparente.

Les premiers essais pédagogiques de cette méthode permirent d'espérer les meilleurs résultats et furent brutalement arrêtés par l'esprit de routine; de nouvelles tentatives, toutes récentes celles-là, confirment en tout point celles de 1876 à 1878. On peut s'en rendre compte par la lecture d'une petite brochure extraite de la *Revue bourguignonne de l'enseignement supérieur*, qui contient, en dehors du rapport de M. Chancenotte, dont M. Laisant a publié les conclusions dans son article, les documents que voici :

Rapport de M. Billiet, professeur de mathématiques à l'École normale d'instituteurs d'Auxerre (6 décembre 1900).

Lettre d'envoi, au recteur de l'Académie, du rapport précédent, par M. Mironneau, directeur de l'École normale d'instituteurs d'Auxerre.

Deuxième rapport de M. Billiet (13 juillet 1901).

Lettre d'envoi de ce deuxième rapport, par M. Mironneau.

Dans le rapport de 1900, M. Billiet, après avoir rappelé quel est le but de l'étude de la géométrie dans les écoles normales, fait le tableau suivant, pas flatté, mais bien juste, de l'enseignement classique :

« Les débuts sont longs, les démonstrations fastidieuses et « souvent pleines de subtilité ; l'esprit des élèves est soumis à « un ergotage incessant, sinon pédantesque ; sous prétexte de « tout démontrer, on s'attarde à de véritables niaiseries pour « poursuivre une vaine rigueur ; aussi, une étude faite de la « sorte, loin d'assouplir l'intelligence, finit bientôt par l'ankylo« loser. »

Il fait toucher ensuite du doigt l'incohérence des programmes des écoles normales, rejetant à la deuxième année des notions géométriques nécessaires pour l'exécution du dessin géométrique imposé dès la première année. Le travail manuel se prête à des observations analogues à celles amenées par la considération du dessin.

Pour mettre de l'harmonie à la place de ce chaos, M. Billiet sollicita et obtint, dès 1898, l'autorisation de réformer son enseignement par l'introduction des « nouveaux éléments de Géométrie » de M. Méray.

L'expérience fut renouvelée en 1899. « Les leçons, dit-il, « étaient animées ; les élèves s'intéressaient vivement à la nou« velle méthode. » Enfin, la tentative s'étendit encore, et les élèves de première année suivirent le nouveau cours. « Ils avan« cent de surprise en surprise », ajoute encore l'auteur ; « leur « intelligence s'éveille et s'ouvre très facilement aux aperçus « nouveaux qui leur sont présentés ; tous sont frappés de l'en« chaînement des théorèmes et de la simplicité des démonstra» tions ».

En résumé, M. Billiet conclut formellement en faveur de la méthode de M. Méray, en constatant, d'après son observation, qu'elle fait appel « à l'intelligence plutôt qu'à la mémoire ».

La lettre d'envoi de M. Mirouneau constate que le professeur « et les élèves se déclarent également satisfaits de la nouvelle « méthode. »

Par une inspiration des plus heureuses, il donne un résumé d'une sorte d'enquête faite par lui auprès des élèves maîtres,

ayant presque tous déjà étudié la géométrie classique. Nous ne pouvons reproduire ici les déclarations recueillies, pourtant bien intéressantes. Elles se résument en une approbation que partage du reste entièrement le directeur. Une seule inquiétude se manifeste, relativement aux examens; espérons, pour l'honneur des examinateurs, que cette inquiétude ne sera pas justifiée. Je ne résiste pas au plaisir de reproduire textuellement ici un passage de la lettre de M. Mironneau : « Malgré le respect qui s'attache « à une méthode admirée depuis deux mille ans, il est difficile « de ne pas constater que ce respect même en a fait une sorte « de formulaire sacré qui risque d'endormir l'esprit au lieu de « l'éveiller. » C'est rigoureusement vrai ; et il faut avoir le courage de le dire tout haut. L'admiration que nous devons avoir pour les géomètres grecs n'en sera nullement diminuée, bien au contraire, aux yeux des hommes qui prennent la peine de réfléchir; et si ces ancêtres revenaient au monde, ils seraient les premiers, avec leur puissance d'esprit, à conseiller de ne pas s'endormir dans la routine et les sophismes.

J'arrive maintenant au deuxième rapport de M. Billiet, celui de 1901 ; c'est un important travail, qui n'occupe pas moins de 12 pages, bourrées de faits, de documents, dans la brochure précitée. L'auteur y énumère les conclusions suivantes et les développe ensuite : « 1° L'enseignement simultané de la géométrie « plane et de la géométrie dans l'espace fait gagner un temps très « sensible sur la durée totale de l'enseignement géométrique;

« 2° La nouvelle méthode rétablit la concordance en bien des « points, entre les diverses matières du programme de mathé« matiques et celles des enseignements théoriques et pratiques « qui s'y rattachent ;

« 3° Elle fait appel à l'intelligence des élèves plutôt qu'à leur « mémoire ;

« 4° Elle les habitue à penser par eux-mêmes et non plus seu« lement par leur professeur ou par un livre. »

Il termine en répondant à certaines objections formulées par des professeurs : 1° Difficultés éprouvées par les élèves et par les maîtres; 2° forme concise, trop savante de l'ouvrage ; 3° l'ouvrage n'est pas accessible aux élèves des écoles primaires supérieures ; 4° l'ouvrage de M. Méray renferme quelques notions de

trigonométrie; 5° dans tous les examens, les élèves sont interrogés d'après l'ancienne méthode.

Dans sa lettre d'envoi au recteur, M. Mironneau expose que ses observations, tant sur la valeur éducative de la méthode que sur les résultats purement géométriques, n'ont fait que confirmer les conclusions de son précédent rapport : « 1° En faisant marcher « de pair la géométrie plane et la géométrie dans l'espace, la « méthode Méray rapproche les vérités correspondantes et sup- « prime les répétitions, d'où cette concision lumineuse dont les « élèves se déclarent enchantés et qui représente, en somme, du « temps gagné;

« 2° Cette marche parallèle du plan et de l'espace permet « d'établir, dès la première année, entre les programmes de « géométrie, de dessin linéaire et de travail manuel, la concor- « dance qui rend une organisation pédagogique rationnelle;

« 3° Enfin, la fusion de la géométrie plane et de la géométrie « dans l'espace permet des rapprochements ingénieux et sug- « gestifs entre des notions que la géométrie euclidienne tient « soigneusement séparées. De ces rapprochements, résulte pour « les élèves la vision nette de l'ensemble, la vision synthétique, « condition nécessaire de toute science. Ainsi, l'élève domine « son cours au lieu d'en être écrasé. Et, en effet, nous sommes « particulièrement séduits par la facilité avec laquelle les élèves « *trouvent*, à une question donnée, des solutions originales. Un « exercice ou un problème étant proposé, les élèves *cherchent*, « et au lieu de considérer la bonne solution comme simple « affaire de hasard ou de flair, au lieu de faire appel exclusive- « ment à leur mémoire pour trouver des cas analogues, ils pro- « cèdent à une véritable recherche scientifique. C'est ainsi « qu'une même question est le plus souvent résolue de plusieurs « manières entre lesquelles il est fort intéressant de faire dis- « tinguer ensuite la solution la plus logique, la plus simple ou « la plus élégante. La méthode géométrique de M. Ch. Méray « est donc *essentiellement éducative.* »

Signalons enfin les résultats de l'année scolaire 1901-1902 dans les écoles normales d'instituteurs d'Auxerre et de Dijon, constatés par les rapports adressés par MM. les professeurs à M. le recteur de l'Académie de Dijon.

A Auxerre, M. Billiet a pu, dans le courant de cette année, terminer le cours de géométrie commencé aux élèves de première année de 1900 1901. Le cours complet a compris exactement vingt-sept heures en première année et trente-cinq heures en seconde, soit un total de soixante-deux heures. L'emploi du temps des écoles normales attribuant trente six heures en premiére année et soixante-douze en seconde année, il en résulte un gain de quarante-six heures, c'est-à-dire de plus d'un tiers en faveur de la méthode Méray. A côté de cette grande économie de temps, il faut ajouter une plus-value de même ordre sur les résultats de l'ancien enseignement due à une synthèse remarquable, caractéristique de l'ouvrage de M. Méray, qui permet d'étudier vite et de savoir très bien, tout à la fois.

A Dijon, M. Chancenotte a enseigné la nouvelle méthode aux élèves de première année. Il espère réussir à constater que « l'ouvrage de M. Méray coûte moins d'efforts que la géométrie « traditionnelle, tout en ouvrant à l'esprit de bien plus larges « horizons ». Il insiste sur ce fait que « l'emploi de cette mé« thode permettra de donner une base rationnelle à l'enseigne« ment du dessin géométrique, et qu'ainsi, prendra fin pour cet « enseignement, le caractère presqu'exclusivement empirique « qu'il revêt aujourd'hui. Cet empirisme peut être inévitable avec « des enfants de l'école primaire, mais quand il s'agit de former « le maître de la même école, il doit être regardé comme extrê« mement fâcheux, car l'instituteur doit, autant que possible, « connaître le pourquoi de ce qu'il enseigne ».

L'année scolaire 1902-1903 sera encore plus fertile en résultats que les années précédentes : des applications de la méthode ont été continuées à Auxerre, étendues en deuxième année à Dijon, inaugurées dans les écoles normales de Lyon, d'Albertville et dans l'école primaire supérieure de Dijon. D'après les informations reçues au 15 janvier dernier, on peut s'attendre à une moisson abondante d'éloges à la fin de l'année.

Il semble bien établi aujourd'hui que les anciennes méthodes maintenues jusqu'à présent dans l'enseignement universitaire sont encore plus que les programmes la cause de l'insuffisance des résultats acquis. Nous assistons actuellement à l'expérimentation officielle d'une méthode d'enseignement des langues vivantes qui

rompt tout rapport avec l'enseignement classique des langues mortes. Il est nécessaire que ces efforts se généralisent : nous devons renoncer à nous payer de mots; il nous faut acquérir des idées si nous voulons rivaliser utilement avec nos voisins. Je ne puis mieux terminer, pour constater combien la recherche de nouvelles méthodes est à l'ordre du jour, qu'en citant les paroles prononcées par M. Combarieu, chef de cabinet du ministre de l'Instruction publique, inspecteur d'académie à Paris, lorsqu'il présida la distribution des prix aux élèves des cours de dessin de la ville de Paris, à la Sorbonne : « En somme, la pédagogie « comme tant d'autres choses et suivant ce qui paraît être une « loi générale du progrès, est descendue de son char de Phaeton « pour se rapprocher de la vie sociale. »

Elie Perrin (Paris).

SUR LA NOMENCLATURE DES PUISSANCES

En faisant, il y a un certain nombre d'années, des extraits traduits de l'histoire des Mathématiques de Cantor, pour un ami qui ignorait l'allemand, j'ai copié pour moi-même et mis en tableau le renseignement suivant :

	Noms des puissances des nombres, adoptés par	
	Diophante	Les Arabes
n^1	Nombre.	Nombre.
n^2	Carré.	Carré.
n^3	Cube.	Cube.
n^4	Carré carré.	Carré carré.
n^5	Carré cube.	Premier sursolide.
n^6	Cube cube.	Carré cube.
n^7	Carré carré cube.	Deuxième sursolide.

J'ai donc été bien étonné en lisant dans l'histoire des Mathé-

matiques de Ferdinand Hoefer (p. 298) un paragraphe où, sur l'autorité de A. Sédillot, l'on attribue aux Arabes une nomenclature identique à celle de Diophante. A la fin de ce paragraphe l'on dit : « Ces dénominations des puissances étaient déjà connues des Grecs, ce qui contredit l'opinion de Wallis prétendant que les Arabes avaient adopté, dans leur nomenclature, un système différent de celui de Diophante. » Qui a raison de Cantor et Wallis d'un côté, de Hoefer et Sédillot de l'autre. Il semble que ce problème historique doit recevoir la solution suivante : il y a eu des mathématiciens arabes qui ont suivi la nomenclature de Diophante et des anciens Grecs ; il y en a eu d'autres qui ont cherché à faire mieux. Pourtant, avant de se prononcer, il serait intéressant de connaître les documents sur lesquels on s'est appuyé pour émettre l'une et l'autre des affirmations contradictoires.

Mais il s'élève une autre question, c'est celle de savoir laquelle des deux nomenclatures est préférable. Il me semble qu'en écartant les expressions 1^er^ et 2^e^ sursolide, c'est celle des Arabes non imitée des Grecs qu'il faut préférer. En effet n^5 est-ce un carré ? Non ! Est-ce un cube ? Pas plus ! Pourquoi alors l'affubler de ces deux noms ? Posez les mêmes questions relativement à n^6 et vous verrez que n^6 mérite réellement le nom de carré cube ou de cube carré. C'est même sa double propriété de carré et de cube qui valut au nombre 64 l'honneur d'être choisi par Charles XII pour base d'un nouveau système de poids et mesures qu'il voulait donner à la Suède.

	n^1 lignée	n^2 carré	n^4 bicarré	n^8 tricarré
n^1 lignée	n^2	n^3	n^5	n^9
n^3 cube	n^4	n^5	n^7	n^{11}
n^9 bicube	n^{10}	n^{11}	n^{13}	n^{17}
n^{27} tricube	n^{28}	n^{29}	n^{31}	n^{35}

	n^1 lignée	n^2 carré	n^4 bicarré	n tricarré
n^3 cube	n^6	n^{12}	n^{24}
n^9 bicube	n^{18}	n^{36}	n^{72}
n^{27} tricube	n^{54}	n^{108}	n^{216}

La cinquième puissance sera-t-elle de ce fait privée de nom géométrique. Non ! C'est le produit du carré par le cube, ou du cube par le carré. C'est donc un carré de cubes, cuborum quadratus, en allemand *Kubenkadrat* ; mais il faut se garder de le confondre avec le nombre carré et cube ou plus simplement carré-cube. (quadratus-cubus, quadratkubus ou kubusquadrat).

Au bas de la page précédente se trouvent deux tableaux comparatifs à double entrée qui pourront servir pour les dénominations à donner à un certain nombre de puissances.

Dans le premier de ces deux tableaux les exposants du corps du tableau sont formés par l'addition de ceux des deux entrées ; dans le second c'est par leur multiplication. Maintenant si nous prenons dans un des deux tableaux une puissance quelconque de n nous pourrons la *caractériser* en faisant un seul tout des deux dénominations qui se trouvent aux deux entrées correspondantes. Seulement dans le premier tableau l'une des dénominations sera au *nominatif singulier*, l'autre au génitif pluriel. Dans le second tableau les deux dénominations seront mises en apposition. Ainsi n^{13} est un *bicarré de bicubes* tandis que n^{36} est un *bicarré bicube*. On m'objectera que ces noms ne seront jamais employés ; aussi je ne les donne pas pour servir de dénominations, mais plutôt comme des affirmations laconiques de theorèmes de géométrie numérique. Dire que n^{36} est un bicarré bicube c'est dire, en un langage moins bref que celui de l'Algèbre, mais pourtant encore très laconique que : si on extrait la racine cubique de n^{36} on obtient un côté qui peut encore être disposé en cube. Le côté de ce cube peut être disposé en carré dont la racine sera encore un carré, et la racine de ce dernier sera n. En effet dans ce cas particulier on peut faire les opérations :

$$\sqrt[3]{n^{36}} = n^{12} \quad \sqrt[3]{n^{12}} = n^4 \quad \sqrt[2]{n^4} = n^2 \quad \sqrt[2]{n^2} = n,$$

dont la possibilité est indiquée par ces mots bicarré-bicube.

Il y a des amateurs d'Arithmologie qui désireraient que les noms des dix premières puissances des nombres puissent être exprimés par des moyens plus laconiques que de dire cinquième puissance. La chose est facile sans recourir à la langue grecque, le latin suffit, mais en recourant à un artifice employé par les capitaines instructeurs qui au lieu de *croisez baïonnette* disent

simplement « *croisez'ette !* » Donc au lieu de dire en latin *quinta* pot*entia* nous dirons *quintentia*, ce qui nous fournira les dénominations féminines suivantes en latin, français et allemand :

n^1	primentia.	primence.	primenz.
n^2	secundentia.	secondence.	sekundenz.
n^3	tertientia.	tierçence.	terzienz.
n^4	quartentia.	quartence.	quartenz.
n^5	quintentia.	quintence.	quintenz.
n^6	sextentia.	sextence.	sextenz.
n^7	septimentia.	septimence.	septimenz.
n^8	octaventia.	octavence.	octavenz.
n^9	nonentia.	nonence.	nonenz.
n^{10}	decimentia.	décimence.	decimenz.

Parlons ici encore d'une question qui se rattache par des liens assez étroits à celle des noms géométriques des puissances.

On sait qu'on appelle équations trinomes des équations de forme suivante

$$x^{2n} + px^n + \rho = 0 \qquad (1)$$

et qu'on donne à l'équation

$$x^4 + px^2 + \rho = 0 \qquad (2)$$

le nom d'équation bicarrée.

Or les équations du 3^e degré peuvent, on le sait, être réduites, par élimination du 2^e terme à la forme

$$x^3 + px + \rho = 0. \qquad (3)$$

On ne voit pas alors pourquoi les équations de forme

$$x^{3n} + px^m + \rho = 0. \qquad (4)$$

ne mériteraient pas aussi le nom d'équations trinomes. Seulement on distinguerait les équations trinomes en quadratiques (1) et en cubiques (4).

Sans savoir si l'utilité en pourra être bien grande, nous croyons donc qu'il serait intéressant de classer et de nomenclaturer les équations trinomes de la façon suivante :

$x^2 + px + \rho = 0$	Équation trinome quadratique.
$x^3 + px + \rho = 0$	. . . . cubique.
$x^4 + px^2 + \rho = 0$	. . . . bicarrée.
$x^6 + px^3 + \rho = 0$	. . . . cuboquadratique.
$x^6 + px^2 + \rho = 0$	. . . . quadratocubique.
$x^8 + px^4 + \rho = 0$	. . . . tricarrée.
$x^9 + px^3 + \rho = 0$	. . . . bicubique.

Les nombres sont d'une classification très facile, ainsi que les opérations qu'on peut effectuer sur eux, et il me semble que l'étude de cette classification ne serait pas stérile pour tous ceux qui s'en occuperaient.

Ch. Berdellé (Rioz, Haute-Saône).

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE LA FORMULE

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu)^2}.$$

I. Un lemme. — De la double inégalité bien connue

$$1 > \frac{\sin\varphi}{\varphi} > \cos\varphi$$

il suit que

$$0 < 1 - \frac{\sin\varphi}{\varphi} < 1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

$$0 < 1 + \frac{\sin\varphi}{\varphi} < 2;$$

d'où en multipliant,

$$0 < 1 - \frac{\sin^2\varphi}{\varphi^2} < 4\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

ou, après la division par la quantité

$$\sin^2\varphi = 4\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

$$(1) \qquad 0 < \frac{1}{\sin^2\varphi} - \frac{1}{\varphi^2} < \frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}.$$

En supposant φ obtus, cette double inégalité permet de conclure que la fonction

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} - \frac{1}{\varphi^2}$$

reste finie dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

II. — Je pose $\varphi = x\pi$ pour avoir les infinis de la fonction

(2) $$f_1(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi}$$

sous forme simple, et je vais considérer la somme évidemment convergente

(3) $$f_2(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu)^2}$$

qui devient infinie pour les mêmes valeurs que la fonction $f_1(x)$. On voit d'abord que l'on a

$$f_1(x+m) = f_1(x),\ f_2(x+m) = f_2(x),\ (m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

puis on s'assure que la différence

(4) $$g(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

reste finie dans l'intervalle $\left(-\frac{1}{2} \ldots \frac{1}{2}\right)$ et par conséquent pour tous les x.

En effet, on a

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2} + f_3(x),$$

la fonction

$$f_3(x) = \sum_{\nu}{}' \frac{1}{(x+\nu)^2},\ (\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

restant finie dans l'intervalle $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, et la quantité

$$g(x) = \left(\frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi} - \frac{1}{x^2}\right) - f_3(x)$$

devient la différence de deux fonctions qui, dans l'intervalle $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ restent finies.

Il y a donc une constante positive C telle que partout

(5) $$|g(x)| \leq C,$$

la valeur spéciale de cette constante n'ayant d'ailleurs aucune importance pour nous.

III. — Si, dans la série (3), on transforme l'indice sommatoire ν en posant

$$\nu = \rho + \mu m \quad (\rho = 0, 1, 2, \ldots m-1;\ \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

où m signifie un entier positif quelconque, il vient

$$f_2(x) = \sum_{\rho=0}^{m-1} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+\rho+m\mu)^2} = \sum_{\rho=0}^{m-1} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m^2\left(\frac{x+\rho}{m}+\mu\right)^2}$$

ou bien

$$f_2(x) = \frac{1}{m^2} \sum_{\rho=0}^{m-1} f_2\left(\frac{x+\rho}{m}\right). \tag{6}$$

Une équation fonctionnelle toute semblable subsiste pour la fonction

$$f_1(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi}$$

mais nous nous bornerons pour l'établir dans le cas particulier de $m = 2^k$, k étant un entier positif quelconque.

On a d'abord

$$\frac{1}{2^2}\left[f_1\left(\frac{x}{2}\right) + f_1\left(\frac{x+1}{2}\right)\right] = \frac{\pi^2}{4\sin^2\frac{x\pi}{2}} + \frac{\pi^2}{4\cos^2\frac{x\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4\sin^2\frac{x\pi}{2}\cos^2\frac{x\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi} = f_1(x),$$

de la sorte que l'équation

$$f_1(x) = \frac{1}{m^2} \sum_{\rho=0}^{m-1} f_1\left(\frac{x+\rho}{m}\right) \tag{7}$$

se trouve vérifiée pour $m = 2$. Admettant qu'elle subsiste pour une valeur m, nous transformerons les termes du second membre en l'employant dans le cas de $m = 2$, ce qui donne

$$f_1\left(\frac{x+\rho}{m}\right) = \frac{1}{2^2}\left[f_1\left(\frac{x+\rho}{2m}\right) + f_1\left(\frac{x+m+\rho}{2m}\right)\right]$$

et il s'ensuit au lieu de (7)

$$f_1(x) = \frac{1}{(2m)^2}\sum_{\rho=0}^{m-1} f_1\left(\frac{x+\rho}{2m}\right) + \frac{1}{(2m)^2}\sum_{\rho=0}^{m-1} f_1\left(\frac{x+m+\rho}{2m}\right)$$

ou bien

$$f_1(x) = \frac{1}{(2m)^2}\sum_{\rho=0}^{2m-1} f_1\left(\frac{x+\rho}{2m}\right)$$

ce qui est la formule (7) écrite avec la valeur $2m$ de l'entier m.

La formule (7) ayant lieu pour $m = 2$, sera vraie, par conséquent, pour $m = 4$, 8, 16, et en général pour $m = 2^k$.

IV. — Les deux formules (6) et (7) ayant lieu pour $m = 2^k$, il s'ensuit pour la fonction

$$g(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

la formule de la même forme

$$g(x) = \frac{1}{m^2}\sum_{\rho=0}^{m-1} g\left(\frac{x+\rho}{m}\right), \quad (m = 2^k). \tag{8}$$

Puisque pour toute valeur de x l'inégalité (5) a lieu, cette dernière formule permet de conclure

$$|\, g(x)\, | < \frac{m\,C}{m^2} = \frac{C}{m}, \quad (m = 2^k).$$

et il s'ensuit en faisant croître k au delà de toute limite, que l'on a

$$|\, g(x)\, | = 0.$$

Ceci vérifie l'équation $f_1(x) = f_2(x)$, ou bien

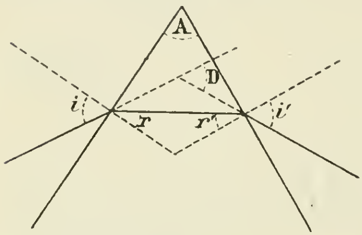
$$\frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi} = \sum_{\nu=\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu)^2}$$

qu'il s'agissait d'établir. Elle fait voir, d'une manière qui me paraît élémentaire et simple, que la fonction $\sin x\pi$ est analytique, ce qui permet d'obtenir son développement suivant les puissances de x sans faire usage du théorème de Taylor-Cauchy.

M. Lerch (Fribourg, Suisse).

L'ÉQUATION DU PRISME OPTIQUE

L'étude des formules du prisme optique, dans le cas d'un rayon se propageant dans une section principale, peut se faire d'une manière plus didactique qu'on ne la fait ordinairement. Voici la marche à suivre.



Les équations du prisme sont :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\sin i}{\sin r} = \dfrac{\sin i'}{\sin r'} = n, \\ A = r + r' \\ D = i + i' - (r + r'), \end{array} \right.$$

au nombre de 4 entre 7 quantités. On pourra donc en éliminer les quantités r, i', r' et trouver ainsi une relation

$$f(D, A, n, i) = 0.$$

Pour cela de (1) nous tirons

$$i' = D + A - i$$

et

$$\frac{\sin(D + A - i)}{n} = \sin r' = \sin(A - r) = \frac{\sin A \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos A \sin i}{n}.$$

L'équation cherchée ($f = 0$) est ici

$$(2) \qquad \sin(D + A - i) - \sin A \,.\, \sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \cos A \,.\, \sin i = 0.$$

Discussion. — 1er *cas.* En supposant que A augmente, les i et n restant constant, on voit que D augmente aussi, car on a

$$\frac{dD}{dA} = \frac{\cos A \sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \sin i \sin A}{\cos.(D + A - i)} > 0.$$

2e *cas*. En supposant que n augmente, les i et A restant constant, on voit de l'équation (2) que D augmente aussi.

3e *cas*. Supposant enfin que i varie, les A et n restant constant, la déviation D varie aussi. Prenons la dérivée

$$\frac{dD}{di} = 1 - \frac{\cos i}{\cos(D + A - i)}\left[\frac{\sin A \sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} + \cos A\right]$$

$$= 1 - \frac{\cos i \cdot \cos r'}{\cos i' \cdot \cos r},$$

qui peut s'annuler pour une valeur particulière de i. Il existe donc une valeur extrême de D.

Pour cet angle d'incidence on doit avoir $\frac{dD}{di} = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\cos i}{\cos i'} = \frac{\cos r}{\cos r'}, \tag{3}$$

et, en élevant les deux membres de l'égalité (3) au carré, on trouve

$$\frac{1 - \sin^2 i}{1 - \sin^2 i'} = \frac{n^2 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i'} = \frac{n^2 - 1}{n^2 - 1} = 1,$$

d'où

$$\sin^2 i = \sin^2 i'.$$

On a donc pour la déviation extrême

$$i' = i$$

et l'on voit aisément que cette valeur correspond à un minimum de déviation, en comparant la déviation pour cette valeur à la déviation correspondant à une autre incidence, ou encore en examinant le signe de la dérivée seconde $\frac{d^2D}{di^2}$, pour $i = i'$.

C. Maltézos (Athènes).

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

Semestre d'hiver 1903-1904.

SUITE [1]

AUTRICHE

Wien. *Universität.* — V. Escherich : Bestimmte Integrale, 5 ; Proseminar für Mathematik, 1 ; Seminar für Mathematik, 2. — Mertens : Elemente der Differential-und Integralrechnung. Uebungen im mathematischen Seminar, 2. Uebungen im mathematischen Proseminar, 1. — Kohn : Analytische Geometrie, 4. Uebungen zu dieser Vorlesung, 1 g. Kurven und Flächen III. Ordnung, 2. — Tauber : Funktionentheorie, 4. Versicherungsmathematik, 4. — Blaschke : Einführung in die mathematische Statistik, II. Teil, 3. — Daublebsky v. Sterneck : Kreisteilung und Kummersche Zahlen, 2. — Carda : Einführung in die Differentialgeometrie, 2. — Plemelj : Zahlentheorie, 2. — Grünwald : Fouriersche Reihen und Integrale, 1. — Weiss : Bahnbestimmung von Planeten und Kometen, 4. — v. Hepperger : Sphärische Astronomie, 4. Astrophysik, 1. — Schram : Astronom. Rückrechnung überlieferter Himmelserscheinungen und deren Anwendung in der Chronologie, 2. — Prey : Elemente der darstellenden Geometrie mit Anwendung auf Kartenprojektionen, 2.

Wien. *Technische Hochschule.* — *Mathematische Fächer.* — Allé : Mathematik I. Curs. — Zsigmondy : Mathematik I. Curs. — Czuber : Mathematick II (Bauingenieurschule), Grundlehren der höheren Mathematick, Wahrscheinlichkeitsrech. — Reich : Ausgewählte Kapitel aus der höheren Algebra. — Tauber : Versicherungsmathematik I. u. II. C. — Blaschke : Einführung in die mathematische Statistik. — v. Daublebsky : Theorie der Raumkurven u. Flächen. — Müller : Darstellende Geometrie u. konstruktives Zeichnen. — Schmid : Darstel-

---

[1] Faute de place nous devons renvoyer au numéro de janvier 1904 la publication du tableau des cours de mathématiques des principales *Universités des Etats-Unis*.

La Rédaction.

lende Geometrie und konstruktives Zeichnen. — Müller : Stereographische Projektion u. Cyklographie, Seminar für darstellende Geometrie. — Schmid : Projektive Geometrie I u II. — Finger : Elemente der reinen Mechanik in Verbindung mit graphischer Statik. — Zsigmondy : Elemente der reinen Mechanik in Verbindung mit graphischer Statik. — Finger : Encyklopädie der Mechanik. — v. Tetmajer : Technische Mechanik I. Tl. — Hermanek : Technische Mechanik II. Tl., Hydromechanik, ausgewählte Kapitel. — Finger : Analytische Mechanik. — Pollack : Elemente der niederen Geodäsie. — Schell : Praktische Geometrie, Situationszeichnen, Photogrammetrie. — Tinter : Methode der kleinsten Quadrate, Höhere Geodäsie. Sphärische Astronomie, Uebungen im Beobachten und Rechnen, Geodätische Rechenübungen.

FRANCE

Paris. — *Faculté des Sciences.* — G. Darboux : Principes généraux de la Géométrie infinitésimale (2 heures par semaine). — E. Goursat : Opérations du calcul différentiel et du calcul intégral. Eléments de la théorie des fonctions analytiques (2 heures). — P. Painlevé : Des lois générales de l'équilibre et du mouvement (2 heures). — P. Appell : Eléments de mathématiques préparatoires à l'étude de la mécanique et des sciences physiques (3 heures). — H. Poincaré : Des perturbations planétaires (2 heures). — J. Boussinesq : Propriétés thermo-mécaniques des solides et des fluides. (Théories générales des pressions, des déformations et de la conductibilité. Application aux solides : dilatations et déformations thermiques. Application aux fluides : courants de convection ; pouvoirs refroidissants d'un fluide et d'un courant fluide.) (2 heures). — G. Kœnigs : De la cinématique théorique et de son application aux machines. La statique graphique et ses applications à l'étude des machines à l'état de mouvement (2 heures). — L. Raffy : Conférences sur la Géométrie supérieure (1 conf. par sem.). — P. Puiseux : Conférences sur la mécanique. Exercices et développements sur le programme du certificat de mécanique rationnelle. Théorie de l'attraction. Attraction des ellipsoïdes (2 conf. par sem.). — Andoyer : Conférences préparatoires à l'agrégation des sciences mathématiques (2 conf. par sem.). — Blutel : Conférences préparatoires à l'agrégation des mathématiques (1 conf. par sem.). — M. Servant : Conférences sur la mécanique physique (1 conf. par sem.).

Cours de mathématiques générales. — Ce cours est destiné à mettre les étudiants, qui ne possèdent pas suffisamment le programme de mathématiques spéciales, à même de profiter le plus rapidement possible de l'enseignement supérieur de la Faculté. Cet enseignement dont la création était attendue depuis longtemps est confié à M. Paul Appell,

l'éminent professeur de Mécanique rationnelle de la Faculté des sciences. Les cours auront lieu 3 fois par semaine pendant le semestre d'hiver.

Dans notre prochain numéro nous indiquerons les points principaux du programme de cet enseignement.

ILES-BRITANNIQUES

London. *King's College (University of London).* — Mathematics. Professor : W. H.-H. Hudson. Lecturers : J.-B. Dale ; R.-W.-K. Edwards.

Class I, five hours (preparing for the London University Matriculation Examination) Arithmetic, Algebra and Geometry.

Class II, four hours (preparing for the London University Intermediate Examination in Arts and Science), Geometry, Algebra, Solid Geometry Trigonometry and Plane Coordinate Geometry.

Class III, four hours (preparing for the B. A. Pass Examination of the University of London), Algebra, Trigonometry, Geometrical, Conics, and Plane Coordinate Geometry.

Class IV, special course B. A., and B. Sc. Honours. — Alg. Analysis, 1 h. — Analytical Geometry of Curves and Surfaces, 1 h. — Differential Equations, 1 h.

Class V, course for M. A. — Higher Analysis, 1 h. — Differential Equations of Mathematical Physics, 1 h.

Applied Mathematics. Professor : W. G. Adams. Demonstrator : F. White. Theoritical Mechanics, I Int. Arts class, two hours. — II. B. A. Class, tree hours ; Statics and Dynamics, Hydrostatics, Astronomy.

CORRESPONDANCE

A propos de l'article de M. R. Baron

Philologues et Psychologues en face du problème des parallèles.

L'article publié sous ce titre dans notre numéro de juillet (année 1903, p. 278-287) a, comme on devait s'y attendre, soulevé plusieurs critiques. M. Baron a certainement eu une pensée originale en voulant montrer qu'il y a des tournures d'esprit qui n'acceptent plus la science, quand elle cesse de donner des résultats tangibles ou qu'elle élargit le domaine de nos conceptions au delà de celui qui est accessible à nos sens. Mais il faut reconnaître qu'il s'appuie parfois sur des notions

géométriques un peu fantaisistes. Telle est celle de l'*angle tronqué* (p. 287). Elle n'a aucun sens précis, l'auteur ayant négligé définir ce qu'était la mesure d'un angle tronqué. Introduire une notion d'aire dans la mesure d'un angle ne peut conduire qu'à des contradictions bizarres.

Nous reproduisons ci-dessous celle des critiques qui insiste précisément sur ce point; elle est extraite d'une intéressante lettre que nous adresse M. C. Popovici, professeur à Turno-Severin (Roumanie).

La Rédaction.

. . . .

Je crois nécessaire pour l'intelligence des choses de rappeler d'abord textuellement le passage dans lequel M. Baron expose sa notion d'angle tronqué.

« J'aimerais mieux, pour mon compte, démontrer d'emblée que la somme des trois angles d'un triangle ne peut être *inférieure* à deux droits (on sait que cette somme ne peut être *supérieure* à deux droits). Je me servirai, toujours à l'usage de gens qui ont ma psychologie, de la notion de l'Angle tronqué.

« L'angle tronqué est un espace non fermé et néanmoins délimité par 3 droites. Par le fait, c'est un angle-espace diminué d'un triangle plus ou moins grand. Que cet espace triangulaire soit négligeable ou non, il est évident que l'angle tronqué ne saurait être *plus grand* que l'angle non tronqué dont il dérive.

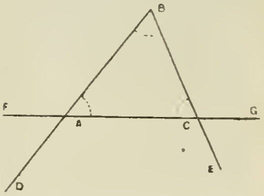


Fig. 1.

« Dans de telles conditions, la somme des espaces FAD + DACE + ECG ne saurait être supérieure à FAD + DBE + ECG, et il en résulte que la somme des angles A + B + C égale au moins deux angles droits (angles-espace).

« Telle est la tournure de mon propre esprit : je ne vois pas la faute logique que je puis commettre en ceci, savoir : Que la somme des *angles-espace* d'un triangle, n'étant ni inférieure ni supérieure à deux droits, elle est forcément égale à deux droits. Je suis évidemment un vulgaire euclidien, puisque cette preuve me suffit. — Mais il est probable que je ne serai pas le seul. »

Les raisonnements de M. Baron offrent vraiment une grande apparence de rigueur, puisqu'ils sont soutenus par des preuves évidentes à nos yeux. Mais je crois qu'il y a souvent une différence entre ce que nous voyons et ce qui existe.

En effet, reprenons ces raisonnements pour en tirer quelques conclusions.

Premièrement, la conclusion, ou, pour mieux dire, le premier fait observé est le suivant :

FAD + DBE + ECG, c'est-à-dire :

EA + B + C = 2 angles-espace + ABC triangle-espace.

et, d'autre part, puisque la somme A + B + C ne peut être inférieure à deux angles droits et puisqu'il est déjà démontré qu'elle ne peut être supérieure, on a forcément la conclusion :

$$A + B + C = 2 \text{ angles droits-espace.}$$

Retranchons membre à membre :

$$O = ABC \text{ triangle-espace.}$$

Je crois que je ne serais pas trop prétentieux si je proposais à M. Baron de me démontrer que tous les triangles sont égaux. Je viendrai démontrer à mon tour que l'infini est nul.

On peut utiliser les conclusions citées, à savoir : FAD + DBE + ECG = A + B + C = 2 angles droits espace, c'est-à-dire l'espace illimité FABCG = 2 angles droits espace, et pour les appliquer à l'étude de la variation de la somme de deux angles droits ; on supposera que la droite AC se déplace parallèlement pour aller même au delà de B.

Il y aurait là une belle question ; je me borne à faire remarquer qu'on pourra la résoudre : 1) Par la géométrie euclidienne ; 2) Par la géométrie non-euclidienne.

Voici maintenant une autre question : soient deux angles égaux (angles-espace) A et A'. Supposons que l'on ait disposé les angles A et A' de manière qu'ils aient un côté commun et qu'ils forment deux angles correspondants BAC, BA' C'.

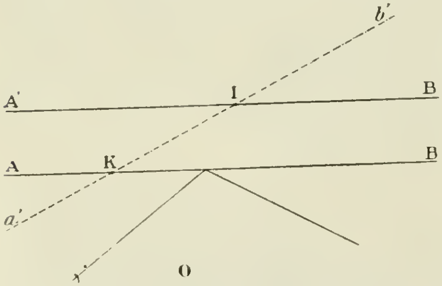


Fig. 2.

Alors nous voyons que la différence de ces angles est l'espace infini CAA'C' : mais les angles étant égaux leur différence est nulle, donc l'espace infini CAA'C' est nul.

Passons à une autre question. La somme de tous les angles adjacents formés autour d'un point O et d'une même partie d'une droite est égale à deux angles droits. Donc tout l'espace ABO vaut deux angles droits, de même tout l'espace A'B'O fera deux angles droits.

Par conséquent la différence AB, A'B' est égale à zéro.

Les lecteurs, et peut-être M. Baron aussi, liront avec intérêt ces quelques remarques et ils comprendront mes conclusions.

C'est le danger de l'introduction trop délicate de l'Angle-espace au lieu de l'angle biradial. Dans mes raisonnements je n'ai fait que suivre les conseils de M. Baron : « On ne doit confondre l'angle biradial avec l'angle-espace ». Particulièrement il nous faut remarquer que deux

angles dont les côtés ont des directions qui font entre elles un angle nul ne sont pas nécessairement égaux ; dans tous les autres cas, lorsque les directions des côtés feront des angles égaux, les angles seront égaux, c'est-à-dire superposables (il faut remarquer que je parle en géométrie euclidienne).

Puis je tiens à signaler une erreur de logique. Quoique M. Baron déclare : qu'il sait que la somme des angles d'un triangle *ne peut être supérieure* a deux angles droits, il constate que cette somme *dépasse* deux angles droits précisément du triangle ABC, quantité négligeable ou non (si elle ne saurait être négligeable M. Baron, croyait — je pense — avoir mieux raison), puis il en conclut : donc cette somme ne peut être inférieure à deux angles droits, et d'après cette tournure il ne voit pas la faute logique s'il dit que cette somme est forcément égale à deux droits. C'est d'abord un fait psychologique, je m'imagine, constaté par nous tous, que lorsque nous avons des idées préconçues, notre psychologie nous emporte, par des fautes logiques, à forcer les raisonnements jusqu'à ce que notre but proposé soit atteint.

Une autre faute est qu'on opère avec des infiniment grands comme avec des quantités égales, et, ce qui est plus dangereux dans ces raisonnements, est qu'on exprime la différence entre des quantitées infinies $(A + B + C) - 2$ triangles-espace par des quantitées finies : triangle ABC négligeable ou non.

Il y a encore un raisonnement très curieux que je veux donner à propos de cette remarque. Une droite infinie partage le plan en deux demi-plans. Il n'y a pas de raison pour que ces deux demi-plans ne soient pas égaux, ou mieux : par raison de symétrie ces deux demi-plans sont égaux.

Supposons que cette droite infinie $a'b'$ tourne autour du point I et devienne A'B' ; alors les demi-plans $a'b'$,G et A'B',O sont égaux puisqu'on a retranché et ajouté deux angles (espace) opposées au sommet I. On a donc $A'B'O = a'b'o$. D'autre part si la droite avait tourné de même angle autour du point K on aurait pour la même raison $a'b'o =$ ABO. Donc $A'B'O = ABO$. J'ai donc bien démontré rigoureusement que l'espace infini ABA'B' est nul. Mais, si vous ne le voulez pas, alors il vous faudra admettre que lorsqu'une droite $a'b'$ tourne autour d'un de ses points les deux demi-plans séparés varient d'après la position du point de rotation, mais alors c'est contraire à l'hypothèse qu'une droite partage le plan en deux demi-plans égaux, dont nous sommes partis, ce qui est absurde ; de plus, je vous prie, précisez-moi de quelle partie doit se mouvoir le point I pour que le demi-plan $a'b'o$ croisse, et de quelle partie pour qu'il décroisse pendant la rotation, et cela pour quelle raison.

C. Popovici (Turno-Severin, Roumanie.)

BIBLIOGRAPHIE

A.-R. Forsyth. — **A Treatise on Differential Equations**. Third Edition. 1 vol. relié, 511 pages : Macmillan et C^ie^, Londres, 1903.

Nous signalons à nos lecteurs cette nouvelle édition du *Treatise on Differential Equations* de M. Forsyth. Ce traité appartient depuis longtemps à la catégorie des ouvrages classiques sur les éléments de la théorie des équations différentielles, et c'est à ce titre qu'il a été traduit en allemand (en 1889 et récemment en italien. Il n'y a donc pas lieu de donner une analyse de ce livre ; il suffira de signaler simplement en quoi cette troisième édition, revue et augmentée, diffère de la précédente.

Les principaux changements portent sur l'étude de l'équation de Riccati, sur la discussion des conditions d'intégrabilité d'une équation aux différentielles totales, et sur la démonstration du théorème fondamental relatif à l'intégrale d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre de Lagrange.

D'autre part, l'auteur a ajouté un court aperçu de la méthode de Runge pour la résolution numérique d'équations différentielles du premier ordre et de la théorie des multiplicateurs de Jacobi ; il signale également la méthode de Frobenius pour la résolution des équations linéaires à l'aide de séries. Ajoutons pour terminer, que le nombre des problèmes et exercices a été considérablement augmenté. H. F.

E. Goursat. — **Cours d'Analyse Mathématique**, t. I. — 1 vol. gr. in-8° ; prix : 20 francs ; Paris, Gauthier-Villars, 1902.

L'ouvrage de M. Goursat est le résumé de son cours de la Faculté des Sciences ; le premier volume contient l'étude des fonctions de variables réelles sauf la théorie des équations différentielles reportée au deuxième volume et la théorie des incommensurables exposée dans les livres d'Algèbre.

Tout au long du premier volume on retrouvera le désir exprimé par l'auteur de rester élémentaire dans son exposition, précise et claire mais éloignée cependant d'une « généralité superflue dans un livre d'enseignement ». On remarquera non moins l'abondance des matières traitées dans ce livre, leur adaptation aux nécessités d'un enseignement de plus en plus riche et pénétrant, et le souci constant de M. Goursat d'éclairer une théorie abstraite par un exemple concret, géométrique s'il est possible.

Nous ne pouvons que citer les théories sur lesquelles l'auteur a particulièrement insisté et les questions qui semblent émerger du fond moyen des cours de licence.

La notation différentielle est introduite dès les premières questions par suite « des avantages qu'on y trouve pour la symétrie et la généralité dans les formules ».

Parmi les premières questions étudiées, les fonctions implicites et les déterminants fonctionnels se résument dans le théorème suivant :

« Soient $u_1, u_2, \ldots u_n$, n fonctions de n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots x_n$. Pour qu'il existe entre ces n fonctions une relation ne renfermant pas les variables $x_1, x_2, \ldots x_n$, il faut et il suffit que le déterminant fonctionnel correspondant soit identiquement nul ».

L'auteur appelle l'attention de l'étudiant sur la grande importance de cette proposition en Analyse et montre comment on peut en tirer le théorème fondamental des logarithmes.

A propos des changements de variables quelques pages sont consacrées aux transformations des courbes planes et aux transformations de contact ; à citer ici les exemples de Legendre et d'Ampère.

Les notions de limite inférieure et supérieure d'un ensemble de nombres ainsi que la notion d'oscillation précèdent la méthode de Riemann dans la recherche de la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit intégrable dans un intervalle : une fonction continue satisfait à une telle condition.

Successivement nous voyons comme applications des intégrales : la démonstration de la transcendance du nombre e par la méthode de M. Hermite et l'esquisse des intégrales curvilignes; puis quelques aperçus des intégrales abéliennes et des courbes unicursales. Après l'exposé des intégrales elliptiques, suivent l'intégration double avec la formule de Green et l'exposition du changement de variables ; ces théories s'achèvent par des compléments sur les intégrales de surface, les formules de Stokes et les intégrales eulériennes; la théorie des intégrales multiples se ramène d'ailleurs facilement à celle des intégrales doubles par des transformations successives.

Dans l'intégration des différentielles totales d'une importance si considérable en Physique mathématique, les périodes sont abordées en quelques lignes faciles à lire.

Depuis la représentation et la définition des fonctions analytiques par des séries de Taylor, les séries ont acquis une importance considérable et même fondamentale dans les questions les plus abstraites de l'Analyse, alors qu'auparavant leur rôle se réduisait presque à n'être qu'une méthode de calcul. La théorie des séries entières et des fonctions représentées par une série de Maclaurin semble être un sujet de la plus grande importance pour les futurs mathématiciens; qu'il s'agisse de la croissance des fonctions ou de leurs points singuliers lorsqu'elles sont uniquement connues par une série de Maclaurin ou définies par une équation différentielle, on trouve là tout un ensemble de questions difficiles dont la résolution partielle a permis d'approfondir les concepts de fonction et de nombre ; les travaux qui s'y rapportent constituent actuellement une grande partie de l'Analyse pure.

L'auteur s'y arrête longtemps.

Il rappelle les règles de convergence ; la règle de Cauchy étant plus générale que celle de d'Alembert. Les critères logarithmiques permettent de se figurer une échelle de convergence et de divergence ; ils se rattachent aussi à l'une des questions les plus étudiées à l'heure actuelle : la croissance des fonctions ; ils sont suivis de la multiplication des séries et de la théorie des séries multiples où se présente la généralisation du théorème de Cauchy ramenant la convergence d'une série à l'existence d'une intégrale double.

La représentation des fonctions par des séries commence avec la notion

de convergence uniforme. La continuité d'une fonction entière et la formation de ses dérivées successives se présentent ensuite.

L'introduction des fonctions majorantes permet de grouper autour d'une idée simple un grand nombre de questions, comme la substitution d'une série entière dans une autre, la division des séries entières et la théorie des fonctions implicites avec la décomposition d'une fonction de deux variables en un produit de deux facteurs d'après Weierstrass ; cette décomposition est intéressante au double titre historique et formel car c'est l'une des premières propositions générales obtenues dans la théorie des fonctions de plusieurs variables. L'étude des fonctions implicites définies par un système d'équations est résumée dans un théorème général dont la démonstration n'est faite que sur un cas particulier.

Le développement des fonctions arbitraires en séries trigonométriques et des fonctions continues en séries de polynômes met en évidence divers modes, plus généraux, de représentation des fonctions soumises dans un intervalle donné à moins de restrictions que les fonctions développables en séries de Taylor; celles-ci doivent avoir des dérivées alors qu'une fonction continue peut ne pas en avoir comme le montre l'exemple de Weiertrass avec lequel M. Goursat finit la partie purement analytique de son premier volume.

Les trois derniers Chapitres présentent les applications géométriques de l'Analyse qui précède.

La notion de courbure est rapidement introduite.

A la théorie des enveloppes et des surfaces développables succède l'exposé détaillé de la courbure et de la torsion avec leur application aux hélices et aux courbes de M. Bertrand.

La théorie des surfaces profite largement de l'aide des simplifications géométriques ; les calculs effectués permettent souvent l'expression facile des éléments et des conditions en coordonnées curvilignes ; c'est ainsi que les équations des lignes asymptotiques et des lignes de courbures sont obtenues avec des exemples simples d'application.

Les lignes de courbure donnent lieu à la démonstration des formules d'Olinde Rodrigues, des théorèmes de Joachimsthal et de Dupin suivis de leurs applications aux lignes planes et sphériques qui sont lignes de courbure, aux surfaces homofocales du second degré ainsi qu'à la transformation par rayons vecteurs réciproques.

Par la généralisation des surfaces réglées, les congruences et les complexes sont amenés naturellement et constituent une introduction à la génération rectiligne de l'espace. Parmi les systèmes de droites les plus intéressants, la congruence des rayons lumineux normaux à une surface conserve sa propriété après un nombre quelconque de réfractions.

A la fin des chapitres sont indiqués des problèmes : énoncés de licence ou propositions tirées des travaux de Laplace, Euler, Jacobi, Halphen, Hermite, Painlevé, Darboux... ; la résolution de ces dernières propositions constituerait un acheminement vers les véritables recherches scientifiques.

L. Desaint (Paris).

Ernesto Pascal, Professore ordinario nella R. Universita di Pavia. **I gruppi continui di trasformazioni** (Parte generale della teoria). Un vol. 358 p. (Manuali Hœpli). Prix : 3 fr. 00; Ulrico Hœpli, Milano, 1903.

La théorie des groupes continus de transformations, due au génie de So-

phus Lie, ne constitue pas seulement une théorie de la plus grande élégance; ses nombreuses applications dans les branches les plus diverses de la science mathématique autorisent toutes les espérances.

Les relations qu'elle a créées entre des domaines sans connexion apparente, les méthodes générales qu'elle a introduites dans l'intégration des équations différentielles ordinaires, l'harmonie qu'elle a déjà apportée dans la théorie des équations aux dérivées partielles, les points de vue admirablement généraux et féconds dont elle a doté la géométrie, la clarté qu'elle est venue jeter sur la question des principes de cette dernière science, tout concourt à lui faire, dans l'Analyse mathématique, une place des plus importantes, qui ne peut qu'aller en s'élargissant.

L'œuvre de Sophus Lie est contenue dans des mémoires publiés à mesure de sa création, à partir de l'année 1873, pour la plupart à Christiania.

Elle se trouve systématiquement exposée dans une série d'ouvrages, comprenant au moins sept gros volumes gr. in-8° et dûs à la collaboration de Sophus Lie et de MM. Engel et Scheffers, et édités par la maison Teubner à Leipzig.

Comme le dit Sophus Lie lui-même, la structure de cette œuvre se ressent du souci de présenter ces choses nouvelles dans leur imposante généralité, de ne pas abandonner un sujet avant d'en avoir épuisé tous les points de vue, de ne pas manquer de signaler les nombreuses ramifications qui se détachent vers les autres branches des mathématiques.

On conçoit qu'une telle œuvre ne s'adresse guère aux étudiants.

Il existait là une lacune : elle est désormais comblée de la manière la plus heureuse par l'ouvrage de M. Pascal.

Dans ce charmant petit livre, pas plus volumineux qu'un agenda de poche, on trouvera la matière du premier volume de la « Théorie de Sophus Lie, c'est à-dire, en somme, ce qui constitue la théorie proprement dite des groupes finis et continus de transformations, non sans rencontrer plusieurs résultats dus aux travaux personnels de l'auteur.

Ceux à qui il est arrivé de se rebuter devant l'œuvre substantielle, mais d'une assimilation parfois un peu laborieuse, de Sophus Lie, goûteront d'autant plus vivement, dans l'ouvrage de M. le Professeur Pascal, la sobriété élégante du discours, la simplicité directe des démonstrations, la liaison des idées, bref tous ces soins de haute politesse par lesquels l'auteur garde pour soi le travail fastidieux, en laissant au lecteur l'illusion de la facilité.

Il n'est pas jusqu'à cette délicieuse langue italienne dont la fluidité ne concoure à cette impression de facilité, qui émane de tout le livre.

M. le Professeur Pascal laisse entendre, dans sa préface, qu'il se propose de consacrer un second volume à l'étude de certains groupes particuliers, ainsi qu'à l'étude si importante des transformations de contact.

Nous espérons que l'œuvre sera ensuite complétée par l'exposé des applications de la théorie des groupes continus de transformations à l'intégration des équations différentielles et à la théorie des équations aux dérivées partielles. Nous espérons en outre, dans l'intérêt de la diffusion de cette partie de l'Analyse mathématique, que ces divers ouvrages tenteront les traducteurs.

G. Combebiac (Limoges).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

Annals of Mathematics, publiées sous les auspices de Harvard University, par O. Stone. W.-E. Byerly, H.-S. White, W.-F. Osgood, F.-S. Woods. Cambridge. U. S. A. Publication trimestrielle gr. in-4°. Second Series, vol. IV, 1902-1903.

N° 3. — R.-C. Archibald : The Cardioid and Tricuspid : Quartics with Three Cusps. — E.-D. Roe : Note on a Partial Differential Equation of the First Order. — A.-S. Gale : On a Generalization of the Set of Associated Minimum Surfaces. — H.-S. White : Twisted Quartic Curves of the First Species and Certain Covariant Quartics. — E.-R. Hedrick : On the Characteristics of Differential Equations.

N° 4. — E.-R. Hedrick : (Voir n° précédent). — M. Böcher : On the Uniformity of the Convergence of Certain Absolutely Convergent Series. — W.-F. Osgood : The Integral as the Limit of a Sum, and a Theorem of Duhamel's. — R.-E. Moritz : On a General Relation of Continued Fractions. — J.-A. Van Groos : Note on the Equilateral Hyperbola. — G.-A. Miller : A New Proof of the Generalized Wilson's Theorem. — E.-B. Van Vleck : A Sufficient Condition for the Maximum Number of Imaginary Roots of an Equation of the *n*-th Degree.

Atti de la Reale Accademia dei Lincei. — Comptes rendus publiés par l'Académie des Lincei, année 300, 5e série, 1903. E. Lœscher et Cie, Rome.

1er mars. — Morera : Sulla trasformazione delle equazioni differenziali di Hamilton. — Capelli : Sulle relazioni algebriche fra le funzioni θ di una variabile e sul teorema di addizione. — Dall'Acqua : Sulle terne ortogonali di congruenze a invarianti costanti. — Fubini : Sul problema di Dirichlet nello spazio iperbolico indefinito. — Viterbi : Sull'equilibro d'un ellisoïde planetario di rivoluzione elastico isotropo.

15 mars. — Picciati : Campo elettromagnetico generato del moto circolare uniforme di una carica elettrica parallelamente ad un piano conduttore indefinito. — Dall'Acqua : Moti di un punto libero a caratteristiche indipendenti. — De Franchis : Sulle corrispondenze algebriche fra due curve.

5 avril. — Bianchi : Sulle quadriche coniugate in deformazione ; Sulla nozione di gruppo complementare e digruppo derivato nella teoria dei gruppi continui de trasformazioni. — Capelli : Sulle relazioni algebriche fra le funzioni θ di una variabile e sul teorema di adizione. — Millosewich : La stella nuova (variable ?) in gemini ; le ultime posizioni della cometa 1903 a. — Dall'Acqua : Moti di un punto libero acaratteristiche indipendenti : Traiettorie dinamiche di un punto libero, sollecitato da forze conservative. — Vi

TERBI : Sull' equilibro d'un ellisoide planetario di rivoluzione elastico isotropo.

19 avril. — BIANCHI : (Voir séance précédente). — MORERA : Sulla trasformazione delle equazioni differenziali di Hamilton. — VITERBI : (Voir séance précédente). — DE FRANCHIS : Sulle corrispondenze algebriche fra due curve.

3 mai. — PASCAL : Introduzione alla teoria delle forme differenziali di ordine qualunque. — DALL'ACQUA : Traiettorie dinamiche di un punto libero, sollicitato da forze conservative.

17 mai. — PASCAL : Sulla costruzione dei simboli a carattere invariantivo nella teoria delle forme differenziali di ordine qualunque. — RICCI : Sulle superficie geodetiche in una varietà qualunque e in particolare nelle varietà a tre dimensioni.

5 juin. — PASCAL : Una classe di covarianti simultanei di un forma differenziale di ordine qualunque, e di una alle derivate parziali. — RICCI : Sulle superficie geodetiche in una varietà qualunque e inparticolare nelle varietà a tre dimensioni. — MILLOSEWICH : Osservazioni dei pianetini LT ed LU Dugan 1903. — CONTARINI : Sul moto d'un sistema olonomo di corpi rigidi. — FUBINI : Ricerche gruppoli relative alle equazioni della dinamica.

Bulletin de la Société mathématique de France, publié par les secrétaires, t. XXXI, 1903 ; Paris, au siège de la Société, à la Sorbonne.

Fasc. III. — E. BOREL : Sur l'approximation des nombres réels par les nombres quadratiques. — E. GOURSAT : Sur la théorie des fonctions implicites. — E. LECORNU : Sur les lignes asymptotiques de certaines surfaces.— LEBESGUE : Sur le problème des aires. — E. ESTANAVE : Sur les coefficients des développements en séries de $\tang x$, $\sec x$, et d'autres fonctions. — J. HADAMARD : Sur un problème mixte aux dérivées partielles. — N. SALTYKOW : Sur l'existence des intégrales d'un système complet d'équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue.— Comptes rendus des séances (avril, juillet 1903).

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik begründet von Carl Ohrtmann, herausgegeben von EMIL LAMPE und GEORG WALLENBERG, Band 32, Jahrgang 1901 (in drei Heften). Georg Reimer, Berlin, 1903.

Heft 1. — I Geschichte und Philosophie. — II Algebra. — III Niedere und höhere Arithmetik. — IV Kombinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung. — V Reihen. — VI Differential-und Integralrechnung. — VII Funktionentheorie.

Heft 2. — VIII Reine, elementare und synthetische Geometrie.— IX Analytische Geometrie.

Nouvelles Annales de Mathématiques, dirigées par C.-A. LAISANT, C. BOURLET et R. BRICARD, série 4, t. III, 1903 ; Gauthier-Villars, Paris.

Tome III, 1903, janvier. — C.-A. LAISANT : Rayon de courbure d'une courbe plane. Remarques et constructions. — M. CANON : Démonstration de la construction trouvée par Hamilton pour déterminer le point où le cercle des neuf points d'un triangle touche le cercle inscrit. — R. BRICARD : Note sur l'inversion. — D. MIRIMANOFF : Sur l'équation $x^3+y^3+z^3=t^3$.— R. DE MONTESSUS : Un paradoxe du Calcul des probabilités. — A. VACQUANT : Solution de la question de Mathématiques spéciales donnée à l'Agrégation en 1902.

Février. — G. Lery : Sur les cercles tangents à trois cercles donnés. — L. Autonne : Sur la canonisation des formes bilinéaires. — M. Stuyvaert : Sur la sphère osculatrice à la cubique gauche. — P.-J. Suchar : Sur une interprétation géométrique des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et avec second membre. Solution de la question de Mécanique proposée à l'Agrégation en 1902.

Mars. — G.-A. L. Nécrologie : Ernest Duporcq. — R. Bricard : Sur un problème relatif aux surfaces. — A. Mannheim : Sur le théorème de Schœlcher. — G. Fontené : Correspondance (1, 1) entre les deux décompositions $N = A \times B$ et $N = P^2 + Q^2$. — A. Caussé : Question d'Analyse de l'Agrégation (1902). — A. Lochard : Recherche géométrique de la surface gauche minima. — Correspondance. — Certificats d'études supérieures.

Avril. — E. Jaggi : Sur les fonctions admettant les substitutions d'un groupe donné et seulement celles-là. — C. Bourlet : Sur le mouvement d'un point pesant sur une courbe avec résistance proportionnelle au carré de la vitesse.

Mai. — G. Majcen : Sur quelques rapports entre les triangles et les coniques. — G. Fontené : Sur les entiers algébriques de la forme $x + y\sqrt{-5}$. — L. Crelier : Construction des rayons rectangulaires des faisceaux homographiques. — V. Jamet : Sur la théorie des forces centrales.

Juin. — H. Andoyer : Problème de mécanique rationnelle. — A. Mannheim : Démonstration d'un théorème de Villarceau. — E. Iaggi : Sur la transformation des fonctions d'une variable.

Juillet. — H. Padé : Sur l'herpolhodie. — J. Sire : Sur la multiplication par 5 d'une période de la fonction *pu*. — E. Iaggi : Sur la transformation des fonctions d'une variable.

Août. — L'Esperanto et les Mathématiques. — R. Bricard : Démonstration simple du théorème de Fermat. — G. Lechalas : Un paradoxe du Calcul des Probabilités. — E. Estanave : Du calcul explicite des intégrales définies du type

$$H_q = \int_0^{2\pi} z^q \sin jz\,dz, \qquad J^q = \int_0^{2\pi} z^q \cos jz\,dz,$$

avec quelques applications à la recherche de développements en séries trigonométriques. — Note sur l'équation en *s* (J. S.). — V. Jamet : Sur les intégrales de Fresnel. — R. Bricard : Sur une propriété des lignes de courbure des surfaces.

Periodico di Matematica, publié par G. Lazzeri. Organe de l'Association « Mathesis » paraissant tous les deux mois. Livourne, R. Giusti. 18° année. 1903.

Mars-Avril. — Cortesi : Equazioni a radici in progressione aritmetica. — Crepas : Una successione di numeri interi. — Frattini : La radice quadrata d'un intero e un certo gruppo di trasformazioni. — Biasi : Sul postulato dell'equivalenza. — Scarpis : Una proprietà degli archi le cu funzioni goniometriche sono razionali. — Ciamberlini et Cipolla : Osservazioni sulla nota del dott. Lazzarini « sui numeri perfetti e sui numeri di Mersenne ». Petites notes. Questions résolues et à résoudre.

Mai-Juin. — A. Droz-Farny : Note geometriche sopra alcune proprietà dell'iperbole equilatera. — Niccoletti : Un teorema sulle funzioni razionali. — Bernardi : Sull'estrazione abbreviata della radice quadrata intera dei numeri

interi. — PATRASSI : Sopra alcune formole relative alle progressioni per differenza. — LAZZARINI : Un nuovo teorema sulla funzione E di Legendre. — CERETTI : Matematica ed Esperanto. — CIPOLLA : Delle congruenze binomie rispetto ai numeri primi della forma $2^m q + 1$ essendo q un numero primo. — Problèmes divers. — Bibliographie.

Supplemento al Periodico di Matematica (Mars et Avril). PUCCIANTI : Corrispondente elettrico del diamagnetismo. — M. ZUCCAGNI : Sopra un criterio di divisibilita valevole per qualunque numero primo (esclusi 2 e 5). — E.-N. BARISIEN : Sulla decomposizione d'una somma di due quadrati in una somma di quattro quadrati. — Questions et solutions.

Mai. Juin. Juillet. — G. LAZZERI : Teoria geometrica dei piani, assi e centri radicali. — ANONYME : Necrologie de Luigi Cremona. — B. LEVI : Teoria geometrica delle proporzioni fra segmenti, indipendente dal postulato d'Archimede. — R. PITONI : La risonanza elettrica. — G. LAZZERI : Sistemi di circoli e sfere. — A. PENSA : A proposito di una formula di geometrica metrica — Nombreux problèmes résolus et à résoudre.

Revista trimestral de matematicas, publiée par J. RIUS Y CASAS. Saragosse. 2e année. 1902.

Fasc. V. — L. DE ALBA : Formulas de la Geometria del Triangulo. — E. HERNANDEZ : Calculo de los coeficientes de la transformada de una funcion algebrica, racional y entera de mas de una variable. — E.-N. BARISIEN : Sobre el problema de Malfatti. — E. NANNEI : Nota sobre racionalizacion.

Fasc. VI. — R. CARO : Intégrales multiples.

Fasc. VII. — L.-S. DE LA CAMPA : Investigation de un lugar geometrico. — J. RIUS Y CASAS : Caracteres formales de la igualdad.

Fasc. VIII. — J.-J. DURAN-LORIGA : Nota de geometria del Triangulo. — L. DE ALBA : Formulas de la geometria del Triangulo. — E. HERNANDEZ : Séries notables. — E. SANCHIS : Nota de aritmetica. — Bibliographie. Chronique et Questions diverses.

Fasc. IX. — L. DE ALBA : Formulas de la geometria del Triangulo. — R. CARO : Integrales hiperbolicas. — J. RUIZ-CASTIZO : Algunas formulas para el empleo de ejes coordenados oblicuos en la Mecanica analitica. — C. ALASIA : Algunas observaciones sobre formulas de las superficies.

Fasc. X. — L. OCTAVIO DE TOLEDO : Dos versiones españolas de los Elementos de Euclides. — L. CLARIANA : Estudio de las ecuaciones entre derivadas parciales de cuarto orden, con dos variables independientes. — J. RUIZ-CASTIZO : Algunas formulas para el empleo de ejes coordenados oblimos en la Mecanica analitica. — Bibliographie. — Chronique. — Questions résolues et à résoudre.

Revue générale des Sciences pures et appliquées. Directeur : L. OLIVIER, 14e année, 1903, Arm. Colin, Paris.

Sous le titre de l'*Evolution de la Mécanique*, M. P. DUHEM, professeur de Physique théorique à la Faculté des Sciences de Bordeaux, publie dans cette *Revue* une série d'articles fort remarquable où il étudie successivement :

I Les diverses sortes d'explications mécaniques (no 2, 30 janvier). — II La Mécanique analytique (no 3, 15 février). — III Les Théories mécaniques de la chaleur et de l'électricité (no 4, 28 février). — IV Le retour à l'Atomisme et au Cartésianisme. — V Les fondements de la Thermodynamique. — VI La

Statique générale et la Dynamique générale. — VII Les branches aberrantes de la Thermodynamique.

Nous espérons que cette série sera quelque jour résumée et publiée sous un volume spécial.

Livres nouveaux :

H. Bruns. — **Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens**. Un vol. broché, in-8°, 159 p. ; prix : Mk. 3,40 ; B.-G. Teubner, Leipzig, 1903.

J. Classen : **Theorie der Elektrizitæt und des Magnetismus**, Band I. Elektrostatik und Elektrokinetik (*Sammlung Schubert*). — Un vol. cart., 189 p. ; prix : Mk. 5 ; G.-J. Goeschen, Leipzig. 1903.

F. Enriques. — **Vorlesungen über projektive Geometrie**. Deutsche Ausgabe von Herm. Fleischer, mit einem Einführungswort von Felix Klein. — Un vol. broché, in-8°, 374 p. ; prix : Mk. 8 ; B.-G. Teubner, Leipzig, 1903.

Arw. Fuhrmann. — **Bauwissenschaftliche Anwendungen der Integralrechnung**. Lehrbuch, Aufgabensammlung und Literaturnachweis. Teil IV der Anwendungen der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften, im Hochbau und in der Technik. — Un vol. broché, 292 p. ; W. Ernst Sohn, Berlin, 1903.

K. u. V. Kommerell. — **Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flæchen** (*Sammlung Schubert*). — Deux vol. cart. de 144 et 212 p. ; prix : Mk. 4,80 et 5,80 ; G.-J. Goeschen, Leipzig. 1903.

G.-A. Maggi. — **Principii di Stereodinamica**. Corso sulla Formazione, l'Interpretazione et l'Integrazione delle equazioni del movimento dei solidi. — Un vol. broché, in-8°, 262 p. ; prix : L. 7.50 ; Ulrico Hœpli, Milan, 1903.

G. Papelier. — **Précis d'Algèbre et de Trigonométrie**, à l'usage des élèves de mathématiques spéciales. — Un vol. 350 p. ; Nony, Paris, 1902.

Herm. Schubert. — **Niedere Analysis**. Zweiter Teil ; Funktionen, Potenzreihen, Gleichungen (*Sammlung Schubert*). — Un vol. cart. de 215 p. ; prix : Mk. 3,80 ; G.-J. Goeschen, Leipzig, 1903.

Herm. Schubert. — **Elementare Berechnung der Logarithmus**, eine Ergänzung der Arithmetik-Bücher. — Un p. vol. broché, 87 p. ; prix : Mk. 1,60 ; G.-J. Goeschen, Leipzig. 1903.

H. Weber und J. Wellstein. — **Encyklopaedie der Elementar-Mathematik**, ein Handbuch für Lehrer und Studierende. B. I. *Elementare Algebra und Analysis*. — Un vol. cart. gr. in-8°, 447 p. ; prix : Mk. 8 ; B.-G. Teubner, Leipzig, 1903.

Le Gérant : C. NAUD.

TABLE DES MATIÈRES

ARTICLES GÉNÉRAUX

Doctrine

A nos lecteurs (*Les Directeurs*) 1
Les applications du calcul des probabilités à la méthode scientifique (*N. Vaschide* et *H. Pieron*). 3,111
Le problème n° 2 de M. David Hilbert (*A. Padoa*) 85
L'espace est-il euclidien (*G. Combebiac*). 157,262
Philologues et psychologues en face du problème des parallèles (*R. Baron*) 279
Sur la nécessité du postulat d'Euclide (*Lucas de Peslouan*) 288
A propos d'un récent exposé des principes de la Géométrie non-euclidienne (*R. Bonola*). 317
Théorie des parallèles euclidiennes (*Commolet*). 326
Les limites et l'atome (*J.-F. Bonnel*) 332
L'algèbre du calcul (*R. Renton*) 347
La logique symbolique (*Hugh Mac Coll*) 415
Sur la conception des limites (*C. Popovici*) 431

Histoire ; organisation de l'Enseignement.

Les nouveaux programmes de l'Ecole Polytechnique de Paris (*C.-A. Laisant*). 77
L'enseignement mathématique en Russie ; état actuel ; enseignement secondaire (*V. Bobynin*) 237
L'enseignement mathématique en Russie ; état actuel ; enseignement supérieur (*V. Bobynin*). 397

ÉTUDES PÉDAGOGIQUES

Equivalence du mouvement d'un plan invariable Σ passant d'une position donnée Σ_1 à une autre position donnée Σ_2 (*F. Kraft*) 30
Sur l'enseignement élémentaire des fonctions elliptiques (*E.-M. Lémeray*) 92
Une leçon de géométrie analytique (*P.-H. Schoute*) 106
Equivalence du mouvement d'un système invariable à trois dimensions Σ qui passe d'une manière quelconque d'une position donnée Σ_1 à une autre position donnée Σ_2 (*F. Kraft*) 178

Sur les divisions homographiques (*L. Crelier*) 339
La formule de Stokes (*Otto A. Silva*) 344
Remarques sur les variations d'un polynôme (*P. Zervos*) 356
Sur quelques sommations que l'on rencontre en mécanique (*Dautheville*). 437
La méthode de M. Méray pour l'enseignement de la géométrie (*Elie Perrin*) 441
Sur la nomenclature des puissances (*Ch. Berdellé*) 446
Démonstration élémentaire de la formule $\frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu)^2}$ (*M. Lerch*) 450
L'équation du prisme optique (*C. Maltézos*). 454

Notes et documents.

Ecole centrale des Arts et Manufactures ; extrait du « programme des conditions d'admission des élèves » 55

Cours universitaires :

Allemagne 129, 212, 368
Autriche 215, 456
France 61, 130, 457
Iles Britanniques 371, 458
Suisse 61, 131, 216, 376

CHRONIQUE

Congrès et Sociétés savantes ; divers.

Prix académiques : Académies des Sciences de Paris 62
Le prix Francœur. 64
Le Congrès international des sciences historiques à Rome 132
Congrès des mathématiciens allemands 218
Troisième Congrès international des mathématiciens. 296
Congrès international de philosophie 297
Les travaux mathématiques au Congrès des sciences historiques à Rome en 1903 (*E. Lebon*) 378
La « Gaceta de Mathematicas elementales » 218

Nécrologie.

N. Bougaiev. 295
L. Cremona (*H. Fehr*) 294
Ernest Duporq (*A. Bahl*) 218
L. Gegenbauer 296
Achille Goulard. 132
John B. Runkle. 64

CORRESPONDANCE

LETTRES OU EXTRAITS DE LETTRES

L. Barré : Sur le théorème du carré de l'hypoténuse 137
Ch. Berdellé : Une annotation à l'algèbre d'Euler 384
Ch. Berdellé : Le problème du veilleur de nuit 385
C. Cailler : A propos d'un article sur le calcul des probabilités . 133, 299
G. Combebiac : A propos d'une note récente sur la géométrie générale 219
N.-J. Hatzidakis : Sur les formules de Bonnet, Enneper et Kommerell. 135
V. Jamet : Sur la formule du binôme. 298
P. Mansion : A propos du récent article de M. Vidal 65
C. Popovici : A propos de l'article « Philologues et psychologues en face du problème des parallèles » 458
Ch. Tweedie : Lettre à M. Laisant, à propos de son article sur les bissectrices d'un angle. 220
N. Vaschide et H. Piéron : Réponse à M. Cailler au sujet du calcul des probabilités. 223
C. Vidal : Sur une question de convergence 139
C. Vidal : A propos du récent article de M. Combebiac. 385
X... : Remarque sur la géométrie non-euclidienne. 65

BIBLIOGRAPHIE

Alasia (C.). — I complementi di geometria elementare (*C. A. L.*). . . 230
Appell (P.). — Traité de mécanique rationnelle, t. III. Equilibre et mouvement des milieux continus (*A. Buhl*). 142
Bachmann (P.). — Niedere Zahlentheorie, I (*D. Mirimanoff*). 146
Bardey (E.). — Anleitung zur Auflösung eingekleideter Aufgaben . . 386
Beltrami (Eug.). — Opere matematiche, t. I (*H. Fehr*) 386
Bohnert (F.). — Elementare Stereometrie (*H. F.*). 302
Borel (Em.). — Leçons sur les séries à termes positifs (*E. Bortolotti*). 226, 310
Boussinesq (J.).— Théorie analytique de la chaleur, t. I (*R. Marcolongo*) 302
Brioschi (Francesco). — Opere matematiche, t. II (*H. F.*) 149
Cannwel (Ed.). — La rotation de la terre démontrée par le pendule de Foucault ; appareil des écoles (*C. A. L.*). 229
Capelli (Alf.).— Lezioni sulla teoria delle forme algebriche (*R. Perrin*) 66
Couturat. — La logique de Leibniz (*H. Fehr*) 67
Czuber (Emm.). — Probabilités et moyennes géométriques (*G. Combebiac*). 387
Estanave (E.).— Essai sur la sommation de quelques séries trigonométriques (*C. A. L.*) 147
Fischer (Karl T.).— Der naturwissenschaftliche Unterricht in England. 148
Forsyth (A.-R.). — A Treatise on Differential Equations (*H. F.*) . . . 462
Fouet (E.-A.). — Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques (*D. Mirimanoff*) 387
Fricke (Rob.). — Hauptsätze der Differential u. Integralrechnung (*H. F.*) 309

Godefroy (Maurice). — Théorie élémentaire des séries (*D. Mirimanoff*) 228
Goursat. — Cours d'analyse mathématique (*L. Desaint*) 463
Holzmüller (G.). — Elemente der Stereometrie, t. IV (*S. May*) . . . 147
Lévy (Maurice). — Éléments de Cinématique et de Mécanique (*G. Combebiac*) 389
Netto (Eug.). — Lehrbuch der Combinatorik (*E. Gubler*) 309
Pascal (E.). — Lezioni di calcolo infinitesimale (*C. A. L.*) 150
Pascal (E.). — I gruppi continui di trasformazioni (*G. Combebiac*) . . 464
Riemann's Gesammelte Werke, Nachträge herausgegeben von Noether und Wirtinger 389
Sammlung Goeschen (Doehlemann; Haussner; Junker) 391
Schoute (P.-H.). — Mehrdimensionale Geometrie (*P. Barbarin*) . . . 149
Schuster (M.). — Geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie 389
Snyder and Hutchinson. — Differential and Integral Calculus, t. I (*C. A. L.*) 69
Weinholdt (Ern.). — Leitfaden der analytischen Geometrie 70
Zeuthen (H.-G.). — Histoire des mathématiques dans l'antiquité et au moyen âge (*J. Boyer*) 390

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

PUBLICATIONS PÉRIODIQUES

Acta matematica (Mittag-Leffler, *Stockholm*) 151
American mathematical Monthly (*Sprinfield*) 152, 311
Annali di matematica pura ed applicata (Bianchi, Dini, Jung, *Milan*). 392
Annals of Mathematics (*Harvard University*) 152, 311, 466
Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1903 155
Annual Report of the Smithsonian Institution 155
Archiv der Mathematik und Physik (Lampe, Fr. Meyer, Jahnke, *Leipzig, Berlin*) 153, 231, 392
Atti della R. Accademia dei Lincei (*Rome*) 153, 231, 466
Bibliotheca mathematica (Eneström, *Leipzig*) 232, 393
Bolletino di Matematica (Conti, *Bologne*) 154
Bulletin astronomique (*Paris*) 71
Bulletin de la Société mathématique de France (*Paris*) 467
Bulletin des sciences mathématiques (Darboux, Picard, Tannery, *Paris*) 71
Bulletin des sciences mathématiques et physiques élémentaires (Gérard et Michel, *Paris*) 71
Bulletin of the American Mathematical Society (*New-York*) 154, 393
Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences (*Paris*) 72, 232, 312
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (E. Lampe et G. Wallenberg, *Berlin*) 312, 467
Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung (Gutzmer, *Leipzig*) 312
Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas (Teixeira, *Coimbra*) 234
Journal de Mathématiques pures et appliquées (Jordan, *Paris*) 312
Journal für reine und angewandte Mathematik (Hensel, *Berlin*) 313

Matematiche pure ed applicate (Le) (Alasia, *Castello*) 313
Mathematische Annalen (F. Klein, *Leipzig*) 394
Mathesis (Mansion et Neuberg, *Gand*) 394
Monatshefte für Mathematik und Physik (G. v. Escherich und L. Gegenbauer, *Wien*) 234
Nouvelles Annales de mathématiques (Laisant, Bourlet et Bricard, *Paris*) 74, 467
Nuovo-Cimento (Il) (Batelli, Volterra, *Pise* 155, 395
Periodico di Matematica (Lazzeri, *Livourne*) 234, 468
Revista de Ciencias (Villareal, *Lima*) 314
Revista trimestrial et matematicas (Rius y Casas, *Saragosse*) 469
Revue générale des sciences pures et appliquées (Olivier, *Paris*). 314, 467
Revue scientifique (Héricourt, *Paris*) 314
Revue semestrielle des publications mathématiques (*Amsterdam*) . . . 314
Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften (Pietzker, *Berlin*) 235, 395
Wiadomosci Matematyczne (Dikstein, *Varsovie*) 235
Zeitschrift für das Realschulwesen (Czuber, Bechtel, Glöser, *Wien*) 235, 315
Zeitschrift für Mathematik und Physik (Mehmke, Runge, *Leipzig*) . . . 315
Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (Schotten, *Leipzig*) 236, 316

PUBLICATIONS NON PÉRIODIQUES

Livres nouveaux 75, 156, 236, 316, 396, 470

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

Cette table comprend les auteurs d'articles généraux ou d'articles de chronique, de lettres ou notes insérées dans la correspondance ou de comptes rendus bibliographiques.

Les numéros qui suivent chaque nom renvoient aux pages du volume.

Barbarin (P) 149
Baron (R). 279
Barré (L.) 137
Berdellé (Ch.) . . . 384, 385, 446
Bortolotti (Ett.) 226, 310
Bobynin (V.). 237, 397
Bonnel (J.-F.). 332
Bonola (R) 317
Boyer (J.). 390
Buhl (A.). 142, 218
Cailler (C.). 133, 299
Coll (Hugh Mac 415
Combebiac (G.) . . . 157, 219, 262, 387, 389, 465
Commolet. 326
Crelier (L.). 339
Dautheville. 437
Desaint (L.). 464
Fehr (H.). . 67, 149, 294, 302, 309, 386, 391, 462
Gubler (E.). 309
Hatzidakis (N. J. 135
Jamet (V.). 298
Kraft (Ferd.) 30, 178
Laisant (C.-A.) . . 69, 77, 147, 150, 229, 230
Lebon (F.) 378
Lémeray (F.-M.). 92
Lerch (M.) 450
Mansion (P.) 65
May (S.) 147
Mirimanoff (D.). . . 146, 228, 388
Marcolongo (R.). 302
Maltézos (C.). 454
Padoa (A) 85
Perrin (Raoul) 66
Perrin (Elie) 441
Piéron (H.). 3, 111, 223
Peslouan (Lucas de 288
Popovici (C.) 431, 459
Renton (R.). 347
Silva (Otto A.). 344
Schoute (P. H.) 106
Tweedie (Ch.)'. 220
Vaschide (N.) 3, 111, 223
Vidal (C.) 138, 385
X. 65
Zervos (R). 356

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY

QA
11
E65
t.5

L'Enseignement mathématique

Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY